Poznámka k zavedení exponenciály

Mirko Rokyta

1 Úvod

Následující řádky jsou především určeny vysokoškolským pedagogům–přednášejícím matematické analýzy. Autor je sepsal v dobré víře, že zkušený pedagog sám posoudí, nakolik se jimi nechá ovlivnit při koncipování své přednášky. Autor zároveň spatřuje výhodu předkládaného postupu v tom, že umožňuje zavést reálnou exponenciálu rigorózně již velmi brzo v kurzu matematické analýzy. Výhodou je pak možnost používat funkce „exp“, „log“ („ln“), „obecná mocnina“ apod. v raných cvičeních z MA či při ilustrování základních probíraných vlastností reálných funkcí. Tento text vznikl pro účely dvou autorem přednesených přednášek (viz Acknowledgement v závěru příspěvku), a to na základě konzultací [1] a poznámek k přednáškám [2]. Poté autor nalezl stejný či velmi podobný způsob zavedení exponenciály též v učebním textu [4].

Pro předkládaný postup jsou kromě základních vlastností reálných čísel[1] nezbytné následující znalosti:

1. Limita posloupnosti reálných čísel a její základní vlastnosti, zejména: nerovnosti mezi limitami; monotónní a (z příslušné strany) omezená posloupnost má vlastní limitu. Dále, pokud existují $\lim a_n = \lim b_n =: A \in \mathbb{R}$ a navíc existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $a_n \leq c_n \leq b_n$, existuje i $\lim c_n$ a je rovna A.

2. Pro $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, platí

$$\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_n \leq \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n}\right)^n \qquad \textit{(A-G nerovnost)}. \tag{1}$$

3. Pro $x \geq -1$ a $n \in \mathbb{N}$ platí[2]

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \textit{(Bernoulliho nerovnost)}. \tag{2}$$

2 Reálná exponenciála

Tvrzení následujícího lemmatu lze mít předem připraveno, například jako cvičení v rámci studia limit posloupností.

Lemma 2.1 *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.*

Důkaz. Uvažujme $x \in \mathbb{R}$ pevné a označme $a_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Zvolme dále $k \in \mathbb{N}$, $k > |x|$. Ukážeme, že pro $n \geq k$ je a_n neklesající a shora omezená posloupnost.

---

[1] Například je nutno si uvědomit, že $0 < a < b$ implikuje $a^n < b^n$ pro všechna přirozená n. Lze to zmínit už při studiu uspořádání reálných čísel resp. „přenásobení nerovnosti kladným číslem“: $0 < a < b \Rightarrow a^2 < ba < b^2$ a dále indukcí. Zde budeme tento fakt využívat jak při důkazu Lemmatu 2.1, tak v (6).

[2] Bernoulliho nerovnost ve skutečnosti platí pro $x \geq -2$ a $n \in \mathbb{N}$, viz např. [3].

- Pro každé přirozené $n \geq k$ platí $1 + \frac{x}{n} > 0$. Z (1) plyne pro tato n

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot 1 \leq \left(\frac{n\left(1 + \frac{x}{n}\right) + 1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1},$$

tedy $a_n \leq a_{n+1}$ pro všechna $n \geq k$.

- Z Bernoulliho nerovnosti (2) a s ohledem na volbu (pevného) $x \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$, $k > |x|$, dostaneme pro všechna přirozená n:

$$\left(1 + \frac{x}{nk}\right)^{-n} = \left(1 - \frac{x}{nk + x}\right)^n \geq 1 - \frac{nx}{nk + x} \geq 1 - \frac{x}{k} > 0\,.$$

Odtud po umocnění dostaneme $\left(1 + \frac{x}{nk}\right)^{-nk} \geq \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k > 0$, což po úpravě dává

$$\left(1 + \frac{x}{nk}\right)^{nk} \leq \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{-k} =: C > 0\,.$$

Tedy je $a_{nk} \leq C$ pro pevné $k \in \mathbb{N}$, $k > |x|$ a pro všechna přirozená n. To spolu s monotonií posloupnosti a_n dává její omezenost.

$\square$

Hlavním výsledkem tohoto příspěvku je následující věta.

Věta 2.2 *Existuje jediná funkce* exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující*

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)\,, \tag{3}$$

$$\exp(x) \geq 1 + x \tag{4}$$

pro všechna reálná x, y.

Důkaz.
• *Jednoznačnost.* Předpokládejme, že funkce uvedených vlastností existuje. Položíme-li $x = y = 0$ v (3), dostaneme $\exp(0) = (\exp(0))^2$, tedy $\exp(0)$ je 0 nebo 1. První možnost je však ve sporu s (4), a proto $\exp(0) = 1$. S využitím této znalosti dále z (3) dostaneme, že pro všechna reálná x platí $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$. Odtud jednak vidíme, že $\exp \neq 0$ na $\mathbb{R}$, jednak

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,. \tag{5}$$

Nyní pro pevné $x \in \mathbb{R}$ volme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $k > |x|$. Potom pro všechna $n \geq k$ máme postupně podle (4) a (3):

$$0 < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(\exp \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = \exp(x)\,. \tag{6}$$

Odtud mimo jiné vidíme, že dokonce $\exp(x) > 0$ pro $x \in \mathbb{R}$. Navíc dosazením $(-x)$ za x v předešlém vztahu dostaneme s využitím (5):

$$0 < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}\,, \tag{7}$$

tedy celkově z (6), (7):

$$0 < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le \exp(x) \le \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}, \tag{8}$$

neboli

$$1 \le \frac{\exp(x)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \le \frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}. \tag{9}$$

Výraz ve jmenovateli zlomku vpravo odhadneme pomocí Bernoulliho nerovnosti: $1 \ge \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \ge 1-\frac{x^2}{n}$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1$. Z (9) pak plyne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(x)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = 1, \tag{10}$$

odkud ihned dostaneme

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \tag{11}$$

Z předpokladu existence funkce exp daných vlastností jsme odvodili její vyjádření pomocí (11), taková funkce tedy existuje nejvýše jedna. Všimněte si, že jsme v této chvíli nepotřebovali výrok o existenci limity vpravo v (11), tento fakt je důsledkem (10) a předpokladu, že existuje funkce s vlastnostmi (3)–(4).

• *Existence.* Lemma 2.1 ukazuje, že funkce definovaná limitou (11) je dobře definovaná reálná funkce pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Definujme tedy

$$\exp(x) := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

a ukažme, že tato funkce splňuje (3)–(4).

Především je pro každé pevné $x \in \mathbb{R}$ a pro všechna přirozená $n > |x|$, podle (2),

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \ge 1+x.$$

Limitní přechod pro $n \to \infty$ ukazuje, že vlastnost (4) je splněna.

Buďte nyní $x, y \in \mathbb{R}$ libovolná pevně zvolená reálná čísla a $n > \max(|x|, |y|)$. Pak podle A-G nerovnosti (1) máme

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \le \left(\frac{n\left(1+\frac{x}{n}\right)+n\left(1+\frac{y}{n}\right)}{2n}\right)^n = \left(1+\frac{x+y}{2n}\right)^{2n}.$$

Limitní přechod pro $n \to \infty$ pak dá

$$\exp(x)\cdot\exp(y) \le \exp(x+y), \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Na druhou stranu, A-G nerovnost (1) dává i (opět pro pevná $x, y \in \mathbb{R}$ a dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$),

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x+y}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{xy}{n}\right) \le \left(\frac{n-1+x+y+1+\frac{xy}{n}}{n}\right)^n &= \left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n,\end{aligned}$$

odkud po $n \to \infty$ dostaneme

$$\exp(x+y) \le \exp(x)\cdot\exp(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Z nerovností (13), (14) plyne (3) a důkaz je dokončen. $\square$

Poznámka 2.3 Monotonii posloupnosti $a_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ lze dokázat (poněkud pracněji ovšem) i bez využití A-G nerovnosti. Podíl a_{n+1}/a_n upravíme do tvaru $c_n(1 + b_n)^n$ a použijeme Bernoulliho nerovnost. Podrobnosti ponecháváme čtenáři.

Poznámka 2.4 Základní vlastnosti funkce exp lze odvozovat postupně, například ve chvíli, kdy je definována spojitost, lze ukázat jako příklad spojitost funkce exp, atd. Vlastnosti exponenciály lze rovněž zadávat jako cvičení s nápovědou. Zkušený čtenář sám jistě nahlédne, jakou konkrétní vědomost potřebuje k důkazu té které vlastnosti:

1. $\exp(0) = 1$; $\exp(x) > 0$, $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$: důkazy těchto tvrzení lze nalézt v důkazu předchozí věty.

2. Bylo-li již definováno (nebo chceme-li nyní definovat) číslo e jako $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$, vyplývá z (11) ihned, že $\exp(1) = e$. Jinak definujeme $e := \exp(1)$.

3. Pro $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ je $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ (plyne ihned z (3)), $\exp(x/n) = (\exp(x))^{1/n}$ (viz rovnosti v (6)).

4. exp je rostoucí a tedy prostá na $\mathbb{R}$: z (4) plyne, že $\exp(x) > 1$ pro $x > 0$. Tedy pro libovolná reálná $x > y$ je $\exp(x - y) = \exp(x)/\exp(y) > 1$. Odtud $\exp(x) > \exp(y)$, neboť exp je kladná funkce.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ (plyne ihned z (4)); $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ (neboť (5) implikuje $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \exp(-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1/\exp(x) = 0$). Celkem tedy exp zobrazuje prostě $\mathbb{R}$ na $(0, +\infty)$.

6. Platí tzv. základní limita pro exponenciálu: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$: podle (4) máme $\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x) \geq 1 - x$, a tedy pro $x < 1$ platí $\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$. Spolu s nerovností (4) máme tedy

$$1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}\,, \qquad \text{pro } x < 1\,,$$

   odkud snadno odvodíme

$$1 \leq \frac{\exp(x) - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x}\,, \qquad \text{pro } x \in (0, 1)\,.$$

   resp.

$$1 \geq \frac{\exp(x) - 1}{x} \geq \frac{1}{1-x}\,, \qquad \text{pro } x < 0\,.$$

   Limitními přechody $x \to 0\pm$ dostaneme požadované tvrzení.

7. Funkce exp je spojitá v $\mathbb{R}$:

$$\lim_{y\to x}(\exp(y) - \exp(x)) = \lim_{y\to x} \exp(x)\, \frac{\exp(y - x) - 1}{y - x}(y - x) = 0$$

   kde v limitě zlomku využíváme jak základní limitu pro exponenciálu, tak větu o limitě složené funkce (s využitím prostoty vnitřní funkce). Tedy platí $\lim\limits_{y\to x} \exp(y) = \exp(x)$, což bylo dokázat.

8. $\exp'(x) = \exp(x)$ a tedy $\exp^{(n)}(x) = \exp(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$:

$$\exp'(x) = \lim_{y\to x} \frac{\exp(y) - \exp(x)}{y - x} = \exp(x) \lim_{y\to x} \frac{\exp(y - x) - 1}{y - x} = \exp(x)\,,$$

   opět s využitím základní limity pro exponenciálu a podle věty o limitě složené funkce.

Poznámka 2.5 Ve chvíli, kdy jsou studenti obeznámeni s absolutní konvergencí resp. násobením řad, lze definovat

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

(a) Standardně se ukáže, že $E(x)$ je korektně definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a že

$$E(x+y) = E(x) \cdot E(y) \qquad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

(b) Přímo z (15) plyne $E(x) > 0$ pro $x > 0$, dosazením do (15) máme také ihned $E(0) = 1$. Podle (16) máme tedy i $E(-x) \cdot E(x) = 1$ odkud plyne $E(-x) > 0$ pro $x > 0$. Je tedy $E(x) > 0$ pro všechna reálná x. Nyní

- Pro $x = 0$ je $E(0) = 1 = 1 + 0$.
- Pro $x > 0$ je $E(x) - 1 - x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 0$ a tedy $E(x) > 1 + x$.
- Pro $x > 0$ máme rovněž $1 - E(x)(1-x) = x^2(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}) + x^3(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}) + \cdots > 0$ odkud přenásobením této nerovnosti hodnotou $E(-x)$ dostaneme $E(-x) > 1 - x$ pro $x > 0$, což je $E(x) > 1 + x$ pro $x < 0$. Celkem tedy
$$E(x) \geq 1 + x \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Z jednoznačnosti (viz Věta 2.2) tedy nutně plyne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

3 Exponenciála a binomická (resp. multinomická) věta

Je-li exponenciála definována pomocí řady (15), hraje při důkazu součtového vzorce (3) (resp. (16)) zásadní roli binomická formule. Konkrétně, pro pevná x, $y \in \mathbb{R}$ dostaneme vynásobením (absolutně konvergentních) řad

$$\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}}_{=:\alpha_n}, \tag{19}$$

zatímco

$$\mathrm{e}^{x+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}. \tag{20}$$

Z binomické věty dostaneme pro členy za znamením sumy v (20)

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \alpha_n, \tag{21}$$

čímž je součtový vzorec $\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$ dokázán. Na celý postup lze však pohlížet také takto: vycházíme-li z platnosti rovnosti $\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$, je rovnost obou krajních členů v (21) důkazem binomické věty.

Na základě tohoto přístupu není těžké odvodit tzv. multinomickou větu, neboli vzorec pro umocnění součtu k reálných čísel na n-tou, $n \in \mathbb{N}$. Vyjdeme přitom ze vztahu

$$\mathrm{e}^{x_1} \cdot \mathrm{e}^{x_2} \cdots \mathrm{e}^{x_k} = \mathrm{e}^{x_1+x_2+\cdots+x_k}\,, \qquad x_j \in \mathbb{R}\,, \tag{22}$$

který plyne indukcí z (3) (resp. (16)). Zatímco pravá strana je rovna

$$\mathrm{e}^{x_1+x_2+\cdots+x_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n}{n!}\,, \tag{23}$$

dostaneme na levé straně násobením (rozmyslete si pečlivě druhou z rovností)

$$\mathrm{e}^{x_1} \cdot \mathrm{e}^{x_2} \cdots \mathrm{e}^{x_k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_2^n}{n!}\right) \cdots \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_k^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_k=n \\ \alpha_j \in \mathbb{N}\cup\{0\}}} \frac{x_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \cdot \frac{x_2^{\alpha_2}}{\alpha_2!} \cdots \frac{x_k^{\alpha_k}}{\alpha_k!}\,. \tag{24}$$

Porovnáním (23) a (24) dostaneme

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_k=n \\ \alpha_j \in \mathbb{N}\cup\{0\}}} \frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}\,, \tag{25}$$

což je hledané tvrzení multinomické věty.

Cvičení 3.1 *Ukažte s použitím (25), že*

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\,, \\ (x+y+z)^3 &= x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x+3z^2y+6xyz\,. \end{aligned}$$

4 Acknowledgement

Tento text (tj. jeho první i druhá verze) vznikl jako důsledek dvou autorem přednesených příspěvků, a sice přednášky v rámci semináře k životnímu jubileu prof. I. Černého „Výuka matematiky na VŠ“, Liberec, 19.–20.11.2004, a přednášky na semináři „OSMA“ (Občasný seminář z matematické analýzy), VŠB-TU Ostrava, 29.3.2011.

Reference

[1] J. Malý, L. Pick: Personal communication, 2003.

[2] L. Pick: Poznámky k přednášce MA pro Informatiky, rukopis, 2003.

[3] M. Rokyta: Bernoulliova nerovnost pro $x < -1$. *Rozhledy Mat.-Fyz.* **2-3/00** (2000), 49–56. (Přetištěno také v *Informace MVS*, **55** (2000), 15–22.)

[4] J. Veselý: *Základy matematické analýzy I*, skriptum MFF UK, Matfyzpres, 2004.

Doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc.
Katedra matematické analýzy MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`mirko.rokyta@mff.cuni.cz`