Gamma funkce. Definice integrálem pro $\operatorname{Re} z > 0$ (Eulerův integrál 2. druhu):

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt = 2 \int_0^\infty t^{2z-1} e^{-t^2}\, dt\,.$$

Potom $\Gamma \in \mathcal{H}\{\operatorname{Re} z > 0\}$ a pro $\operatorname{Re} z > 0$, $n \in \mathbb{N}$ platí :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\,, \qquad \Gamma(n) = (n-1)\,!\,, \qquad \Gamma\big(n+\tfrac{1}{2}\big) = \left(\frac{1}{2}\right)_n \sqrt{\pi}\,,$$

kde symbol $(\alpha)_n := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$. Funkci Gamma lze holomorfně rozšířit na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ s jednoduchými póly v $0, -1, -2, \dots$, a to předpisy:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} \quad \text{pro } \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z > -n-1, z \neq 0, 1, \dots, -n\}\,.$$

Potom platí:

$$\Gamma \in \mathcal{H}\Big(\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}\Big)\,, \qquad \operatorname{Res}_{-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n\,!}\,,$$

$$\Gamma(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}\,, \qquad \frac{1}{\Gamma(z)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})\,.$$

Dále platí ($\varkappa_m$ je povrch jednotkové sféry v dimenzi $m = 1, 2, 3, \dots$):

$$\varkappa_m = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}\,, \qquad \int_0^\infty e^{-x^n}\, dx = \Gamma\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Další zajímavé (Fresnelovy) identity:

$$\int_0^\infty x^{2s-1} \cos(x^2)\, dx = \frac{\Gamma(s)}{2} \cos\frac{\pi s}{2}\,, \qquad s \in (0,1)\,,$$

$$\int_0^\infty x^{2s-1} \sin(x^2)\, dx = \frac{\Gamma(s)}{2} \sin\frac{\pi s}{2}\,, \qquad s \in (0,1)\,.$$

Beta funkce. Definice integrálem pro $\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0$ (Eulerův integrál 1. druhu):

$$B(p,q) := 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\varphi\, \sin^{2q-1}\varphi\, d\varphi\,.$$

Pak lze ukázat ($\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0$):

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q-1} = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} = \int_0^\infty \frac{2x^{2p-1}}{(1+x^2)^{p+q}} = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{tp}}{(1+e^t)^{p+q}}\,,$$

$$B(p,q) = B(q,p)\,, \qquad B(p,1) = B(1,p) = \frac{1}{p}\,.$$

Následující rovnost platí všude tam, kde mají smysl integrální vyjádření obou funkcí. Lze ji pak využít k dodefinování funkce Beta všude tam, kde má smysl pravá strana této rovnosti:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,.$$

Dále platí:

$$B(s, 1-s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}\,, \quad \text{pro všechna } s \in (0,1)\,.$$