Použití residuové věty k výpočtům

1. Integrály z racionální funkce sinu a cosinu přes interval délky 2π

$P(z,w)$, $Q(z,w)$ jsou polynomy ve dvou proměnných takové, že $Q(\sin x, \cos x)$ nemá žádné kořeny pro $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Potom

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\sin x,\cos x)}{Q(\sin x,\cos x)}\,dx = 2\pi \sum_{z_k\in K_1(0)} \operatorname{Res}_{z_k}\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{P\left(\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}),\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\right)}{Q\left(\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}),\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\right)}\right), \tag{1}$$

kde $K_1(0)$ je otevřený jednotkový kruh. (Česky: dosaďte do P a Q za $\sin x$ a $\cos x$ výrazy $\frac{1}{2i}(z-1/z)$ a $\frac{1}{2}(z+1/z)$, vydělte ještě jedním z, upravte a sečtěte residua ve všech singularitách vzniklého výrazu, které leží uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině. Tento součet se vynásobí 2π a je zintegrováno.)

Pomocí (1) spočtěte následující příklady (goniometrické funkce s násobnými úhly je nejprve nutno vyjádřit pomocí jednoduchých úhlů, například $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$):

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{5+4\cos x}\,dx = -\frac{1}{3}\,\pi \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3x)}{5+4\cos x}\,dx = -\frac{1}{12}\,\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos x)^2}{3+2\cos x}\,dx = \frac{8}{5}\sqrt{5}\,\pi - 2\,\pi \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{13+12\sin x}\,dx = \frac{2}{5}\,\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\sin x)^2}\,dx = \frac{5}{32}\,\pi \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\,dx = -2\,\pi\sqrt{3} + 4\,\pi$$

(Díky 2π-periodicitě sinů a kosinů je jedno přes jaký interval délky 2π se integruje, tedy $\int_{-\pi}^{\pi} = \int_0^{2\pi}$.)

2. Integrály z funkcí od $-\infty$ do $+\infty$

Buď $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus A)$, $A := \{z_1,\dots,z_n\}$. Nechť f nemá žádné singularity na reálné ose, a nechť dále platí

$$\lim_{R\to+\infty} R\cdot\max_{\gamma_R^+}|f(z)| = 0\,, \tag{2}$$

kde $\gamma_R^+ := Re^{it}$, $t \in \langle 0,\pi\rangle$ (horní půlkružnice o poloměru R). Položme $A^+ := \{z_k \in A,\ \text{že } \operatorname{Im}(z_k) > 0\}$. Potom

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{z_k\in A^+} \operatorname{Res}_{z_k} f(z)\,. \tag{3}$$

Speciálně pro f racionální, tj. $f(z) = P(z)/Q(z)$, kde $P(z)$ a $Q(z)$ jsou polynomy, jsou předpoklady věty splněny, pokud Q nemá žádné kořeny na reálné ose, a stupeň $(Q) >$ stupeň $(P) + 1$.

Vyzbrojeni touto znalostí spočtěte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \pi \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx = \frac{3\pi}{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\pi \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)(x^2+2x+2)}\,dx = -\frac{\pi}{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}\,dx = \frac{2}{3}\,\pi \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2}{3}\,\pi\sqrt{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{9}\,\pi \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x+3}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{4}{3}\,\pi\sqrt{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\pi \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x+3}{(x^4+x^2+1)^2}\,dx = \frac{13}{18}\,\pi\sqrt{3}$$

3. Integrály z $f(x)\,e^{iax}$ od $-\infty$ do $+\infty$

Buď $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus A)$, $A := \{z_1, \dots, z_n\}$. Nechť f nemá žádné singularity na reálné ose, a nechť dále platí

$$\lim_{R\to+\infty} \max_{\gamma_R^+} |f(z)| = 0\,, \tag{4}$$

kde $\gamma_R^+ := Re^{it}$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$ (horní půlkružnice o poloměru R). Položme $A^+ := \{z_k \in A,$ že $\mathrm{Im}(z_k) > 0\}$. Potom pro $a > 0$ platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{z_k \in A^+} \mathrm{Res}_{z_k}\Big(f(z)e^{iaz}\Big)\,. \tag{5}$$

Speciálně pro f racionální, tj. $f(z) = P(z)/Q(z)$, kde $P(z)$ a $Q(z)$ jsou polynomy, jsou předpoklady věty splněny, pokud Q nemá žádné kořeny na reálné ose, a stupeň $(Q) >$ stupeň (P).

Všimněte si rozdílu mezi (4) a (2): ono R chybějící ve (4) způsobí, že v případě racionální f stačí, když je stupeň jmenovatele pouze větší než stupeň čitatele.

Pomocí (5) nyní spočtěte (pro integrály se sinem a kosinem použijte $\sin(ax) = \mathrm{Im}(e^{iax})$, $\cos(ax) = \mathrm{Re}(e^{iax})$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\pi x)}{1+3\,x^2}dx = 1/3\,\pi\, e^{-2/3\,\pi\,\sqrt{3}}\sqrt{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi\, x)}{x^4+4}dx = -1/4\,\pi\, e^{-\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\,\xi\, x}}{1+x^2}dx = \pi\, e^{-2\,\pi\,\xi}\,, \quad \xi > 0$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x\,\sin(a\,x)}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ab}\,,\ a > 0,\, b > 0.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{1+2\,x+5\,x^2}dx = -1/2\,\pi\, e^{-2/5}\sin(1/5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+2\,x+10}dx = 1/3\,\frac{\pi\ (3\,\cos(1)+\sin(1))}{e^3}$$

Poznámka: později uvidíme, že integrál vlevo je zpětná Fourierova transformace funkce $\frac{1}{x^2+1}$, a že tedy residuové počty velmi pomáhají Fourierovi

Návod: sudost funkce implikuje $\displaystyle\int_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}$

4. Další integrály

Residuová věta umožňuje spočíst mnoho dalších integrálů, nejen integrály výše uvedených (jednoduchých) typů. Jako příklad ukážeme výpočet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xs}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}\,, \qquad s \in (0,1). \tag{6}$$

Postupujte podle tohoto návodu:

- Integrujte funkci $f(z) = \frac{e^{zs}}{1+e^z}$ přes obvod obdélníku, jehož základnou je interval $\langle -R, R\rangle$, a jehož výška je $2\pi i$ (horní dva vrcholy mají tedy souřadnice $\pm R + 2\pi i$).
- Uvnitř obdélníka je jediná isolovaná singularita funkce f: v bodě πi, ve kterém platí
$$\mathrm{Res}_{\pi i} f(z) = -e^{\pi i s}.$$
- Ukažte (odhadem integrálů v absolutní hodnotě), že integrály přes obě boční stěny obdélníka jdou k nule, když $R \to +\infty$ (zde bude hrát roli také hodnota parametru s).
- Po limitním přechodu $R \to +\infty$ tedy zůstanou jen oba integrály přes nekonečně natažené horní a dolní strany obdélníka, a výsledek křivkové integrace, známý z residuové věty. Konkrétně vyjde:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xs}}{1+e^x}\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xs}\,e^{2\pi i s}}{1+e^x}\,dx = 2\pi i\,(-e^{\pi i s}).$$

Z posledně uvedeného vztahu plyne (6). Spočtěte celý příklad pečlivě!

M.Rokyta