Cvičení k přednášce Geometrie 1

Řešení

Cvičení 5, verze ze dne 18. listopadu 2020

5 Diferenciální geometrie prostorových křivek

Cíle cvičení a DU:

- Naučit se pracovat s prostorovými křivkami, zejména umět určit křivost, torzi, Frenetův repér a oskulační rovinu.
- Za domácí úkol je úloha 5.7.

Příklady:

Úloha 5.1. Je dána parametrizovaná křivka

$$\mathbf{c}(t) = \left[\frac{1}{5}\,t^5 + t^2 - 2\,t, -\frac{1}{2}\,t^4 + \frac{2}{3}\,t^3 + t^2, \frac{4}{3}\,t^3 - t^2\right], \quad t \in (0,2).$$

V bodě $t = 1$ nalezněte její křivost, torzi a Frenetův repér.

Řešení. $\kappa(1) = \frac{2}{3}, \tau(1) = 0$
$\mathbf{t}(1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \mathbf{n}(1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \mathbf{b}(1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

Úloha 5.2. Je dána prostorová křivka

$$\mathbf{c}(t) = \left[3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\right], \quad t \in \mathbb{R}$$

spočtěte její křivost a torzi v obecném bodě a určete Frenetův repér v bodě $\mathbf{c}(0)$.

Řešení. $\kappa(t) = \frac{1}{3(t^2+1)^2}$, $\tau(t) = \frac{1}{3(t^2+1)^2}$
$\mathbf{t}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \mathbf{n}(0) = (0,1,0), \mathbf{b}(0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Úloha 5.3. Parametrizujte následující křivky obloukem:

a) $\mathbf{c}(t) = \left[t, \sqrt{2}\ln t, t^{-1}\right]$ pro $t \in (0, \infty)$.

b) $\mathbf{c}(t) = [t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin(\frac{t}{2})]$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Řešení. Parametrizace obloukem získáme pomocí těchto reparametrizací

a) Integrací získáme $s = \left(t - \frac{1}{t}\right)$ a inverzní funkce má pro $t > 0$ tvar $t = \frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$

b) $s = 2t$

Úloha 5.4.

Určete křivost a torzi v obecném bodě šroubovice $\mathbf{c}(t) = [R\cos(t), R\sin(t), at]$, $t \in \mathbb{R}$, kde R, a jsou pevné reálné parametry. Určete úhel, který tečné vektory křivky svírají s osou z. Parametrizujte šroubovici obloukem.

Řešení. Křivost i torze jsou konstantní $\kappa(t) = \frac{R}{a^2+R^2}, \tau(t) = \frac{a}{a^2+R^2}$. Úhel stoupání je $\arctan \frac{R}{a}$. Parametrizace obloukem se získá reparametrizací $s = t\sqrt{a^2 + R^2}$.

Úloha 5.5. Spočtěte rovnici oskulační roviny křivky:

$$\mathbf{c}(t) = \left[\cos^3 t, \sin^3 t, \cos(2t)\right], \qquad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Řešení. Obecná rovnice oskulační roviny v závislosti na parametru je

$$4(\cos t)x - 4(\sin t)y - 3z - \cos 2t = 0.$$

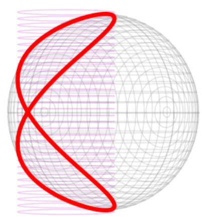
Úloha 5.6. Zjistěte zda křivka

$$\mathbf{c}(t) = \left[\frac{2t+1}{t-1}, \frac{t^2}{t-1}, t+2\right], \ t \in (2, 10)$$

leží v rovině, případně v jaké.

Řešení. Leží v rovině $x - 3y + 3z = 5$.

Úloha 5.7. Parametrizujte průnik sféry s válcovou plochou, která prochází středem sféry a má poloviční průměr. Nalezněte body s největší křivostí a v těchto bodech spočítejte křivost, torzi a Frenetův repér.



Úloha 5.8. Dokažte, že prostorová křivka leží na nějaké sféře právě tehdy, když všechny její normálové roviny procházejí jedním bodem.

Úloha 5.9. Určete funkci $f(t)$, tak aby měla křivka $\mathbf{c}(t) = [R\cos t, R\sin t, f(t)]$, $t \in \mathbb{R}$ nulovou torzi.

Řešení. Musí platit $f'(t) + f''(t) = 0$, tedy $f(t) = a + b\cos t + c\sin t$ a jedná se o rovinné řezy válce, tedy o elipsy.

Úloha 5.10. * *Zobecněná šroubovice* je křivka v prostoru, pro kterou existuje směr (osa), se kterým tečné vektory křivky svírají konstantní úhel. Dokažte, že křivka $\mathbf{c}(t)$ s nenulovou křivostí a torzí je zobecněnou šroubovicí právě tehdy, když je poměr $\frac{\kappa(t)}{\tau(t)}$ konstantní. V důsledku je tedy křivka z Úlohy 5.2 zobecněnou šroubovicí, nalezněte její osu.