Laplaceova transformace.

• Pro funkce z prostoru

$$L_+ = \{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}), \operatorname{supp} f \subset \langle 0, +\infty), \exists A\, \exists c_f\, \exists t_0\,, |f(t)| \le A e^{c_f t}\ \ \forall t > t_0\}$$

definujeme

$$F(p) \equiv \mathcal{L}f(p) := \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt \qquad \text{pro } p \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} p > c_f\,.$$

Laplaceova transformace funkcí z L_+ splňuje $F \in \mathcal{H}(\operatorname{Re} p > c_f)$, $\lim_{a\to\pm\infty} F(a+bi) = 0$, $\lim_{b\to+\infty} F(a+bi) = 0$. Ty z F, které mají v nekonečnu předepsané klesání, umíme i invertovat:

$$\left.\begin{array}{r} \exists\, c_f, A, R > 0\,, \quad F \in \mathcal{H}(\operatorname{Re} p > c_f)\,, \\ |F(p)| \le \frac{A}{|p|^2} \ \text{ pro } \operatorname{Re} p > c_f,\ |p| > R \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, f \in L_+\,,\ \ F = \mathcal{L}f$$

a platí

$$(\mathcal{L}^{-1}F)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp\,.$$

Pokud navíc F je holomorfně rozšiřitelná na $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$, tak, že pro $a > c_f$ platí

$$\lim_{R\to\infty} \max_{\substack{|p|=R,\\ \operatorname{Re} p < a}} |F(p)| = 0\,,$$

tak

$$(\mathcal{L}^{-1}F)(t) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_j} F(p) e^{pt}\,.$$

Tentýž residuový vzoreček platí i pro $F(p) = P(p)/Q(p)$, kde P, Q jsou polynomy, přičemž $\operatorname{st}(P) < \operatorname{st}(Q)$.

• Pro distribuce z prostoru

$$L'_+ = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})\,,\ \operatorname{supp} T \subset \langle 0, +\infty)\,,\ \exists \sigma_1 > 0\,, e^{-\sigma_1 t} T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})\}$$

definujeme

$$\mathcal{L}T(p) := \underset{t}{\mathrm{T}}(e^{-pt}) \qquad \text{pro } p \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} p > \sigma_1\,.$$

Umíme přesně charakterizovat ty funkce, které jsou Laplaceovým obrazem distribucí z L'_+:

$$\left.\begin{array}{r} \exists\, \sigma_0, c, \alpha, R > 0\,, \quad F \in \mathcal{H}(\operatorname{Re} p > \sigma_0)\,, \\ |F(p)| \le c|p|^\alpha \ \text{ pro } \operatorname{Re} p > \sigma_0,\ |p| > R \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \exists\, T \in L'_+\,,\ \ F = \mathcal{L}T\,.$$

Potom platí:

$$(\mathcal{L}^{-1}F)(t) = \frac{\mathbf{d}^k}{\mathbf{d}t^k} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(p)}{p^k}\right)(t)\,,$$

kde k je voleno tak, aby $F(p)/p^k$ bylo Laplaceovsky invertovatelné do prostoru funkcí L_+, a kde $\frac{\mathbf{d}^k}{\mathbf{d}t^k}$ je derivace ve smyslu distribucí.

• Některé Laplaceovy transformace:

$\mathcal{L}(x^\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$c_f = 0$	$\alpha > -1$
$\mathcal{L}(x^n) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$c_f = 0$	$n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}(e^{\alpha x}) = \dfrac{1}{p-\alpha}$	$c_f = \mathrm{Re}\ \alpha$	$\alpha \in \mathbb{C}$
$\mathcal{L}(\sin(\alpha x)) = \dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$	$c_f = \lvert\mathrm{Im}\ \alpha\rvert$	$\alpha \in \mathbb{C}$
$\mathcal{L}(\cos(\alpha x)) = \dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$	$c_f = \lvert\mathrm{Im}\ \alpha\rvert$	$\alpha \in \mathbb{C}$
$\mathcal{L}(\sinh(\alpha x)) = \dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$c_f = \mathrm{Re}\ \alpha$	$\alpha \in \mathbb{C}$
$\mathcal{L}(\cosh(\alpha x)) = \dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$	$c_f = \mathrm{Re}\ \alpha$	$\alpha \in \mathbb{C}$
$\mathcal{L}(x^n e^{\alpha x}) = \dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$c_f = \mathrm{Re}\ \alpha$	$\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}(x^n \sin(\alpha x)) = n! \dfrac{\mathrm{Im}\,(p+i\alpha)^{n+1}}{(p^2+\alpha^2)^{n+1}}$	$c_f = \lvert\mathrm{Im}\ \alpha\rvert$	$\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}(x^n \cos(\alpha x)) = n! \dfrac{\mathrm{Re}\,(p+i\alpha)^{n+1}}{(p^2+\alpha^2)^{n+1}}$	$c_f = \lvert\mathrm{Im}\ \alpha\rvert$	$\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}(e^{\lambda x} \sin(\alpha x)) = \dfrac{\alpha}{(p-\lambda)^2+\alpha^2}$	$c_f = \mathrm{Re}\ \lambda + \lvert\mathrm{Im}\ \alpha\rvert$	$\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$
$\mathcal{L}(e^{\lambda x} \cos(\alpha x)) = \dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\alpha^2}$	$c_f = \mathrm{Re}\ \lambda + \lvert\mathrm{Im}\ \alpha\rvert$	$\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$
$\mathcal{L}(J_n(at)) = \dfrac{a^n}{\sqrt{p^2+a^2}(p+\sqrt{p^2+a^2})^n}$		$a > 0, n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}(\delta^{(n)}) = p^n$		

• Laplace a derivace (první vzorec platí, pokud $f, f', \dots, f^{(n)} \in L_+$, a existují-li $f(0+)$, ... , $f^{(n-1)}(0+)$, druhý pro $f \in L'_+$):

$$\mathcal{L}f^{(n)} = p^n \mathcal{L}f - p^{n-1} f(0+) - \cdots - f^{(n-1)}(0+)\,,$$

$$\frac{d^n}{dp^n}(\mathcal{L}f)(p) = \mathcal{L}((-t)^n f)\,.$$

• Laplace a konvoluce: Pro $T_1, T_2 \in L'_+$ definujeme $(T_1 \star T_2)(\varphi) := T_2(T_1(\varphi(t_1+t_2)))$ (kde distribuce T_i působí přes proměnnou t_i). Pak platí $T_1 \star T_2 \in L'_+$, a:

$$\mathcal{L}(T_1 \star T_2) = \mathcal{L}T_1 \cdot \mathcal{L}T_2\,.$$