Rovnice vedení tepla.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f\,, \qquad x \in \mathbb{R}^m\,,\ t > 0\,,$$
$$u|_{t=0} = g\,.$$

• Greenova funkce (elementární řešení, klademe formálně $f = 0$, $g = \delta$):

$$\widehat{G}(\xi, t) = e^{-4\pi^2 a^2 |\xi|^2 t}\,, \qquad G(x,t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}\,.$$

• Řešení na celém prostoru (jsou-li f, g distribuce, resp. integrovatelné funkce):

$$u = G \underset{x}{\star} g + G \underset{x,t}{\star} f\,,$$
$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^m} g(y)\, G(x-y,t)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} f(y,\tau)\, G(x-y, t-\tau)\, dy\, d\tau\,.$$

• Úloha na polopřímce, kdy $u(0+,t) = 0$: liché rozšíření funkce g; úloha na polopřímce, kdy $\partial_x u(0+,t) = 0$: sudé rozšíření funkce g.
• Úloha na polopřímce $\{x > 0, t > 0\}$ s proměnnou okrajovou podmínkou $u(0+,t) = h(t)$, a pro $f = 0$, $g = 0$:

$$u(x,t) = h(t) \underset{t}{\star} \Big(-2a^2\, \partial_x G(x,t) \Big)\,.$$

• Úloha na omezeném intervalu ve tvaru Fourierovy řady: je-li $g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{2\pi i n x}$ na $\mathbb{R}$, a tedy $b_n = \widehat{g}(n)$, platí

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{-4\pi^2 a^2 n^2 t} e^{2\pi i n x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(n)\, \widehat{G}(n,t)\, e^{2\pi i n x}\,.$$

Zde tedy $b_n = \widehat{g}(n)$, $e^{-4\pi^2 a^2 n^2 t} = \widehat{G}(n,t)$, a $g = \widetilde{g} \star \delta_\Sigma$ je distributivní periodizací základní distribuce s kompaktním nosičem $\widetilde{g} \in \mathcal{S}'_K$.

Vlnová rovnice.

$$\Box_c u \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f\,, \qquad x \in \mathbb{R}^m\,,\ t > 0\,,$$
$$u|_{t=0} = g_0\,,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g_1\,.$$

• Elementární řešení (Greenova funkce, klademe formálně $f = 0$, $g_0 = 0$, $g_1 = \delta$):

$$\widehat{E}(\xi, t) = \frac{\sin(2\pi c|\xi| t)}{2\pi c|\xi|}\,.$$

• Řešení na celém prostoru, obecně:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(E \underset{x}{\star} g_0 \Big) + (E \underset{x}{\star} g_1) + \Big(c^2\, Y(t)\, E \underset{x,t}{\star} f \Big)$$

Dimenze	Data	Elementární řešení	Řešení s daty
m=1:	g_0	$\frac{1}{2}(\delta_{ct}+\delta_{-ct})$	$\frac{1}{2}\Big(g_0(x-ct)+g_0(x+ct)\Big)$
	g_1	$\frac{1}{2c}\chi_{\langle -ct,ct\rangle}$	$\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g_1(y)\,dy$
	f	$\frac{c}{2}Y(t)\chi_{\langle -ct,ct\rangle}$	$\frac{c}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\,d\tau$
m=2:	g_0	$\frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{\sqrt{c^2t^2-x^2}}\Big)_+$	$\frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\lvert y\rvert\le ct}\frac{g_0(x-y)}{\sqrt{c^2t^2-y^2}}\,dy$
	g_1	$\frac{1}{2\pi c}\Big(\frac{1}{\sqrt{c^2t^2-x^2}}\Big)_+$	$\frac{1}{2\pi c}\int\limits_{\lvert y\rvert\le ct}\frac{g_1(x-y)}{\sqrt{c^2t^2-y^2}}\,dy$
	f	$\frac{c}{2\pi}Y(t)\Big(\frac{1}{\sqrt{c^2t^2-x^2}}\Big)_+$	$\frac{c}{2\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{\lvert y\rvert\le c\tau}\frac{f(x-y,t-\tau)}{\sqrt{c^2\tau^2-y^2}}\,dy\,d\tau$
m=3:	g_0	$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi c^2t}\nu_{ct}\Big)$ $=\frac{1}{4\pi ct}\Big(\frac{1}{ct}\nu_{ct}+\nu_{ct}^{(1)}\Big)$	$\frac{1}{4\pi ct}\int\limits_{S_{ct}}\Big(\frac{g_0}{ct}+\frac{\partial g_0}{\partial n}\Big)(x-y)\,dS(y)$
	g_1	$\frac{1}{4\pi c^2t}\nu_{ct}$	$\frac{1}{4\pi c^2t}\int\limits_{S_{ct}} g_1(x-y)\,dS(y)$
	f	$\frac{1}{4\pi t}Y(t)\nu_{ct}$	$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{f\Big(x-y,t-\frac{\lvert y\rvert}{c}\Big)}{\lvert y\rvert}\,dy$

... symbol $(\dots)_+$ znamená, že daná funkce je (pře)definovaná nulou tam, kde by nebyla definovaná, nebo tam, kde by byla záporná.