Základní operace s distribucemi.

• Zacházení s multiindexem $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_i \in \{0, 1, \dots\}$:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}\,.$$

• Distribuce ($\varphi, \varphi_n \in \mathcal{S}$, $T_1, T_2 \in \mathcal{S}'$):

$$\begin{aligned}
\text{Spojitost:}\quad & \varphi_n \to 0 \quad \Longrightarrow \quad T(\varphi_n) \to 0\,,\\
\text{Linearita:}\quad & T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi)\,,\\
\text{Rovnost:}\quad & T_1 = T_2 \quad \Longleftrightarrow \quad T_1(\varphi) = T_2(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}\,,\\
\text{Derivování:}\quad & D^\alpha T(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi)\,,\\
\text{Násobení funkcí:}\quad & fT(\varphi) := T(f\varphi) \quad \forall f \in C^\infty, \quad f \text{ pomalu rostoucí}\,,\\
\text{Lineární transformace:}\quad & \widetilde{A}T(\varphi(x)) = |\det A|\, T\big(\varphi(Ax)\big) \quad A \text{ regulární matice}\,,\\
\text{Parametrické distribuce:}\quad & \underset{x}{\mathrm{T}}(\varphi(x,y)) = \text{funkce proměnné } y\,,\\
\text{Konvergence distribucí:}\quad & T_n \to T \quad \Longleftrightarrow \quad T_n(\varphi) \to T(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}\,,\\
\dots\ \text{a platí:}\quad & \qquad T_n \to T \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{T}_n \to \widehat{T}\,,\\
& \qquad T_n \to T \quad \Longrightarrow \quad D^\alpha T_n \to D^\alpha T\,.
\end{aligned}$$

Laplaceův operátor pro radiálně symetrické funkce.

• Funkce $f(x) = R(r)$, v dimenzi m:

$$\Delta f(x) = R''(r) + \frac{m-1}{r} R'(r)\,, \qquad r > 0,\ \text{bodově.}$$

Navíc pokud existuje $\lim_{r\to 0+} r^{m-1} R'(r) = A$ (a pokud R, R', R'' jsou spojité a pomalu rostoucí), tak

$$\Delta f(x) = R''(r) + \frac{m-1}{r} R'(r) + A\varkappa_m \delta \quad \text{ve smyslu distribucí.}$$

Řešení $-\Delta u = \delta$ v $\mathcal{S}'$:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}\,, \qquad m = 2\,,\\
u &= \frac{1}{(m-2)\varkappa_m\, |x|^{m-2}}\,, \qquad m > 2\,.
\end{aligned}$$

Tenzorový součin a konvoluce.

• Tenzorový součin funkcí $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^k)$, resp. distribucí $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$:

$$\Big(f \otimes g\Big)(x,y) := f(x)\, g(y)\,, \qquad \Big(S \otimes T\Big)(\varphi) := \underset{x}{\mathrm{S}}(\underset{y}{\mathrm{T}}(\varphi(x,y)))\,.$$

Potom

$$\widehat{f \otimes g}(\xi, \eta) = \widehat{f}(\xi) \otimes \widehat{g}(\eta)\,, \qquad \widehat{S \otimes T} = \widehat{S} \otimes \widehat{T}\,.$$

• Konvoluce funkcí $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$ a distribucí $S \in \mathcal{S}'$, $T \in \mathcal{S}'_K$:

$$\Big(f \star g\Big)(x) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)\, g(y)\, dy\,, \qquad \Big(S \star T\Big)(\varphi) := \underset{x}{\mathrm{S}}(\underset{y}{\mathrm{T}}(\varphi(x+y)))\,.$$

Poznámka: existuje dlouhý seznam případů, za kterých lze konvoluci definovat, například jsou-li obě distribuce z Laplacovského prostoru L'_+ (viz dále), atd.
• Některé vlastnosti konvoluce ($S \in \mathcal{S}'_K$, $T \in \mathcal{S}'$):

$$\delta \star T = T\,, \qquad (D^\alpha \delta) \star T = D^\alpha T\,, \qquad (D^\alpha S) \star T = D^\alpha (S \star T) = S \star (D^\alpha T)\,.$$

• Periodické distribuce: Pro $T \in \mathcal{S}'_K$ a vzorkovací distribuci $\delta_\Sigma := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$ platí

$$T \star \delta_\Sigma = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{T}(n) e^{2\pi i n x}\,.$$

• Fourier a konvoluce: Pro $S \in \mathcal{S}'_K$, $T \in \mathcal{S}'$ platí

$$\widehat{S \star T} = \widehat{S}\, \widehat{T}\,.$$

• Laplace a konvoluce: Pro $T_1, T_2 \in L'_+$ definujeme $(T_1 \star T_2)(\varphi) := T_2(T_1(\varphi(t_1+t_2)))$ (kde distribuce T_i působí přes proměnnou t_i). Pak platí $T_1 \star T_2 \in L'_+$, a:

$$\mathcal{L}(T_1 \star T_2) = \mathcal{L}T_1 \cdot \mathcal{L}T_2\,.$$