Součet řad $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ pro $k \in \mathbb{N}$

M. Rokyta

1.
Pro $\alpha \neq 0$ uvažujme funkci $\cosh \alpha x$ na $\langle -\pi, \pi \rangle$, rozšířenou dále periodicky s periodou 2π. Takto vytvořená funkce je sudá, spojitá a po částech hladká na $\mathbb{R}$, je tedy rovna své Fourierově řadě ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$. Speciálně je

$$\cosh \alpha x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \,, \qquad \text{pro všechna } x \in \langle -\pi, \pi \rangle \,,$$

kde[1]

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh \alpha x \cos nx = (-1)^n \frac{\sinh \alpha\pi}{\alpha\pi} \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + n^2} \,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Pro $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $\alpha \neq 0$ tedy platí

$$\cosh \alpha x = \frac{\sinh \alpha\pi}{\alpha\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + n^2} \cos nx \right) ,$$

speciálně pro $x = \pi$, po úpravě:[2]

$$\alpha\pi \operatorname{cotgh} \alpha\pi - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + n^2} \,, \qquad \alpha \neq 0. \tag{1}$$

Výraz vlevo má limitu 0 pro $\alpha \to 0$, tomto smyslu tedy rovnost (1) platí pro všechna reálná α.

2.
Ve vztahu (1) položíme $\alpha\pi = \frac{t}{2}$, upravíme

$$\operatorname{cotgh} \frac{t}{2} = \frac{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{e^t + 1}{e^t - 1} = \frac{2}{e^t - 1} + 1$$

a dostaneme

$$\frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2} \,, \quad t \in \mathbb{R} \text{ (pro } t = 0 \text{ ve smyslu limity).} \tag{2}$$

3.
Našim dlouhodobým plánem nyní bude rozvinout jak funkci $\frac{t}{e^t - 1}$ vlevo ve (2), tak funkci $\frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2}$ vpravo za znamením sumy ve (2) do příslušných Taylorových řad, dosadit tyto rozvoje do (2) a porovnat koeficienty u stejných mocnin.
Začneme funkcí $\frac{t}{e^t - 1}$. Uvažujeme-li $f(z) := \frac{z}{e^z - 1}$ jako funkci komplexní proměnné, vidíme, že má odstranitelnou singularitu v $z = 0$ a neodstranitelné singularty v bodech $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Lze ji tedy rozvinout do Taylorovy řady se středem v bodě nula, s kruhem konvergence o poloměru 2π. Tedy existují reálná čísla B_k taková, že platí

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k \,, \qquad \text{pro } |t| < 2\pi \,. \tag{3}$$

[1] Výpočet integrálu pro a_n lze snadno provést například užitím identity $4 \cosh \alpha x \cos nx = (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})(e^{inx} + e^{-inx})$.

[2] Vztah (1) mimo jiné dává vzorec pro součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2}$, který platí limitně i pro případ $\alpha = 0$, neboť, jak lze snadno ověřit, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\pi\alpha \operatorname{cotgh} \pi\alpha - 1}{2\alpha^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Čísla B_k, definovaná vztahem (3) se nazývají *Bernoulliho čísla*[3]. Spočtěme je.
Pro všechna $t \in \mathbb{R}$ (v nule ve smyslu limity) máme

$$\frac{e^t - 1}{t} = \frac{1}{t}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} - 1\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!}\,,$$

tedy

$$1 = \frac{e^t - 1}{t} \cdot \frac{t}{e^t - 1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!}\right)$$

pro $|t| < 2\pi$ a uvnitř tohoto kruhu lze uvedené (absolutně stejnoměrně) konvergující řady násobit. Když tak učiníme a porovnáme koeficienty u stejných mocnin, dostaneme:

$$\begin{aligned} 1 &= B_0 \\ 0 &= \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!\,(n-k+1)!}\,, \quad n = 1, 2 \ldots \end{aligned}$$

Po vynásobení číslem $(n+1)!$ lze druhý ze vztahů psát $0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k$, dostáváme tedy následující rekurentní formuli pro Bernoulliho čísla:

$$B_0 = 1\,, \qquad B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k\,, \quad n = 1, 2 \ldots. \tag{4}$$

Odtud lze spočítat (počítal Maple), že například:

$$\begin{gathered} B_0 = 1\,, \quad B_1 = -\frac{1}{2}\,, \quad B_2 = \frac{1}{6}\,, \quad B_3 = 0\,, \quad B_4 = -\frac{1}{30}\,, \quad B_5 = 0\,, \quad B_6 = \frac{1}{42}\,, \quad B_7 = 0\,, \\ B_8 = -\frac{1}{30}\,, \quad B_9 = 0\,, \quad B_{10} = \frac{5}{66}\,, \quad B_{11} = 0\,, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}\,, \quad B_{13} = 0\,, \quad B_{14} = \frac{7}{6}\,, \\ B_{15} = 0\,, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}\,, \quad B_{17} = 0\,, \quad B_{18} = \frac{43867}{798}\,, \quad B_{19} = 0\,, \quad B_{20} = -\frac{174611}{330}\,, \quad \ldots \end{gathered} \tag{5}$$

Nabízí se otázka, zda neplatí $B_{2k+1} = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Odpověď je kladná, neboť ze vztahu (2) plyne, že funkce $\frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2} - 1$ je sudá na $\mathbb{R}$, má tedy všechny liché derivace v nule (které jsou až na násobek rovny B_{2k+1}) nulové. Je tedy

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k}\,, \qquad |t| < 2\pi\,,$$

neboli porovnáním s (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2}\,, \qquad |t| < 2\pi\,, \tag{6}$$

kde Bernoulliho čísla[4] B_n splňují (4) resp. (5).

4.
Pokračujme v našem plánu a rozviňme funkci $\frac{2t^2}{t^2+4\pi^2 n^2}$ (pro pevné n) do Taylorovy řady se středem v nule. K tomu si stačí všimnout, že tato funkce je součtem geometrické řady:

$$\frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2} = 2\frac{\left(\frac{t}{2\pi n}\right)^2}{1 + \left(\frac{t}{2\pi n}\right)^2} = 2\Big(\frac{t}{2\pi n}\Big)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Big(\frac{t}{2\pi n}\Big)^{2k} = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \Big(\frac{t}{2\pi n}\Big)^{2k}.$$

[3] Výraz $k!$ ve jmenovateli koeficientů v rozvoji (3) je zvykem psát z historických důvodů, pravděpodobně na základě analogie s Taylorovým rozvojem funkce $\frac{e^t-1}{t}$. Poznamenejme, že existuje i jiná definice Bernoulliho čísel, viz následující poznámka pod čarou.

[4] Jiná definice Bernoulliho čísel bere v úvahu, že B_n jsou nulová pro $n > 1$, n liché. Označíme-li tato „jiná“ Bernoulliho čísla například B_n^*, platí $B_{-1}^* = B_0 = 1$, $B_0^* = |B_1| = 1/2$, $B_n^* = |B_{2n}|$. Je tedy $B_n^* > 0$ pro všechna n. Hovoří-li se o Bernoulliho číslech, je vždy potřeba dát pozor na to, má-li autor na mysli (v našem označení) čísla B_n či B_n^*.

Pro $|t| < 2\pi$ je kvocient výše uvedené geometrické řady v absolutní hodnotě menší než 1, a to pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, tedy lze předchozí rovnost dosadit do (6) a dostat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\, t^{2k} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi n)^{2k}}\, t^{2k}\,, \qquad |t| < 2\pi\,. \tag{7}$$

5.

V dvojné řadě vpravo v (7) chceme zaměnit pořadí sčítání, abychom mohli porovnat koeficienty u t^{2k}. To lze, pokud dvojná řada vpravo konverguje absolutně (záměna pořadí při sčítání je přerovnání řady). Je však (opět sečteme geometrickou řadu):

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|t|}{2\pi n} \right)^{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t^2}{4\pi^2 n^2 - t^2} < +\infty \text{ pro každé } |t| < 2\pi.$$

Lze tedy vpravo v (7) zaměnit pořadí sčítání, což po úpravě dává

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\, t^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) t^{2k}\,, \qquad |t| < 2\pi\,,$$

odkud z jednoznačnosti Taylorova rozvoje plyne

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}\, 2^{2k-1}\, B_{2k}}{(2k)!}\, \pi^{2k}\,, \tag{8}$$

což jsme chtěli spočítat.

6.

Ze vztahu (8) lze vypozorovat následující:

- Z definice Bernoulliho čísel plyne, že $B_n \in \mathbb{Q}$ pro všechna $n = 0, 1, 2 \ldots$. Tedy existují $r_k \in \mathbb{Q}$ taková, že $\zeta(2k) = r_k \pi^{2k}$. Odsud plyne, že všechny hodnoty $\zeta(2k)$ jsou transcendentní. S využitím (5) je možno spočíst například

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= \frac{1}{6}\pi^2 \\
\zeta(4) &= \frac{1}{90}\pi^4 \\
\zeta(6) &= \frac{1}{945}\pi^6 \\
\zeta(8) &= \frac{1}{9\,450}\pi^8 \\
\zeta(10) &= \frac{1}{93\,555}\pi^{10} \\
\zeta(12) &= \frac{691}{638\,512\,875}\pi^{12} \\
\zeta(14) &= \frac{2}{18\,243\,225}\pi^{14} \\
\zeta(16) &= \frac{3\,617}{325\,641\,566\,250}\pi^{16} \\
\zeta(18) &= \frac{43\,867}{38\,979\,295\,480\,125}\pi^{18} \\
\zeta(20) &= \frac{174\,611}{1\,531\,329\,465\,290\,625}\pi^{20} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- Protože $\zeta(2k) > 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, plyne z (8), že $|B_{2k}| = (-1)^{k-1} B_{2k}$, a tedy Bernoulliho čísla se sudým indexem pravidelně střídají znaménka. (Tuto hypotézu jsme mohli vyslovit už za vztahem (5)).