$\boxed{\text{Základní vlastnosti Lebesgueova integrálu}}$

Symbolem λ označujeme lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^m$. Všechny zde používané množiny a funkce jsou měřitelné. Dále:

$$L^*(M) := \Big\{ f;\ \int_M f(x)\, d\lambda(x) \text{ existuje (i nekonečný).} \Big\}$$
$$L(M) := \Big\{ f;\ \int_M f(x)\, d\lambda(x) \text{ konverguje (tj. je konečný).} \Big\}$$

• **Nerovnosti a rovnosti**

(1) $$f \le g \text{ s.v. na } M, \quad f, g \in L^*(M) \quad \Rightarrow \quad \int_M f \le \int_M g$$

(2) $$f = g \text{ s.v. na } M, \quad f \in L^*(M) \quad \Rightarrow \quad \int_M f = \int_M g$$

• **Třídy $L^*(M)$ a $L(M)$**

(3) $$f \in L(M) \quad \Longleftrightarrow \quad |f| \in L(M)\,; \text{ přitom platí } \Big| \int_M f \Big| \le \int_M |f|$$

(4) $$f \in L^*(M) \quad \Rightarrow \quad |f| \in L^*(M)\,; \text{ přitom platí } \Big| \int_M f \Big| \le \int_M |f|$$

(5) $$f \in L(M) \quad \Rightarrow \quad f \text{ má s.v. na } M \text{ konečné hodnoty.}$$

• **Existence a konvergence integrálu**

(6) $$f \le g \text{ s.v. na } M, \quad \text{existuje } \int_M g < +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{existuje } \int_M f < +\infty$$
$$\text{existuje } \int_M f > -\infty \quad \Rightarrow \quad \text{existuje } \int_M g > -\infty$$

(7) *"o policajtech"*

$$g \le f \le h \text{ s.v. na } M, \quad g, h \in L(M) \quad \Rightarrow \quad f \in L(M), \quad \int_M g \le \int_M f \le \int_M h$$

(8) $$c_1 \le f \le c_2 \text{ s.v. na } M, \quad \lambda(M) < +\infty \quad \Rightarrow \quad c_1 \cdot \lambda(M) \le \int_M f \le c_2 \cdot \lambda(M)$$

(9) *"o integrabilní majorantě"*

$$|f| \le g \text{ s.v. na } M, \quad g \in L(M) \quad \Rightarrow \quad f \in L(M), \quad \int_M |f| \le \int_M g$$

- **Závislost integrálu na integračním oboru**

(10) $$f \ge 0 \text{ s.v. na } M, \quad P \subset M \quad \Rightarrow \quad \int_P f \le \int_M f$$

(11) $$A_n \subset A_{n+1}, \quad A := \bigcup_n^\infty A_n, \quad f \in L^*(A) \quad \Rightarrow \quad \int_A f = \lim \int_{A_n} f$$

(12) $$A_n \supset A_{n+1}, \quad A := \bigcap_n^\infty A_n, \quad f \in L(A_1) \quad \Rightarrow \quad \int_A f = \lim \int_{A_n} f$$

(13) $f \in L^*(M) \cap L^*(P)$. Potom:

$$f \in L^*(M \cup P) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{součet } \int_M f + \int_P f \text{ má smysl.}$$

(14) Je-li $f \in L(M) \cap L(P)$, je $f \in L(M \cup P)$

- **Nulovost funkce v závislosti na integrálu**

(15) $$f \ge 0 \quad \text{s.v. na } M, \quad \int_M f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \quad \text{s.v. na } M$$

(16) $$\int_A f = 0 \quad \forall A \subset M \text{ měřitelné} \quad \Rightarrow \quad f = 0 \quad \text{s.v. na } M$$

- **Linearita integrálu**

(17) $f, g \in L^*(M)$, $a, b, \in \mathbb{R}$, nechť výraz $a \int_M f + b \int_M g$ má smysl

(s konvencí $0 \cdot \infty = \infty$). Potom platí $\int_M (af + bg) = a \int_M f + b \int_M g$