Cvičení k přednášce Geometrie 1

Řešení

Cvičení 6, verze ze dne 12. listopadu 2020

6 Křivkový integrál

Cíle cvičení a DU:

- Naučit se počítat a aplikovat křivkový integrál prvního a druhého druhu.

Příklady:

Úloha 6.1. Spočtěte délku křivky $\mathbf{c}(t) = \left[t - \sin t, 1 - \cos t, 4\cos\frac{t}{2}\right]$ na intervalu $t \in (0, 2\pi)$.

Řešení. $8\sqrt{2}$

Úloha 6.2. Spočtěte délku asteroidy $\mathbf{c}(t) = \left[a\cos^3 t, a\sin^3 t\right]$ na intervalu $t \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Řešení. $\frac{3a}{2}$

Úloha 6.3. Vypočtěte křivkový integrál 1. druhu

$$\int_{\mathbf{c}} |x| ds,$$

kde $\mathbf{c}$ je parabola $y = x^2$, $x \in (-1, 1)$.

Řešení. $\frac{1}{6}(5^{\frac{3}{2}} - 1)$

Úloha 6.4. Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu

$$\int_{\mathbf{c}} (a - y)dx + xdy,$$

kde $\mathbf{c}(t)$ je cykloida $\mathbf{c}(t) = [a(t - \sin t), a(1 - \cos t)]$, $t \in (0, 2\pi)$.

Řešení. $-4\pi a^2$

Úloha 6.5. Spočtěte křivkový integrál 2. druhu

$$\int_{\mathbf{c}} \frac{-y^2}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}} dx + \frac{x^2}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}} dy$$

kde $\mathbf{c}$ je křivka $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ od $[0, 1]$ do $[1, 0]$.

Řešení. $-\frac{3\pi}{16}$ parametrizace $\mathbf{c}(t) = [\sin^3 t, \cos^3 t]$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

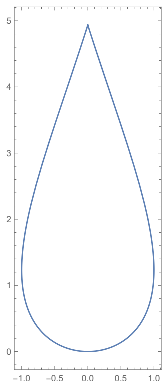
Úloha 6.6. Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál

$$\int_{\mathbf{c}} (x+y)dx - (x-y)dy,$$

kde $\mathbf{c}$ je kladně orientovaná elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0, b > 0$.

Řešení. $-2\pi ab$

Úloha 6.7. Určete obsah plochy ohraničené křivkou $\mathbf{c}(t) = \left[\sin t, \frac{t^2}{2}\right]$, kde $t \in (-\pi, \pi)$.



Řešení. 2π

Úloha 6.8. (*) Jaký obsah má plocha, kterou může spást koza přivázaná na provazu o délce L k mohutnému stromu, který má kmen o kruhovém průřezu s poloměrem a, $L < \pi a$. Místo, kde je provaz přivázaný ke stromu se nehýbe.

Řešení. $\frac{L^3}{3a} + \frac{\pi L^2}{2}$

Úloha 6.9. (*) Vyjádřete obsah pravidelného n-úhelníku, který má předepsaný obvod ℓ. Studujte jak se tento obsah chová pro $n \to \infty$.

Řešení. $A = \frac{\ell^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}$, blíží se monotonně zdola k $\frac{\ell^2}{4\pi}$.