Fourierova transformace.

• Komentář k tabulce: Zpětnou Fourierovu transformaci (která je většinou i inverzní - viz vlastnosti) pro funkce dostaneme tím, že v exponenciálním jádru zaměníme znaménko ($e^{2\pi i x\cdot\xi}$). U distribucí tím, že použijeme zpětnou F.T. na testovací funkci. Značení: $\mathcal{F}[f] \equiv \widehat{f}$ pro dopřednou, $\mathcal{F}_{-1}[f] \equiv f^\vee$ pro zpětnou F.T.

Objekt	Definice	Některé vlastnosti
$f \in L^1(\mathbb{R}^m)$	$\widehat{f}(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx$	$\widehat{f} \in C(\mathbb{R}^m)$, $\lim\limits_{\lvert\xi\rvert\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$, a pokud navíc $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^m)$, tak $\mathcal{F}_{-1}\mathcal{F}(f) = f$ *ve skoro všech bodech*
$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$	$\widehat{f}(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx$	$\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, přiřazení $f \mapsto \widehat{f}$ je vzájemně jednozačné, prosté a na, $\mathcal{F}_{-1}\mathcal{F}(f) = f$ *ve všech bodech*
$f \in L^2(\mathbb{R}^m)$	$\widehat{f}(\xi) := \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\lvert x\rvert\le R} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx$	$\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^m)$, přiřazení $f \mapsto \widehat{f}$ je vzájemně jednozačné, prosté a na, $\mathcal{F}_{-1}\mathcal{F}(f) = f$ *ve skoro všech bodech*
$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$	$\widehat{f}(\varphi) := f(\widehat{\varphi}) \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$	$\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, přiřazení $f \mapsto \widehat{f}$ je vzájemně jednozačné, prosté a na, $\mathcal{F}_{-1}\mathcal{F}(f) = f$ *ve smyslu distribucí*

• Pro funkce z $\mathcal{S}$ nebo L^2 platí $\mathcal{F}_{-1}[f](\xi) = \mathcal{F}[f](-\xi)$, a tedy

$$\mathcal{F}_{-1}[f] = \mathcal{F}[f] \quad \text{pro radiálně symetrické funkce i distribuce.}$$

• Je-li $T \in \mathcal{E}' \equiv \mathcal{S}'_K$ (distribuce s kompaktním nosičem), je $\widehat{T}$ regulární distribuce, reprezentovaná funkcí:

$$\widehat{T}(y) = \underset{x}{\mathrm{T}}(e^{-2\pi i x\cdot y})\,.$$

• Vztahy F.T. a derivací: pro všechna $T \in \mathcal{S}'$, α multiindex:

$$\widehat{D^\alpha T} = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{T}\,, \qquad (D^\alpha T)^\vee = (-2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha T^\vee\,,$$
$$D^\alpha \widehat{T} = (-2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha T}\,, \qquad D^\alpha (T)^\vee = (2\pi i)^{|\alpha|}(x^\alpha T)^\vee\,.$$

$$\widehat{\Delta T} = -4\pi^2|\xi|^2\,\widehat{T}\,.$$

• Některé potřebné F.T. funkcí (zde je $a > 0$):

$$\widehat{\chi_{\langle -a,a\rangle}}(\xi) = \frac{\sin 2\pi a\xi}{\pi\xi}$$

$$\widehat{e^{-a|x|}}(\xi) = [\text{v } \mathbb{R}^1 :]\ \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}\,,\ [\text{v } \mathbb{R}^2 :]\ \frac{2\pi a}{(a^2 + 4\pi^2\xi^2)^{3/2}}\,,\ [\text{v } \mathbb{R}^3 :]\ \frac{8\pi a}{(a^2 + 4\pi^2\xi^2)^2}\,,$$

$$\widehat{e^{-a|x|^2}}(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}} \qquad \text{v } \mathbb{R}^m,$$

• Některé potřebné F.T. distribucí (zde $a \in \mathbb{R}$):

$$\widehat{\delta} = 1\,, \qquad \widehat{1} = \delta\,,$$

$$\widehat{\delta_a} = e^{-2\pi i a\cdot\xi}\,, \qquad \widehat{e^{2\pi i a\cdot x}} = \delta_a\,,$$

$$\delta_\Sigma := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\delta_\Sigma} = \delta_\Sigma \qquad \text{(vzorkovací distribuce)},$$

$$\widehat{\text{v.p.}\frac{1}{x}} = -\pi i \operatorname{sign}\xi\,, \qquad \widehat{Y(x)} = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i}\text{v.p.}\frac{1}{\xi}\,.$$

• Sféricky symetrická F.T.: pro tzv. plošnou distribuci $\nu_r(\varphi) := \int_{S_r(0)} \varphi(x)\,dS(x)$ platí:

$$\widehat{\nu_r}(y) = 2\pi r\, J_0(2\pi r|y|) \qquad \text{v } \mathbb{R}^2, \quad r > 0\,,$$

$$\widehat{\nu_r}(y) = \frac{2r}{|y|}\,\sin(2\pi r|y|) \qquad \text{v } \mathbb{R}^3, \quad r > 0\,.$$

Je-li $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ sféricky symetrická, $f(x) = R(r)$, potom:

$$\widehat{f}(y) = 2\pi \int_0^\infty r\,R(r)\,J_0(2\pi r|y|)\,dr\,, \qquad \text{v } \mathbb{R}^2, \quad r > 0\,,$$

$$\widehat{f}(y) = \frac{2}{|y|}\int_0^\infty r\,R(r)\,\sin(2\pi r|y|)\,dr\,, \qquad \text{v } \mathbb{R}^3, \quad r > 0\,.$$

V obou těchto případech označuje $J_0(x)$ nultou Besselovu funkci

$$J_0(x) := \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2^{2n}\,(n!)^2}\,x^{2n}\,.$$

• Fourier a konvoluce: Pro $S \in \mathcal{E}' \equiv \mathcal{S}'_K$, $T \in \mathcal{S}'$ platí

$$\widehat{S \star T} = \widehat{S}\,\widehat{T}\,.$$