Cvičení k přednášce Geometrie 1

Řešení

Cvičení 8, verze ze dne 28. listopadu 2020

8 Afinní prostor a zobrazení

Cíle cvičení a DU:

- Naučit se pracovat s afinními zobrazeními
- Naučit se používat barycentrické souřadnice v rovině

Příklady:

Úloha 8.1. Určete rovnice afinního zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do sebe, ve kterém bod $M[0,1]$ přechází do bodu $M'[-3,3]$ a asociovaný homomorfismus zobrazuje vektory $\mathbf{u}(1,2)$ a $\mathbf{v}(1,0)$ po řadě na vektory $\mathbf{u}'(-7,-2)$, $\mathbf{v}'(1,-2)$.

Řešení. $x' = x - 4y + 1$, $y' = -2x + 3$

Úloha 8.2. Určete afinní zobrazení f z $\mathbb{R}^2$ do sebe tak, aby $f([-1,1]) = [6,7]$, $f([1,-1]) = [4,5]$ a $f([2,0]) = [7,12]$. Určete zda-li se jedná o afinitu a případně nalezněte zobrazení inverzní.

Řešení. $f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$f^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -9/2 \end{pmatrix}$

Úloha 8.3. Určete obraz bodu $[3,1,-2] \in \mathbb{R}^3$ při afinním zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ splňujícím $f([2,1,-1]) = [1,3]$, $f([1,0,2]) = [0,2]$, $f([0,1,1]) = [1,-1]$, $f([1,1,1]) = [1,1]$ a obraz vektoru $(3,1,-2)^T$ při asociovaném homomorfismu $\bar{f}$.

Řešení. $[1,5]$ a $(1,5)^T$.

Úloha 8.4. Lineární zobrazení $\bar{f}$ asociované s afinním zobrazením $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ má vzhledem k bázi B matici A. Navíc platí $f([1,2]) = [5,-8]$. Určete $f([3,4])$.

$$B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right), A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. $f([3,4]) = [5,-8] + (-12,-16) = [-7,-24]$

Úloha 8.5. Vyjádřete kolmou projekci π celého $\mathbb{R}^2$ na přímku $x + 2y + 3 = 0$ a ověřte, že $\pi \circ \pi = \pi$.

Řešení. $\pi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Úloha 8.6. V afinní rovině $\mathbb{Z}_5^2$ jsou dány body $A = [2,3]$, $B = [1,4]$. Nalezněte rovnoběžku s přímkou AB, která prochází bodem $C = [2,2]$ a popište ji parametricky i rovnicově.

Řešení. Parametricky:$[2,2] + s(4,1)^T$, rovnicově: $\left\{[x,y]; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$.

Úloha 8.7. Na reálné afinní přímce jsou dva různé body A, B. Definujme $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ a $T = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$. Vyjádřete dělící poměry $\frac{AT}{TB}$, $\frac{TA}{AB}$, $\frac{ST}{TB}$. Vyjádřete bod S jako afinní kombinaci bodů A a T.

Řešení. $\frac{AT}{TB} = 2$, $\frac{TA}{AB} = -\frac{2}{3}$, $\frac{ST}{TB} = \frac{1}{2}$, $S = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}T$

Úloha 8.8. V $\mathbb{R}^2$ je dán trojúhelník ABC s vrcholy $A[2,0]$, $B[-3,0]$ a $C[3,-3]$. Ukažte, že body $P[-1,-1]$, $Q[1,3]$, a $R[-\frac{1}{4},0]$ leží postupně na úsečkách BC, CA a AB a určete v jakém poměru je rozdělují. Rozhodněte, zda-li body P, Q, R leží na přímce.

Úloha 8.9. V $\mathbb{R}^2$ je nějaký trojúhelník ABC a dále je S střed strany AB a bod T leží v jedné pětině strany AC. Označme si P průsečík přímek CS a BT. V jakém poměru dělí bod P úsečky CS a BT? Jaký je poměr obsahů trojúhelníku ABC a PBC?

Úloha 8.10. (**) V $\mathbb{R}^2$ je nějaký trojúhelník ABC a bod X, který neleží na žádné ze stran trojúhelníka (ani po prodloužení do přímek). Označme si $P = AX \cap BC$, $Q = BX \cap CA$ a $R = CX \cap AB$. Dokažte, že platí

$$\frac{AX}{XP} = \frac{AR}{RB} + \frac{AQ}{QC}.$$