Písemka z MA č. II z května 2001 – zadání

Příklad 1. Nalezněte všechny lokální extrémy funkce tří proměnných

$$f(x,y,z) = e^{x^2-y+z}\,(5-2\,x+y-z)$$

a vyšetřete její chování ve všech stacionárních bodech.

Příklad 2. Nalezněte globální extrémy funkce

$f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$ na množině $M := \{4x^2 + y^2 \le 25\,;\ x + y \ge 1\}\,.$

Písemka z MA č. II z května 2001 – řešení

Příklad 1. Nalezněte všechny lokální extrémy funkce tří proměnných

$$f(x,y,z) = e^{x^2-y+z}\,(5-2\,x+y-z)$$

a vyšetřete její chování ve všech stacionárních bodech.

Řešení: Spočteme první parciální derivace podle všech proměnných:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2\,x\,e^{x^2-y+z}\,(5-2\,x+y-z) - 2\,e^{x^2-y+z}\,,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -e^{x^2-y+z}\,(5-2\,x+y-z) + e^{x^2-y+z}\,,\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= e^{x^2-y+z}\,(5-2\,x+y-z) - e^{x^2-y+z}\,.
\end{aligned}$$

a spočteme stacionární body (položíme všechny první parciální derivace rovny nule a vyřešíme soustavu). Soustava má nekonečně mnoho řešení, která můžeme zapsat například ve tvaru

$$x = 1\,,\quad y = z-2\,,\quad z = z\,,$$

tj. pro libovolné $z \in \mathbb{R}$ je bod o souřadnicích $(1, z-2, z)$ stacionárním. Budeme zjišťovat, jak vypadají (pokud existují) druhé diferenciály v těchto bodech. Za tím účelem spočteme všechny druhé parciální derivace:

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= 2\,e^{x^2-y+z}\,(5-2\,x+y-z) + 4\,x^2 e^{x^2-y+z}\,(5-2\,x+y-z) - 8\,xe^{x^2-y+z}\,,\\
f_{xy} &= -2\,xe^{x^2-y+z}\,(5-2\,x+y-z) + 2\,xe^{x^2-y+z} + 2\,e^{x^2-y+z}\,,\\
f_{xz} &= 2\,xe^{x^2-y+z}\,(5-2\,x+y-z) - 2\,xe^{x^2-y+z} - 2\,e^{x^2-y+z}\,,\\
f_{yy} &= e^{x^2-y+z}\,(5-2\,x+y-z) - 2\,e^{x^2-y+z}\,,\\
f_{yz} &= -e^{x^2-y+z}\,(5-2\,x+y-z) + 2\,e^{x^2-y+z}\,,\\
f_{zz} &= e^{x^2-y+z}\,(5-2\,x+y-z) - 2\,e^{x^2-y+z}\,.
\end{aligned}$$

Vidíme, že všechny druhé parciální derivace jsou spojité ve všech bodech, tedy i v bodech stacionárních, a proto v nich existuje druhý totální diferenciál. Dosadíme do druhých derivací $x = 1$, $y = z-2$, $z = z$, a získáme tak matici druhých derivací (která reprezentuje druhý diferenciál). S překvapením zjistíme, že ve všech stacionárnch bodech má tato matice stejný tvar:

$$A = \begin{pmatrix} -2e^3 & 2e^3 & -2e^3 \\ 2e^3 & -e^3 & e^3 \\ -2e^3 & e^3 & -e^3 \end{pmatrix}.$$

Spočteme-li hodnoty všech „úhlopříčných“ subdeterminantů, dostáváme postupně $-2e^3$, $-2e^6$, 0. Kritérium, založené na počtu znaménkových změn, tedy nelze použít (existuje nějaký nulový subdeterminant), přesto však zápornost prvních dvou subdeterminantů vzbuzuje v nás podezření, že by mohlo jít o indefinitní matici (rozmyslete si: kdyby byl determinant celé matice nenulový libovolného znaménka, byla by vždy indefinitní). Jednou z možností, jak toto podezření ověřit, je nalézt dva vektory h_1 a h_2, takové, že $h_1^T \cdot A \cdot h_1 > 0$ a $h_2^T \cdot A \cdot h_2 < 0$. Po chvíli experimentování (začneme vektory nejjednoduššího tvaru a díváme se, co se děje) zjistíme, že například $h_1 = (1,1,0)^T$ a $h_2 = (1,0,0)^T$ splňují výše naznačené nerovnosti.

Závěr: Druhý diferenciál je ve všech stacionárních bodech indefinitní kvadratickou formou, a proto všechny stacionární body jsou sedlové body. Funkce nemá žádný lokální extrém.

Příklad 2. Nalezněte globální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2 \quad \text{na množině} \quad M := \{4x^2 + y^2 \leq 25\,;\ x + y \geq 1\}\,.$$

Řešení: Množina M je useknutý kus elipsy (kreslete si!), hranice M má tedy dva rohy (průsečíky obou částí hranice, tedy body splňující současně $4x^2 + y^2 = 25$ a $x + y = 1$), které mají souřadnice $[-2,3]$ a $[12/5, -7/5]$ (vyřešte si). To jsou první kandidáti na body, ve kterých může být lokální extrém.

Druhou skupinu kandidátů tvoří stacionární body f ležící uvnitř M. Takové však žádné neexistují (přesvěčte se o tom).

Poslední skupinu kandidátů tvoří body ležící na hladkých částech hranice. Na přímce $x + y = 1$ nemusíme ani použít Lagrangeovy multiplikátory, můžeme přímo dosadit do f za y výraz $1 - x$, a tedy vyšetřovat na této části hranice funkci jedné proměnné $g(x) := f(x, 1-x) = -9x^2 + 8x - 24$. Její stacionární bod je řešením rovnice $g'(x) = 0$, tedy je to $x = 4/9$ a pak tedy $y = 5/9$, máme tedy bod $[4/9, 5/9]$, nezapomeňte se přesvědčit, že skutečně leží na hranici množiny M.

Konečně nám zbývá již jen „křivá“ část hranice, popsaná $4x^2 + y^2 = 25$. Na ní použijeme Langangeovy multiplikátory, a dostáváme tuto soustavu pro neznámé x, y, λ:

$$\begin{aligned} x + 6y - 4\lambda x &= 0\,,\\ 6x + 2y - \lambda y &= 0\,,\\ 4x^2 + y^2 &= 25\,, \end{aligned}$$

jejímž řešením jsou body $[-2,3]$, $[2,-3]$ (tato dvě řešení odpovídají hodnotě $\lambda = -2$) a $[3/2, 4]$, $[-3/2, -4]$ (tato dvě řešení odpovídají hodnotě $\lambda = 17/4$). Z nich však pouze bod $[3/2, 4]$ leží na hranici M.

Celkem jsme tedy dostali 4 body, ve kterých může být globální extrém f. Spočteme hodnoty f v nich:

$$\begin{aligned} f(-2,3) &= -50\,, \quad & f(4/9, 5/9) &= 34/9\,,\\ f(-12/5, -7/5) &= -30\,, \quad & f(3/2, 4) &= 106{,}25\,. \end{aligned}$$

Závěr: Globální maximum f na M hodnoty $106{,}25$ se nabývá v bodě $[3/2, 4]$ a globální minimum f na M hodnoty -50 v bodě $[-2,3]$.