

Cvičení k přednášce Geometrie 1

Řešení

Cvičení 9, verze ze dne 2. prosince 2020

9 Projektivní prostor a zobrazení

Cíle cvičení a DU:

- Naučit se pracovat v projektivních prostorech a používat homogenní souřadnice.
- Seznámit se s konečnými projektivními rovinami.
- Naučit se pracovat s projektivními transformacemi.
- Studovat projektivní kuželošky a polaritu.
- Poslední DU bude zadán na příštím cvičení.

Příklady:

Úloha 9.1 (Reálná rovina). Uvažujme projektivní rovinu $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ a v ní body $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$, $C = (1, 1, 1)$.

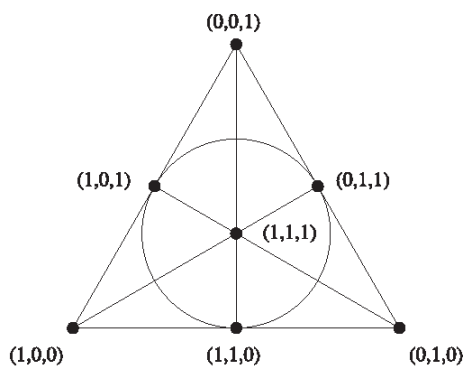
- Ukažte, že tyto body leží na projektivní přímce, najděte její parametrizaci a duální homogenní souřadnice.
- Nalezněte průsečík D přímky $\overleftrightarrow{AB}$ s přímkou $(1, 2, -5)^*$ a vypočítejte dvojpoměr $\mu = (A, B, C, D)$.
- Vypočítejte dvojpoměr pro různé permutace, např. (A, B, D, C) , (B, A, C, D) , (C, B, A, D) a zamyslete se jak výsledky souvisejí s μ .
- Na přímce $\overleftrightarrow{AB}$ nalezněte bod E tak, aby $(A, B, C, E) = -1$ (a tedy body tvořily harmonickou čtveřici).

Řešení.

- Parametrizace $\overleftrightarrow{AB}$: např. $t_1(1, 2, 3) + t_2(3, 2, 1)$. Duální souřadnice $\overleftrightarrow{AB} = (1, -2, 1)^*$.
- $D = (4, 3, 2)$, $\mu = \frac{1}{5}$.
-
- $E = (1, 0, -1)$.

Úloha 9.2 (Konečné geometrie). Studujme projektivní roviny $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{Z}_p^3)$, kde p je pevně zvolené prvočíslo.

- a) Ověřte, že následující obrázek tak zvané Fanoovy roviny (Fano plane) popisuje všechny body a přímky v rovině $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_2^3)$. Spočítejte duální homogenní souřadnice všech sedmi přímek.



- b) Nakreslete všechny body a přímky projektivní roviny $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_3^3)$.
- c) Určete kolik má bodů a kolik přímek projektivní rovina $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_p^3)$. Kolik na každé přímce leží bodů a kolik přímek prochází každým bodem?
- d) Uvažujme projektivní rovinu $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_5^3)$ a v ní dva body $A = (1, 2, 3)$ a $B = (3, 1, 2)$. Vypište všechny body, které leží na přímce $\overleftrightarrow{AB}$. Nalezněte její průsečík s přímkou $p = (1, 1, 0)^*$.

Řešení.

- a)
- b)
- c) Celkem má rovina $p^2 + p + 1$ bodů a stejný počet přímek. Na každé přímce leží $p + 1$ bodů a každým bodem prochází $p + 1$ přímek.
- d) $\overleftrightarrow{AB} = \{(1, 2, 3), (4, 3, 0), (2, 4, 2), (0, 0, 4), (3, 1, 1), (3, 1, 2)\}$. Průsečík je $(0, 0, 4)$. Souřadnice bodů jsou homogenní (až na násobek číslem ze $\mathbb{Z}_5$).

Úloha 9.3 (Projektivní transformace). Nalezněte projektivní transformaci F přímky $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ na sebe, která splňuje

$$F(1, 0) = (1, 3), \quad F(2, 3) = (4, 9), \quad F(2, 1) = (2, 5).$$

Hint: souřadnice fungují až na násobek.

Řešení. Zobrazení je v homogenních souřadnicích dáno maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a jejím libovolným násobkem).

Úloha 9.4 (Projektivní transformace). Nalezněte projektivní transformaci F roviny $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ na sebe, která splňuje

$$F(1, 0, 0) = (1, 0, 2), \quad F(0, 1, 0) = (0, 1, -1), \quad F(0, 0, 1) = (1, 1, 2), \quad F(2, 1, 1) = (8, 1, 17).$$

Řešení. Zobrazení je v homogenních souřadnicích dáno maticí

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a jejím libovolným násobkem).

Úloha 9.5. V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ je dána množina rovnic v kanonických homogenních souřadnicích

$$Q : 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 5x_3^2 = 0.$$

Ukažte, že Q je regulární kuželosečka a nalezněte k ní tečnu v jejím bodě $(2, 0, 2)$. Nalezněte projektivní transformaci, která zobrazuje kanonickou kuželosečku $K : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ na Q .

Řešení. Matice kvadratické formy

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

má signaturu $(2, 1, 0)$. Rovnice tečny je $5x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$, její duální souřadnice tedy jsou $(5, 1, -5)^*$. Projektivních transformací je více, například ta daná maticí

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Musí platit $P^T \cdot B \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Úloha 9.6. V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ je dána kuželosečka rovnic v kanonických homogenních souřadnicích

$$Q : 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 - 3x_3^2 = 0.$$

a) Ukažte, že se jedná o regulární reálnou kuželosečku.

b) Nalezněte poláru p_X k bodu $X = (3, 4, 1)$.

- c) Nalezněte tečny ke Q procházející bodem X .
- d) Ukažte, že bod X leží na přímce $r = (1, 1, -7)^*$. Vypočtěte $Y = r \cap p_X$ a oba průsečíky $r \cap Q$, které si označte A, B .
- e) Ukažte, že (X, Y, A, B) tvoří harmonickou čtveřici.

Řešení.

- a) Signatura matice $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ je $(2, 1, 0)$. Jen tak mimochodem $(1, 2, 0)$ by nám taky vyhovovalo protože bychom si místo B vzali $-B$, které definuje stejnou kuželosečku.
- b) $p_X = (-3, 1, 6)^*$
- c) Jde o přímky $7x_1 - 2x_2 - 13x_3 = 0, x_1 - 3x_3 = 0$.
- d) $Y = (13, 15, 4), A = (4, 3, 1), B = (22, 27, 7)$.
- e)

Úloha 9.7. V reálném projektivním prostoru $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ je dána kvadrika rovnicí v kanonických homogenních souřadnicích

$$2x_1^2 + 4x_2x_1 - 2x_3x_1 + 3x_2^2 - 2x_4^2 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 = 0.$$

Ověřte, že tato kvadrika je regulární a rozhodněte, zda-li je přímková či nikoliv. Nalezněte tečnou rovinu v jejím bodě $(3, -2, 2, -1)$. Nalezněte průnik této tečné roviny s kvadrikou.

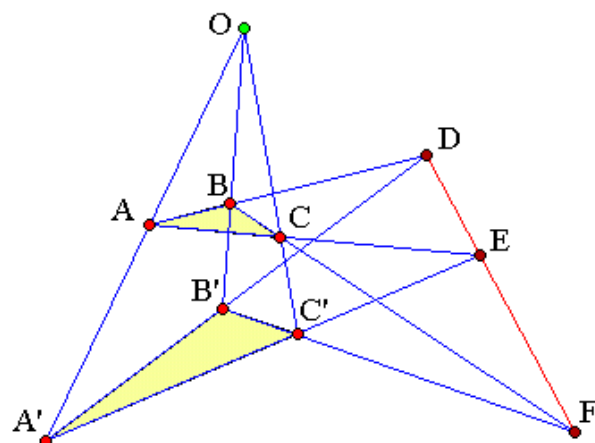
Řešení. Jedná se o regulární přímkovou kvadriku. Tečná rovina má rovnici $x_2 - 2x_4 = 0$ a tedy duální souřadnice $(0, 1, 0, -2)^*$. Průnik je sjednocení dvou přímek, které je možno homogenně parametrizovat například jako

$$\begin{aligned} p_1 : & \quad t_1(3, -2, 2, -1) + t_2(-3, 2, 1, 1) \\ p_2 : & \quad t_1(3, -2, 2, -1) + t_2(1, 2, 2, 1) \end{aligned}$$

Úloha 9.8 (Desarguesova věta). V projektivní reálné rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mějme šest různých bodů A, B, C, A', B', C' přičemž $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ se protínají v jednom bodě. Pak body

$$D := \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}, \quad E := \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}, \quad F := \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$$

leží na přímce.



- a) Dokažte!
- b) Formulujte duální větu.
- c) Přiměřeně si lámejte hlavu nad tím, že pokud tento obrázek interpretujeme jako zobrazení prostorové situace, kdy máme dva (žluté) řezy jehlanu rovinami, pak přímka DEF je průsečnicí těchto rovin a kolinearita bodů D, E, F je zřejmá.