Úloha 1. Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je číslo $n^3 - n$ dělitelné šesti

1. přímým důkazem,
2. matematickou indukcí

Úloha 2. Uvažujme tvrzení „Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí, že pokud $x^3 + 2x + 33 \neq 0$, pak $x \neq -3$.“ Formulujte k tomuto tvrzení

1. negaci,
2. obměnu implikace,
3. opačnou implikaci.

Jednotlivé výroky dokažte, popřípadě vyvraťte.

Úloha 3. Nepřímým důkazem dokažte tvrzení: nechť $k \in \mathbb{N}_0$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Pak je-li $n = 6k + r$ prvočíslo jiné než 2 a 3, musí být r rovno 1 nebo 5.

Úloha 4. Jakého typu je následující důkaz?

Věta 1. *Existuje nekonečně mnoho prvočísel.*

Důkaz. Nechť $p_1, \dots, p_n$ jsou všechna existující prvočísla. Číslo $k := p_1 p_2 \dots p_n + 1$ má alespoň jeden prvočíselný dělitel p. Toto p nemůže být ani jedním z prvočísel $p_1, \dots, p_n$, neboť pak by bylo číslo $k - p_1 p_2 \dots p_n = 1$ dělitelné p. $\square$

Úloha 5. Dokažte, že $\sqrt{3}$ je iracionální číslo.

Úloha 6. Dokažte, že pro všechna $n \geq 3$ platí, že

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

Úloha 7. Pro Fibonacciho posloupnost danou rekurentním předpisem $a_1 = a_2 = 1$ a $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí:

1. $a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$
2. $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$
3. a_{5n} je dělitelné pěti.

Úloha 8. Dokažte, že každá $(n + 1)$-prvková podmnožina množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ obsahuje alespoň jednu dvojici čísel, z nichž jedno je dělitelem druhého.

Úloha 9. Dokažte, že každá $(n + 1)$-prvková podmnožina množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ obsahuje alespoň jednu dvojici čísel, která jsou nesoudělná.

Úloha 10. S využitím Pascalova trojúhelníku (resp. příslušné identity pro kombinační čísla) dokažte, že

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$$