Dirichletova úloha pro Laplace-Poissonovu rovnici.

• Úloha $\Delta u = 0$ na horní polorovině, s daty $u(x,0) = \delta_x$:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\,.$$

• Úloha $\Delta u = 0$ na horní polorovině, s daty $u(x,0) = g$:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \underset{x}{\star} g \qquad \cdots = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\, g(\eta)}{(x-\eta)^2+y^2}\, d\eta\,.$$

• Úloha na jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$: konformním zobrazením převést na předchozí úlohu. Je-li $f : \Omega \to$horní polorovina, $f : (x,y) \to (\xi,\eta)$, pak $\xi = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $\eta = \operatorname{Im} f(x+iy)$ jsou vzorce pro zpětný přechod k souřadnicím x, y.

• Úloha $\Delta u = 0$ na mezikruží $K_{a,b} \subset \mathbb{R}^2$:

$$u(x) = v(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln\frac{1}{r} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \Big(A_n r^{|n|} + B_n r^{-|n|}\Big) e^{in\varphi}\,.$$

Požadujeme-li navíc $u = g_a$ na ∂K_a, $u = g_b$ na ∂K_b, lze koeficienty A_n, B_n dopočítat porovnáním s Fourierovými rozvoji hraničních funkcí:

$$g_a(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\varphi}\,, \qquad g_b(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{in\varphi}\,.$$

• Úloha $\Delta u = 0$ na kruhu $K_b \subset \mathbb{R}^2$, za podmínky $u = g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{in\varphi}$ na hranici kruhu:

$$\begin{aligned} u(x) = v(r,\varphi) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \left(\frac{r}{b}\right)^{|n|} e^{in\varphi}\,, \qquad 0 \le r < b\,,\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\alpha)\frac{b^2-r^2}{b^2 - 2br\cos(\varphi-\alpha) + r^2}\, d\alpha\,, \qquad 0 \le r < b\,. \end{aligned}$$

• Úloha $\Delta u = 0$ na vnějšku kruhu $K_a \subset \mathbb{R}^2$, za podmínky $u = g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\varphi}$ na hranici kruhu:

$$\begin{aligned} u(x) = v(r,\varphi) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \left(\frac{a}{r}\right)^{|n|} e^{in\varphi}\,, \qquad r > a\,,\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\alpha)\frac{r^2-a^2}{a^2 - 2ar\cos(\varphi-\alpha) + r^2}\, d\alpha\,, \qquad r > a\,. \end{aligned}$$

• Dirichletova úloha $\Delta u = 0$ na kouli $K_R \subset \mathbb{R}^m$, $u|_{\partial K_R} = g$:

$$u(x) = \frac{1}{R\,\varkappa_m}\int_{S_R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^m}\, g(y)\, dS(y)\,, \qquad |x| < R\,.$$

• Dirichletova úloha $\Delta u = 0$ na vnějšku koule $K_R \subset \mathbb{R}^m$, $u|_{\partial K_R} = g$:

$$u(x) = \frac{1}{R\,\varkappa_m}\int_{S_R} \frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^m}\, g(y)\, dS(y)\,, \qquad |x| > R\,.$$