Virtuální přednáška z MA, (ne)konaná dne 23.5.2001

(do stroje mluvil: M. Rokyta)

A. Hledání extrémů na kompaktu s nehladkou hranicí.

K metodě Lagrangeových multiplikátorů je nutno dodat jednu důležitou poznámku: všimněte si, že ve větě, která se jimi zabývá, se jak o funkci f, tak o vazbě g předpokládá $f, g \in \mathcal{C}^1$. To znamená, že body, ve kterých jsou tyto vlastnosti porušeny, naše věta „nevidí" a my je musíme zahrnout mezi „kandidáty na extrém" sami. Rozmyslete si (a pokud možno i domyslete :-) tuto situaci: budeme-li mít za úkol nalézt globální extrémy jakékoli funkce f například na čtverci v $\mathbb{R}^2$, zahrneme do kandidátů na extrém tyto body:

1. stacionární body funkce f uvnitř čtverce,
2. ty body čtverce (uvnitř i na hranici), ve kterých f nemá diferenciál („hroty" f, zahrneme je na základě předchozí úvahy),
3. čtyři vrcholy čtverce (také podle předchozí úvahy),
4. podezřelé body, které dostaneme studiem funkce f na 4 otevřených úsečkách, tvořících obvod čtverce bez vrcholů — to jsou hladké části hranice hranice čtverce, a můžeme na nich použít například metodu Lagrangeových multiplikátorů.

Lépe vše osvětlí konkrétní příklad.

Příklad. Najděme globální extrémy funkce dvou proměnných $f(x, y) = x - y$ na množině $M = \{[x, y];\ y \le 1,\ x^2 + y^2 \le 5\}$.

Řešení. Množina M je kompaktní a f je na ní spojitá, globální extrémy tedy existují. Protože je ve všech bodech roviny $\nabla f = (1, -1)$, nemá f žádné stacionární body, tedy je nemá ani uvnitř čtverce. Dále funkce f má všude spojité první derivace, tedy má všude diferenciál, proto žádné body typu „2)" z výše uvedeného seznamu nejsou. Zatím tedy nemáme žádné kandidáty na extrém, a v této chvíli už je jasné, že oba globální extrémy budou ležet na hranici M.

Přejděme tedy k množině. M je „useknutý kruh" (nakreslete si obrázek), jeho hranice sestává z kruhového oblouku, úsečky a dvou bodů na jejich průniku. Tyto dva body: $[-2, 1]$, $[2, 1]$ jsou typu „3)" z výše uvedeného seznamu a jsou automaticky kandidáty na globální extrém. Zbývá vyšetřit obě zbylé části hranice.

Na horní části hranice M (otevřená úsečka mezi body $[-2, 1]$ a $[2, 1]$) bychom obecně mohli použít metodu Lagrangeových multiplikátorů (vyzkoušejte si), ale popis této hranice ($y = 1$) je tak jednoduchý, že je rychlejší ji rovnou dosadit do funkce f a zkoumat extrémy vzniklé funkce jedné proměnné:

$$\widetilde{f}(x) = f(x, 1) = x - 1\,.$$

Tato funkce má všude nenulovou derivaci, a proto na úsečce mezi body $[-2, 1]$ a $[2, 1]$ není žádný kandidát na extrém funkce f.

Zbývá poslední krok: vyšetřit f na otevřeném kruhovém oblouku. Lagrange se konečně dostane ke slovu, hledáme x, y, λ, aby platilo:

$$\begin{aligned} 1 - 2\lambda x &= 0\,, \\ -1 - 2\lambda y &= 0\,, \\ x^2 + y^2 &= 5\,. \end{aligned}$$

Řešení této soustavy ponechávám laskavému čtenáři (který například vyjádří z prvních dvou rovnic x a y a dosadí to do třetí rovnice). Zjistíme, že soustava má dvě řešení: $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ (pro $\lambda = \frac{1}{\sqrt{10}}$), a $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{10}}{2}$ (pro $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{10}}$). Druhý z bodů ovšem neleží na našem kruhovém oblouku (jeho y-ová souřadnice je větší než 1), a mezi naše kandidáty extrému tedy postoupil pouze bod $[\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}]$.

Tři spočtené kandidátské body jsou jedinými body, ve kterých může f nabývat globálních extrémů. Stačí tedy spočítat hodnoty f v těchto bodech a porovnat je: $f(-2, 1) = -3$, $f(2, -1) = 3$, $f(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}) = \sqrt{10} \approx 3.1622$, a tedy globálního maxima se nabývá v bodě $[\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}]$, globálního minima v bodě $[-2, 1]$. Tím je úloha vyřešena.

Poznámka. Některé zvídavé jedince by samozřejmě mohlo jen tak pro pořádek zajímat, co se vlastně děje ve třetím z nalezených bodů — neboť vězte, že tam může být jak nějaký lokální extrémek, tak malé sedýlko, obojí ovšem vzhledem k hranici množiny M. Toto by se muselo udělat takto: druhý diferenciál funkce f by se zúžil na hranici množiny M a zjišťovalo by se, jestli je vzhledem k této hranici pozitivně nebo negativně nebo in- definitní. To by dalo odpověď na onu doplňující otázku, která však přesahuje rámec našich požadavků. Uvedl jsem to tady jen proto, že někteří z vás na podobný výpočet možná narazili v Kopáčkových skriptech či jinde, a mohli by se ptát, co se to tam vlastně ještě počítalo. Pokud takovéto doplňující počty někoho zajímají, doporučuju si je v Kopáčkových příkladových skriptech vyhledat.

Doporučuju všem: na webu je vystavená tzv. druhá písemka z května, jejíž druhý příklad je přesně typu, který jsme právě diskutovali. Podívejte se na něj a spočtěte si jej. Výskyt příkladů tohoto typu (uříznuté množiny) u písemky je velmi pravděpodobný.

B. Zajímavá souvislost s vlastními vektory a čísly symetrické matice.

Všechno, co následuje od této chvíle, čtete již mimo požadavky ke zkoušce. Následující příklad si však kvůli své zajímavosti trochu pozornosti zaslouží. Nejprve však jednu poznámku: budeme se v něm zabývat obecným m-rozměrným případem s jednou vazbou. Přestože odpovídající větu nemáme dokázánu, po zkušenostech s podobnou větou v $\mathbb{R}^2$ není těžké uvěřit, že platí, a pro pořádek ji sem píšu:

Věta 1 (Lagrangeovy multiplikátory pro více dimenzí a jednu vazbu) *Předpokládejme, že $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je funkce, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ vazba, f, $g \in \mathcal{C}^1(G)$, G otevřená množina. Nechť*

1. *$H = \{x \in \mathbb{R}^m;\ g(x) = 0\} \subset G$;*

2. $\nabla g(x) \neq 0$ *na* H *(jinak řečeno, parciální derivace* g *nejsou nikdy všechny současně nulové na* H*);*

3. v bodě $a \in H$ *má* f *lokální extrém vzhledem k množině* H*.*

Potom existuje číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ *takové, že v onom bodě* a *platí*

$$\nabla f(a) - \lambda \nabla g(a) = 0\,.$$

Příklad. Najděme globální extrémy reálné symetrické kvadratické formy na jednotkové sféře v $\mathbb{R}^m$.

Řešení. Každá reálná symetrická kvadratická forma je dána reálnou symetrickou maticí A s prvky $a_{ij} = a_{ji}$. Funkce, jejíž extrémy hledáme, tedy vypadá takto:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j = (A \cdot x, x)\,.$$

— symbolem (y, x) označujeme skalární součin y a x. Jednotková sféra v $\mathbb{R}^m$ je popsána vztahem $\sum_{i=1}^m x_i^2 = 1$, a tedy vazba je

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - 1\,.$$

Obě funkce jsou dostatečně hladké a gradient g je na množině H (jednotková sféra, což je kompakt) nenulový, tedy globální extrémy budou existovat, a to v některém z bodů, které nám naservíruje pan Lagrange.

Podle Lagrange hledáme tedy bod (=vektor) x a číslo λ, splňující

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) - \lambda \frac{\partial}{\partial x_k} g(x) &= 0\,, \quad \text{pro všechna } k = 1, \ldots, m\,,\\
\|x\| &= 1\,.
\end{aligned}$$

Parciální derivování podle x_k dá postupně (symbolicky se tam na chvíli mihne pan Kronecker):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j - \lambda \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^{m} x_i^2 &= 0\,,\\
\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \Big(x_i \delta_{jk} + x_j \delta_{ik} \Big) - 2\lambda x_k &= 0\,,\\
\sum_{i=1}^{m} a_{ik} x_i + \sum_{j=1}^{m} a_{kj} x_j - 2\lambda x_k &= 0\,.
\end{aligned}$$

Protože A je symetrická matice, znamenají oba součty vlevo totéž, a sice k-tou složku vektoru $A \cdot x$. Lze tedy poslední rovnici přepsat do tvaru $2(A \cdot x)_k = 2\lambda x_k$ (pro všechna k), neboli

$$A \cdot x = \lambda x\,.$$

Vazba k tomu dodává, že nás zajímají pouze taková řešení x této rovnice, která mají jednotkovou délku.

Vidíme tedy toto: globální extrémy kvadratické formy se nabudou v těch bodech x, které jsou vlastními vektory (jednotkové délky) matice A. Příslušný Lagrangeův multiplikátor λ je přitom vlastním číslem matice A, které přísluší tomuto vektoru.

Na základě této informace můžeme dokonce spočítat, jaká bude hodnota globálního maxima a minima, které hledáme: je-li x vlastní vektor A délky 1, máme:

$$f(x) = (A \cdot x, x) = (\lambda x, x) = \lambda \|x\|^2 = \lambda\,.$$

Největší hodnotou, jakou může f nabýt, je tedy hodnota největšího vlastního čísla matice A, a tato hodnota se nabude v bodě, který leží na jednotkové sféře ve směru odpovídajícího vlastního vektoru. Podobně pro globální minimum a nejmenší vlastní číslo A.

Docela hezká interpretace vlastních čísel a vektorů symetrické matice, ne?

A to je pro tento semestr vše. Děkuji za pozornost, kterou jste přenáškám z analýzy po celý rok věnovali (opravdu mě to těšilo). Pokud vás zajímá, co se bude brát ve druhém ročníku, podívejte se na webu do mých archivních sylabů pro druháky, které jsem učil ve školním roce 1998-99. Náš sylabus příští rok bude velmi podobný.

Zdraví

M.Rokyta, dopsáno 23.5.2001 ve 14:30.