

Cvičení k přednášce Geometrie 1

Řešení

Cvičení 3, verze ze dne 23. října 2020

3 Rovinne krivky

Cíle cvičení a DU:

- Naučit se různým způsobem parametrizovat rovinné křivky.
- Za domácí úkol je úloha 3.5. Odevzdejte prosím do SISu nejpozději do začátku pátého cvičení.

Příklady:

Úloha 3.1. V rovině mějme body $A = [2, 3]$, $B = [-2, -1]$.

1. Nalezněte regulární parametrizaci $\mathbf{c}(t)$ úsečky AB tak, aby $A = \mathbf{c}(0)$ a $B = \mathbf{c}(1)$.
2. Nalezněte parametrizaci této úsečky obloukem (tedy $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$) takovou, že $A = \mathbf{c}(5)$.
3. Nalezněte regulární parametrizaci této úsečky takovou, aby $A = \mathbf{c}(0)$ a $B = \mathbf{c}(1)$ a $\mathbf{c}(\frac{1}{3})$ byl její střed.
4. Nalezněte nějakou parametrizaci AB na, která bude hladká, prostá, ale v některém bodě nebude regulární ($\mathbf{c}'(t) = (0, 0)$ pro nějaké t .)

Řešení. 1. Například $[2 - 4t, 3 - 4t]$, $t \in [0, 1]$,

2. například $[2 - \frac{s-5}{\sqrt{2}}, 3 - \frac{s-5}{\sqrt{2}}]$, $s \in [5, 5 + 4\sqrt{2}]$,

3. například $[3t^2 - 7t + 3, 3t^2 - 7t + 2]$, $t \in [0, 1]$,

4. například $[2 - 4t^3, 3 - 4t^3]$, $t \in [0, 1]$.

Úloha 3.2. Parametrizujte elipsu $\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$. Otočte ji o $\pi/4$ okolo bodu $[-2, 0]$ (najděte implicitní i parametrické vyjádření).

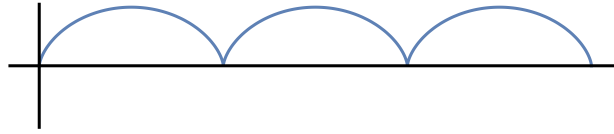
Řešení. Například $[2 \cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$.

Implicitní vyjádření zobrazené elipsy:

$$\frac{1}{8\sqrt{2}} (5\sqrt{2}x^2 - 6\sqrt{2}xy + 20\sqrt{2}x - 8x + 5\sqrt{2}y^2 - 12\sqrt{2}y - 8y + 20\sqrt{2} - 16),$$

parametrické: $[\frac{1}{2}(-\sqrt{2}\sin(t) + 2\sqrt{2}\cos(t) + 2\sqrt{2} - 4), \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(t) + 2\cos(t) + 2)]$, $t \in [0, 2\pi]$

Úloha 3.3. Cykloida. Uvažujme kolo o poloměru a , které se valí konstantní rychlostí v po ose x doprava. Parametricky popište trajektorii bodu na kole, který v čase $t = 0$ nacházel v bodě $(0, 0)$. Vypočtěte znaménkovou křivost.

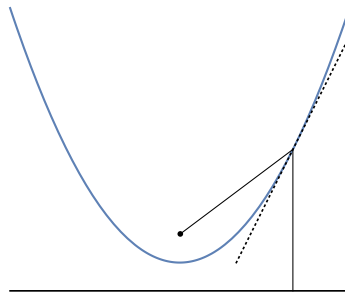


Řešení. například $\mathbf{c}(t) = [a(t - \sin t), a(1 - \cos t)]$, $\kappa_z(t) = \frac{-\sqrt{2}}{4a\sqrt{1-\cos t}}$, křivka není regulární pro $t = 2k\pi$.

Úloha 3.4. Kissoida. Uvažujme kružnici k o poloměru r a nějakou její tečnu p . Označme jako S bod dotyku přímky p s kružnicí k a nechte bod A ležet na kružnici k naproti bodu S . Pro polopřímku q , která vychází z bodu A a která se protíná s přímkou p , označme jako R bod průniku p a q , jako Q bod průniku k a q . Označme jako P bod na q , který splňuje $|A - P| = |Q - R|$. Najděte rovnici, která určuje množinu všech takových bodů P , a najděte parametrický popis této množiny (křivky).

Řešení. Pro obrázek a řešení viz Cissoid of Diocles na wikipedii.

Úloha 3.5. Uvažujme parabolu $[t, t^2]$, bod $F = [0, a]$ a přímku $p : y = -a$, $a \in \mathbb{R}$.



Určete a tak, aby měl každý bod paraboly stejnou vzdálenost od bodu F (ohniska) a přímky p (řídící přímky) a ukažte, že tečna k parabole pólí úhel příslušných průvodičů. Parametrizujte množinu bodů, které jsou obrazem ohniska v osově souměrnosti podle všech normálových přímek paraboly.

Úloha 3.6. ** Tractrix je křivka, kterou kopíruje předmět tažený na provázku. Ve výchozí situaci se předmět nachází v bodě $[1, 0]$ a člověk v počátku, tj. v bodě $[0, 0]$. Člověk se pohybuje konstantní rychlostí podél osy y a táhne předmět na provázku délky 1. Najděte nějakou parametrizaci tractrix.