

Asijské opce

Matyáš Gulík

11. prosince 2025

- **Exotická opce**, jejíž payoff závisí na **průměrné ceně** podkladového aktiva během daného časového období.
- Payoff asijské opce je tedy tzv. **path-dependent**.
- Na rozdíl od evropských či amerických vanilla opcí tedy nezáleží pouze na ceně v čase T (expirace).
- Obchodovány primárně na OTC trzích.

- Název je trochu matoucí – s asijskými trhy ve skutečnosti nesouvisí.
- Vymysleli ho v roce 1987 analytici z banky Bankers Trust.
- Jméno „asijské“ zvolili prostě proto, že tehdy zrovna pracovali na pobočce v Tokiu, kde vymysleli první komerčně používaný vzorec na oceňování opce spojené s průměrnou cenou ropy.
- Tato opce vznikla, protože klienti se chtěli zajistit proti manipulaci ceny ropy v den expirace.

1 Ochrana proti manipulaci:

- U evropských opcí existuje riziko manipulace ceny těsně před expirací.
- U asijské opce je podstatně těžší zmanipulovat průměr za celé období.

2 Nižší cena:

- Průměrná cena aktiva je méně volatilní → asijské opce jsou zpravidla **levnější** než standardní vanilla opce.

3 Hedging:

- Firmy nenakupují komodity nárazově v čase T , ale průběžně (např. aerolinky tankují každý den).

Způsob výpočtu průměru hraje klíčovou roli při oceňování:

Aritmetický průměr (nejčastější v praxi)

$$A(T) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i} \quad \text{resp.} \quad A(T) = \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt$$

Geometrický průměr

$$G(T) = \left(\prod_{i=1}^n S_{t_i} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{resp.} \quad G(T) = \exp \left(\frac{1}{T} \int_0^T \log S_t dt \right)$$

- Strike K je fixní. Payoff závisí na rozdílu průměrné ceny za daný časový interval a K .

- **Payoff call opce:**

$$(A(T) - K)^+ \quad \text{resp.} \quad (G(T) - K)^+$$

- **Payoff put opce:**

$$(K - A(T))^+ \quad \text{resp.} \quad (K - G(T))^+$$

- Použití: Primárně hedging (zajištění průměrné nákupní ceny), alternativně spekulace.

- Strike K není fixní, ale je roven průměrné ceně $A(T)$ resp. $G(T)$.
- Výplata závisí na rozdílu ceny podkladového aktiva v čase expirace a K .
- **Payoff call opce:**

$$(S_T - A(T))^+ \quad \text{resp.} \quad (S_T - G(T))^+$$

- **Payoff put opce:**

$$(A(T) - S_T)^+ \quad \text{resp.} \quad (G(T) - S_T)^+$$

- Použití: Zajištění, že nenakoupím draž, než byl průměr trhu.

- Nechť S_t je cena aktiva (negenerujícího příjem), která sleduje geometrický Brownův pohyb:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

- Důsledek: Aplikací Itôova lemmatu plyne, že S_t má log-normální rozdělení:

$$\log S_t \sim \mathcal{N} \left(\log S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right)$$

- Označme r bezrizikovou úrokovou míru a $\mathbb{Q}$ risk-neutrální pravděpodobnostní míru.

- Pak platí:

$$\begin{aligned}c_0 &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(S_T - K)^+] \\&= S_0 \Phi(d_1) - e^{-rT} K \Phi(d_2),\end{aligned}$$

$$\text{kde } d_1 = \frac{\log(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$\text{a } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- Cenu put opce lze pak odvodit z put-call parity:

$$\begin{aligned}p_0 &= Ke^{-rT} - S_0 + c_0 \\&= \Phi(-d_2)Ke^{-rT} - \Phi(-d_1)S_0\end{aligned}$$

- Pokud S_t sleduje geometrický Brownův pohyb, pak geometrický průměr $G(T)$ má log-normální rozdělení.
- Díky log-normalitě $G(T)$ stačí jen trochu upravit Black-Scholes vzorec:

$$\begin{aligned}C_0 &= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(G(T) - K)^+] \\&= S_0 e^{(b-r)T} \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2),\end{aligned}$$

$$\text{kde } b = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{2} \sigma_G^2 \right), \quad \sigma_G = \sigma / \sqrt{3}$$

$$\text{a } d_1 = \frac{\log(S_0/K) + (r + \sigma_G^2/2)T}{\sigma_G \sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_G \sqrt{T}$$

- Analogicky dostaneme také cenu put opce:

$$P_0 = \Phi(-d_2)Ke^{-rT} - \Phi(-d_1)S_0e^{(b-r)T}$$

- Pro tento typ opcí tedy dostáváme specifickou verzi put-call parity:

$$C_0 - P_0 = S_0e^{(b-r)T} - Ke^{-rT}$$

Problém aritmetického průměru

Suma log-normálních veličin **nemá** log-normální rozdělení

Neexistuje uzavřené analytické řešení → řešení pomocí aproximativních metod

Monte Carlo simulace:

- Generujeme tisíce trajektorií vývoje S_t za risk-neutrální míry $\mathbb{Q}$.
- Pro každou realizaci vypočítáme aritmetický průměr a payoff.
- Výslednou cenu získáme diskontováním průměrného payoffu sazbou r .

Moment matching:

- Nahradíme neznámé rozdělení veličiny $A(T)$ log-normálním rozdělením se stejnými prvními dvěma momenty.
- Hledáme parametry m a v^2 pro rozdělení $L \sim \mathcal{LN}(m, v^2)$ tak, aby platilo:

$$\mathbb{E}[A(T)] = e^{m+v^2/2},$$

$$\mathbb{E}[A(T)^2] = e^{2m+2v^2}$$

- Řešení této soustavy rovnic o dvou neznámých vede na uzavřené analytické řešení.

Letecká doprava

- Aerolinky nekupují palivo v jediný den. Spotřebovávají ho kontinuálně celý rok.
- Asijská opce (call) dobře kopíruje jejich nákladovou strukturu.
- Pokud cena ropy v průměru vzroste, opce pokryje ztrátu.

Exportéři a měnové kurzy

- Firma vyvážející zboží každý měsíc se chce zajistit proti průměrnému kurzu EUR/CZK za celý rok, ne jen k 31. prosinci.

Děkuji za pozornost.