Cvičení k přednášce Geometrie 1

Řešení

Cvičení 11, verze ze dne 28. prosince 2020

11 Kuželosečky a kvadriky

Cíle cvičení a DU:

- Řešit různé úlohy pro kuželosečky projektivně rozšířeném $\mathbb{R}^2$.
- Rozpoznat afinní typ kvadriky v projektivně rozšířeném $\mathbb{R}^3$.

Příklady:

Úloha 11.1. V projektivní rovině na přímce $p: \ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$ najděte bod polárně sdružený s bodem $(1, 5, 1)$ vzhledem ke kuželosečce

$$k: \ -7x_1^2 + 6x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_2 + 14x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0.$$

Řešení. $(62, 91, -51)$

Úloha 11.2. Určete poláru bodu $[2, 2]$ a pól přímky $x - y - 2 = 0$ vzhledem ke kuželosečce $x^2 + y^2 - 3xy + 1 = 0$. Dále určete směr sdružený se směrem $\mathbf{v} = (1, 2)$.

Řešení. Polára $x + y - 1 = 0$, pól $[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$, sdružený směr $(1, 4)$.

Úloha 11.3. V $\mathbb{R}^2$ určete tečny kuželosečky $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$ rovnoběžné s přímkou $3x + 3y - 7 = 0$ včetně bodů dotyku.

Řešení. $x + y - 1 = 0$, $[1, 0]$ a $3x + 3y + 13 = 0$, $[-\frac{5}{3}, -\frac{8}{3}]$

Úloha 11.4. Určete, pro které hodnoty $p \in \mathbb{R}$ je kuželosečka $x^2 + 2pxy + y^2 + 2y - 3 = 0$ parabolou. V těchto případech určete její osu a vrchol.

Řešení. Pro $p = 1$ má osa směr $(1, -1)$ a vrchol je bod $[-\frac{15}{8}, \frac{11}{8}]$. Pro $p = -1$ má osa směr $(1, 1)$ a vrchol je bod $[\frac{15}{8}, \frac{11}{8}]$.

Úloha 11.5. Určete osy kuželosečky
a) $k: \ 5x^2 + 24xy + 75y^2 - 36x + 6y + 1 = 0$;
b) $k: \ 7x^2 + 26xy + 7y^2 + 42x = 0$.

Řešení. a) $o_1: \ x + 6y = 0$, $o_2: \ 6x - y - 37 = 0$;
b) $o_1: \ 20x + 20y + 21 = 0$, $o_2: \ 2x - 2y - 7 = 0$.

Úloha 11.6. Určete střed kuželosečky $Q: x^2 + y^2 - 4xy + 1 = 0$ a označte si jej S. Vyjádřete kuželosečku $F(Q)$, její střed a bod $F(S)$, kde

a) F je projektivní zobrazení dané v homogenních souřadnicích maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) F je afinní zobrazení dané v homogenních souřadnicích maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení. $S = [0, 0]$

a) $F(Q) : x^2 - 4xy + 2y^2 - 2y + 1 = 0$, má střed $[-1, -\frac{1}{2}]$, $F(S) = [0, 0]$.

b) $F(Q) : x^2 - 8xy - 14x + 13y^2 + 50y + 47 = 0$, má střed $[3, -1] = F(S)$.

Úloha 11.7. Určete afinní typ následujících kvadrik:
a) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 2y - 4z + 2 = 0$;
b) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$;
c) $2x^2 + 2xy + y^2 - 2z^2 - 2z - 1 = 0$;
Hint: postačí určit signaturu matice kvadriky a její podmatice odpovídající průniku s nevlastní rovinou.

Řešení. a) dvojdílný hyperboloid b) elipsoid c) jednodílný hyperboloid