

# Geometrické modelování

## Křivky v rovině a jejich transformace

Zbyněk Šír



Matematický ústav UK  
Matematicko-fyzikální fakulta

## Definice

Bud'  $I \subseteq \mathbb{R}$  interval. Diferencovatelné zobrazení (třídy  $C^\infty$ )  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  se nazývá *parametrizovaná křivka* v  $\mathbb{R}^2$ . Množina  $\langle \mathbf{c} \rangle := \mathbf{c}(I) \subseteq \mathbb{R}^2$  se nazývá *obraz křivky*. Parametrizovaná křivka se nazývá *regulární*, jestliže  $\mathbf{c}'(t) \neq (0, 0)^T$  pro každé  $t \in I$ .

## Poznámka

Je-li  $I$  uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme diferencovatelným zobrazením na  $I$  restrikci na  $I$  diferencovatelného zobrazení definovaného na nějakém otevřeném nadintervalu. Parametrizovaná křivka je charakterizována dvojicí funkcí definovaných na  $I$ , tedy  $\mathbf{c}(t) = (c_x(t), c_y(t))^T$ . Často není třeba a pro praxi není vhodné, aby  $\mathbf{c}$  a  $\phi$  bylo třídy  $C^\infty$ , ale podle situace postačí nižší hladkost, například  $C^1$ ,  $C^2$ ,  $C^3$ .

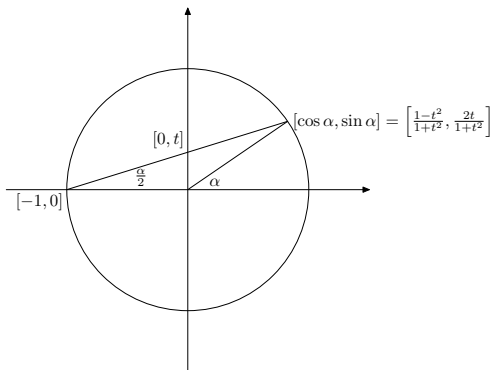
## Definice

Je-li  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regulární parametrizovaná křivka a  $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$  difeomorfismus intervalu  $\tilde{I}$  na  $I$ , je  $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  regulární parametrizovaná křivka se stejným obrazem jako  $\mathbf{c}$ .

Difeomorfismus  $\phi$  pak nazýváme *změnou parametru* a  $\tilde{\mathbf{c}}$  *reparametrizací*  $\mathbf{c}$ . Je-li navíc  $\phi' > 0$  na  $\tilde{I}$ , nazveme  $\tilde{\mathbf{c}}$  *reparametrizací  $\mathbf{c}$  zachovávající orientaci*.

# Parametrizace kruhového oblouku

- Kružnice  $x^2 + y^2 = 1$  se parametrizuje jako  $x = \cos \alpha$ ,  
 $y = \sin \alpha$ .
- Ale lze i racionálně stereografickou projekcí.  
 $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $y = \frac{2t}{1+t^2}$ , kde  $t = \tan(\alpha/2)$ .



- Dále můžeme reparametrizovat pomocí  $t = \frac{As+B}{Cs+D}$ , t.j. lineární lomené funkce.

## Definice a lemma

Délku křivky dané parametrizací  $\mathbf{c}(t)$ ,  $t \in I = (\alpha, \beta)$  definujeme jako určitý integrál

$$\int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{c}'(t)\| dt,$$

který nezávisí na parametrizaci. Funkci rychlosti budeme označovat  $r(t) = \|\mathbf{c}'(t)\|$ . Je-li  $r(t) \equiv 1$ , řekneme, že křivka je parametrizována jednotkovou rychlostí, nebo také že je *parametrizovaná obloukem*.

## Poznámka

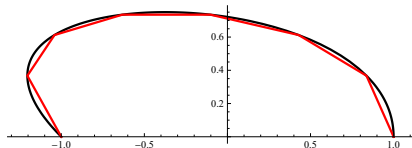
*Každou křivku lze parametrizovat obloukem, ale skoro pro žádnou tato parametrizace nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí.*

# Vepsaná lomená čára a délka křivky

- Vepsaná lomená čára je definována jako spojnice uspořádaných bodů

$$\mathbf{c}(t_0), \mathbf{c}(t_1), \dots, \mathbf{c}(t_m),$$

kde  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta$ .

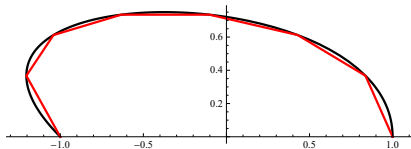


# Vepsaná lomená čára a délka křivky

- Vepsaná lomená čára je definována jako spojnice uspořádaných bodů

$$\mathbf{c}(t_0), \mathbf{c}(t_1), \dots, \mathbf{c}(t_m),$$

kde  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta$ .



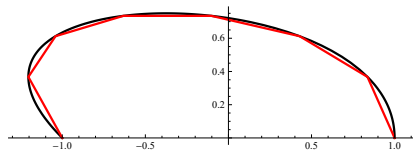
- Je možno volit například rozdělení rovnoměrné v parametru

$$t_i = \alpha + \frac{i}{m}(\beta - \alpha) = \left(1 - \frac{i}{m}\right)\alpha + \frac{i}{m}\beta.$$

# Vepsaná lomená čára a délka křivky

- Platí, že délka křivky je supremem délek všech vepsaných lomených čar, tedy

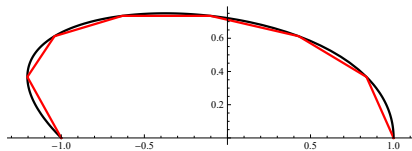
$$L(c) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|, \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta \right\}.$$



# Vepsaná lomená čára a délka křivky

- Platí, že délka křivky je suprémem délek všech vepsaných lomených čar, tedy

$$L(c) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|, \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta \right\}.$$



- Platí, že délka rovnoměrně rozdělené lomené čáry  $L_m$  k délce křivky  $L$  konverguje pro  $m \rightarrow \infty$  jako  $\mathcal{O}(\frac{1}{m^2})$ , tedy existuje konstanta  $K > 0$  taková, že pro každé  $m$  platí

$$(L - L_m) < \frac{K}{m^2}.$$

## Definice a lemma

V každém bodě orientované křivky dané parametrizací  $\mathbf{c}(t)$  definujeme její *jednotkový tečný vektor* výrazem

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}.$$

Dále definujeme normálový vektor  $\mathbf{n}_*(t)$  tak, aby  $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}_*(t)\}$  byla kladně orientovaná ortonormální báze  $\mathbb{R}^2$ . Tyto vektory se nemění při reparametrizaci zachovající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné vektory.

## Definice a lemma

Pro regulární parametrizovanou křivku  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  definujeme v každém bodě *znaménkovou křivost*

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}, \quad t \in I.$$

Znaménková křivost se nemění při reparametrizaci zachovající orientaci. Při reparametrizaci která mění orientaci mění znaménková křivost pouze znaménko. Bod, ve kterém je znaménková křivost nulová nazýváme *inflexní*.

## Definice a lemma

Označme souřadnice bodů v rovině  $\mathbf{x} = (x, y)^T$ . Eukleidovské shodnosti (isometrie) jsou právě zobrazení  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{Ax} + \mathbf{p}$ , kde  $A$  je orthonormální matice. Takovou shodnost nazýváme přímou, právě když  $\det(A) = 1$ . Každá přímá shodnost je posunutí (tedy  $A = I$ ) nebo otočení (okolo vhodného bodu).

## Věta

Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou invariantní vůči přímým shodnostem  $\mathbb{R}^2$ . Přesněji mějme přímou shodnost ve tvaru  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{Ax} + \mathbf{p}$ . Máme-li křivku danou parametrizací  $\mathbf{c}(t)$  a v jejím libovolném (neinflexním) bodě  $\kappa_Z$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}_*$ , pak křivka  $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{Ac}(t) + \mathbf{p}$  má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivost  $\tilde{\kappa}_Z = \kappa_Z$ , tečný vektor  $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{At}$  a normálový vektor  $\tilde{\mathbf{n}}_* = \mathbf{An}_*$ .

# Tečná přímka a oskulační kružnice

## Definice

Pro každou křivku  $\mathbf{c}$  definujeme v každém bodě její *tečnou přímku* jako množinu  $\mathbf{c}(t) + \langle \mathbf{t}(t) \rangle$  a dále v každém neinflexním bodě definujeme její *orientovaný poloměr křivosti* jako  $R(t) = \frac{1}{\kappa_z(t)}$ , její *střed křivosti* jako bod  $S(t) = \mathbf{c}(t) + R(t)\mathbf{n}_*(t)$  a kružnici se středem  $S(t)$  a poloměrem  $R(t)$  nazýváme *oskulační kružnice* v bodě  $\mathbf{c}(t)$ .

## Věta

Ve svém každém má křivka ze všech přímek kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou. Ve svém každém neinflexním bodě má křivka ze všech kružnic má kontakt nejvyššího řádu s oskulační kružnicí. Navíc, jestliže označíme  $N(t)$  normálovou přímkou v bodě  $t$ , pak v každém neinflexním bodě  $\mathbf{c}(t_0)$  platí

$$S(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} N(t_0) \cap N(t).$$

# Význam znaménkové křivosti

## Věta

Pro regulární parametrizovanou křivku  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  platí

$$\mathbf{t}'(t) = r(t)\kappa_z(t)\mathbf{n}_*(t).$$

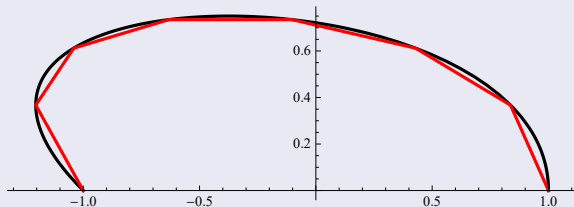
Existuje hladká funkce  $\theta(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$  splňující

$\mathbf{t}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ ,  $t \in I$  a pro znaménkovou křivost pak platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{r(t)}, \quad t \in I.$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí  $r(t) = 1$ , pak je tedy znaménková křivost rychlostí změny křivky. Funkce  $r(t)$  a  $\kappa_z(t)$  určují křivku až na přímou shodnost.

## Věta



Znaménkovou křivost lze přibližně vypočítat z vepsané lomené čáry. Definujme  $\vec{\mathbf{v}}_i = \mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})$  a pak lze například přibližně počítat

$$\kappa_z(t_i) \approx \arcsin \left( \frac{\det\{\vec{\mathbf{v}}_i, \vec{\mathbf{v}}_{i+1}\}}{\|\vec{\mathbf{v}}_i\| \|\vec{\mathbf{v}}_{i+1}\|} \right) \frac{2}{\|\vec{\mathbf{v}}_i\| + \|\vec{\mathbf{v}}_{i+1}\|}.$$

## Věta

*Je-li  $\mathbf{c}(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  jednoduchá regulární hladká uzavřená rovinná křivka, pro kterou navíc  $\mathbf{t}(\alpha) = \mathbf{t}(\beta)$ , pak*

$$\int_C \kappa_z ds = \pm 2\pi.$$

*V případě hodnoty  $2\pi$  nazýváme křivku kladně orientovanou, v případě  $-2\pi$  ji nazýváme záporně orientovanou.*

## Věta

*Bud'  $\mathbf{c}(t) = (c_x(t), c_y(t))^T$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  kladně orientovaná, hladká, regulární jednoduchá, uzavřená křivka. Pak plošný obsah oblasti  $\text{Int } \mathbf{c}$  je roven*

$$\int_{\alpha}^{\beta} c_x(t)c'_y(t)dt = - \int_{\alpha}^{\beta} c_y(t)c'_x(t)dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (c_x c'_y - c'_x c_y) dt.$$