Funkcionální analýza z rychlíku

Mirko Rokyta (do TEXu přepsal kol. studentů, 2020/2021)

2. revize M.R., květen 2023

$\overline{z}$, $\overline{u}$, $\overline{\Omega}$	číslo komplexně sdružené k z, řešení blízké k u, uzávěr množiny Ω
ℓ_2	prostor takových posloupností $\{x_n\} \subset \mathbb{C}$, že řada $\sum \lvert x_n\rvert^2$ konverguje.
$\mathcal{C}(\Omega)$, $\mathcal{C}^k(\Omega)$	prostor spojitých funkcí (k-krát spojitě diferencovatelných funkcí) na množině Ω
$L^p(\Omega)$, $L^p_\rho(\Omega)$	(vážený) Lebesgueův prostor na množině Ω (s váhou ρ)
$W^{k,p}(\Omega)$, $W^{k,p}_\rho(\Omega)$	(vážené) Sobolevovy prostory na množině Ω (s váhou ρ)
$\mathscr{L}(X,Y)$, $\mathscr{L}(X)$	prostor spojitých lineárních operátorů mezi prostory X, Y (na prostoru X)
$\mathscr{C}(X,Y)$, $\mathscr{C}(X)$	prostor kompaktních lineárních operátorů mezi prostory X, Y (na prostoru X)
$\mathcal{U}(x)$	okolí bodu x
$\mathcal{D}(\boldsymbol{T})$	definiční obor operátoru $\boldsymbol{T}$
$\mathcal{R}(\boldsymbol{T})$	obor hodnot (range) operátoru $\boldsymbol{T}$
$\mathcal{M}^{m\times n}$	množina všech $m \times n$ rozměrných matic nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)
$\boldsymbol{T} : X \to Y$	operátor z X do Y (místo $\boldsymbol{T}$ budeme psát $\boldsymbol{L}$ pro neomezený a $\boldsymbol{K}$ pro kompaktní operátor)
$\sigma(\boldsymbol{T})$, σ_{C}, σ_{P}, σ_{R}	spektrum operátoru $\boldsymbol{T}$; spojité, bodové a reziduální spektrum
$\big(f,g\big)$, $\langle f, \boldsymbol{T}\rangle$	skalární součin, dualita
$\mathrm{moh}(B)$	mohutnost množiny B

Obsah

1 Operátorová trivia **3**

2 Základy spektrální analýzy **8**
- 2.1 Motivace: řešení jedné ODR . . . 8
- 2.2 Základní pojmy spektrální analýzy . . . 14
  - Rozdíl mezi konečnou a nekonečnou dimenzí. . . . 15
  - Možné stavy operátoru . . . 16

3 Kompaktní operátory **22**
- 3.1 Vlastnosti kompaktních operátorů . . . 23

4 Duálnost **25**
- 4.1 Duál a dualita . . . 25
- 4.2 Duální zobrazení, duální operátor . . . 27
- 4.3 Vlastnosti samoadjungovaných operátorů . . . 30
- 4.4 Kompaktní samoadjungované operátory na Hilbertových prostorech . . . 30

5 Neomezené operátory **36**

5.1 Symetrie a samoadjungovanost . . . 36

5.2 Spektrum neomezených operátorů . . . 41

6 Lineární diferenciální operátory **43**

6.1 Výrazy v samoadjungovaném tvaru . . . 43

6.2 Ortogonální báze v L^2_ρ složené z polynomů . . . 45

6.3 Gaussova redukovaná rovnice a ortogonální systémy polynomů . . . 48

6.4 Některé důležité vlastnosti Laguerrových polynomů . . . 52

Explicitní vyjádření . . . 52

Rekurentní vzorec . . . 53

Normy . . . 54

Vytvořující funkce . . . 55

1 Operátorová trivia

Co budeme považovat za známé:

- *Vektorový prostor* X nad $\underbrace{\mathbb{R} \text{ nebo } \mathbb{C}}_{\text{skaláry}}$ (ale existují i skaláry z $\mathbb{Q}$). Tam, kde nebude důležité, jestli jde o $\mathbb{R}$ nebo o $\mathbb{C}$, budeme někdy používat značení $\mathbb{K}$ (znamenající tedy „buď $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$“). Kromě termínu „vektorový prostor“ (VP) se používá i termín „lineární prostor“ (LP), případně „lineární vektorový prostor“ (LVP).

- *Lineárně nezávislá* (LN) *množina* ve VP: $M \subseteq X$ je LN, pokud $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \implies a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ pro všechny možné n-tice $(x_1, \dots x_n) \subseteq M$ a všechny skaláry $a_j \in \mathbb{K}$.

  Pozn.: I v případě, že M je nekonečná, uvažujeme pouze konečné součty (tj. všechny možné „libovolně dlouhé, ale konečné“ součty). Je totiž potřeba si uvědomit, že v obecném VP není definován pojem konvergence, a tedy samotný pojem nekonečného součtu nemá v obecném VP smysl.

  „Konečné součty patří do algebry, nekonečné do analýzy.“

- *Báze* X ($X \neq \emptyset$, $X \neq \{0\}$):

  1. Pokud existuje *konečná* LN množina B v X taková, že její lineární obal

     $$\mathrm{Lin}\,(B) := \Big\{ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j ,\ x_j \in B, a_j \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \Big\}$$

     je roven X (říkáme, že B *generuje* X), pak takovou množinu nazvu *[vektorovou] bází* X. Její mohutnost je pak určena jednoznačně (lze ukázat), tomuto číslu pak říkáme *dimenze* X: $\dim X := \mathrm{moh}(B) \in \mathbb{N}$.
  2. Pokud $\forall n \in \mathbb{N}$ v X existuje LN množina o n prvcích, říkáme, že $\dim X = \infty$. V tomto případě je pojem báze striktnější: bází X nad $\mathbb{K}$ je v tomto případě taková nekonečná množina B, která splňuje:
     (a) B je LN (ve smyslu všech konečných lin. kombinací – viz výše).
     (b) $\forall x \in X\ \exists n(x) \in \mathbb{N}$ a odpovídající konečný počet prvků báze $x_1, \dots, x_{n(x)}$ a koeficientů $a_j \in \mathbb{K}$, že

     $$x = \sum_{j=1}^{n(x)} a_j x_j \,.$$

     Pozn.: I zde tedy jde principiálně o konečné součty prvků, vybíraných z nekonečné množiny (pro různá x může jít o různé sady prvků báze). Této nekonečné bázi se říká *Hammelova báze* X *nad* $\mathbb{K}$. Otázka zní, zda každý VP X (který není konečné dimenze) má Hammelovu bázi. Odpověď *ano* je důsledkem *axiomu výběru* (kdo jej tedy neuznává, pro něj by odpověď byla *ne*).

Příklad $\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{VP}}$ nad $\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{skaláry}}$ má dimenzi 1: $\forall x \in \mathbb{R} \exists a = x \in \mathbb{R}$, že $x = a \cdot 1$. Báze je tedy $\{1\}$.

$\underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{VP}}$ nad $\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{skaláry}}$ má dimenzi n.

$\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{VP}}$ nad $\underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{skaláry}}$ má dimenzi ∞: totiž každá konečná báze reálných čísel generuje pomocí spočetné množiny koeficientů ($\mathbb{Q}$) jen spočetně mnoho prvků, a $\mathbb{R}$ je nespočetná.

Tím je vyřešen problém dimenze $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$. Všimněte si, že dimenzi ∞ lze určit i bez znalosti odpovědi na otázku existence báze, tj. bez nutnosti axiomu výběru. Pokud však připustíme axiom výběru, pak existuje Hammelova báze $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$, tj. $\exists B \subset \mathbb{R}$, že B je LN ve smyslu výše uvedené definice a $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n(x) \in \mathbb{N}\ \exists b_1, \dots, b_{n(x)} \in B\ \exists q_1, \dots, q_{n(x)} \in \mathbb{Q}$, že $x = \sum_{j=1}^{n(x)} q_j b_j$. Rozmyslete si, že B je nutně nespočetná (jinak vygeneruji jen spočetně mnoho prvků).

- *Norma na LP*: $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, že $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
$$\|ax\| = |a| \cdot \|x\|,$$
$$\|x\| = 0 \iff x = 0.$$
$(X, \|\cdot\|)$ je potom normovaný lineární prostor (NLP). V něm lze definovat konvergenci:
$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \quad \|x - x_n\| < \varepsilon$$
a lze tedy zavést i nekonečné součty. Dále lze definovat cauchyovskost
$$\{x_n\} \text{ cauchyovská} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0 \quad \|x_m - x_n\| < \varepsilon$$
a *úplnost X v normě*:
$$(X, \|\cdot\|) \text{ je úplný v normě } \|\cdot\| \iff \left(\{x_n\} \text{ cauchyovská} \implies \exists x \in X \ x_n \to x\right) .$$
Je-li $(X, \|\cdot\|)$ úplný v normě $\|\cdot\|$, nazývá se *Banachův* prostor (B-prostor).

- Za známé dále považujeme, že pokud $\dim X < \infty$, pak všechny normy na něm jsou ekvivalentní. Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ nazveme ekvivalentní, pokud $\exists c_1, c_2 > 0$, že $c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \ \forall x \in X$.

- Ekvivalentní normy zachovávají pojem konvergence ($x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x \iff x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x$) i cauchyovskosti, a tedy i úplnosti. Speciálně, je-li konečnědimenzionální prostor X úplný v $\|\cdot\|$, je úplný i ve všech jiných možných normách na X.

  To neplatí v nekonečné dimenzi, např $\mathcal{C}([-1,1])$ je úplný v maximové normě $\|f\|_\infty := \max_{[-1,1]} |f(x)|$, ale není úplný v integrální normě $\|f\|_1 := \int_{-1}^1 |f|$. $\big(\operatorname{arctg} nx \to \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \text{ v } \|\cdot\|_1\big)$

- *Skalární součin na LP*: $\big(\cdot,\cdot\big) : X \times X \to \mathbb{K}$ (je-li X nad $\mathbb{C}$, má tedy skalární součin komplexní hodnoty), je takové zobrazení, že $\forall x, y, z \in X$ platí:
$$\big(x, y\big) = \overline{\big(y, x\big)},$$
$$\big(x+y, z\big) = \big(x, z\big) + \big(y, z\big),$$
$$\big(x, x\big) \geq 0, \text{ přičemž } \big(x, x\big) = 0 \iff x = 0,$$
$$\big(\alpha x, y\big) = \alpha \big(x, y\big) \ \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

- Prostor $\big(X, \big(\cdot,\cdot\big)\big)$ obdařený skalárním součinem se zve LP se skalárním součinem, někdy též *unitární prostor*.

- Snadno lze ukázat, že výraz $\|x\| = \sqrt{\big(x, x\big)}$ má všechny vlastnosti normy, a tedy:
  X je unitární $\implies$ X je NLP (v tzv. „normě generované skalárním součinem“)

- Pokud je X *úplný v normě generované skalárním součinem*, říká se mu *Hilbertův prostor* (H-prostor), tedy:
  X Hilbertův $\implies$ X Banachův

- Na libovolném unitárním prostoru platí *Cauchy-Schwarzova nerovnost*:
$$\forall x, y \in X : \qquad |\big(x, y\big)| \leq \|x\| \cdot \|y\| , \qquad \text{kde } \|x\| = \sqrt{\big(x, x\big)}.$$

- X unitární, řekneme, že $x, y \in X \backslash \{0\}$ jsou *kolmé* v X (v odpovídajícím sk. součinu), pokud $\big(x, y\big) = 0$. Značíme $x \perp y$.

Příklad L^2, L^2_ρ, ℓ_2, $W^{1,2}$, $W^{k,2}$, $W^{k,2}_\rho$ jsou Hilbertovy.
$\mathcal{C}([a,b])$, L^p pro $p \neq 2$ jsou Banachovy a nejsou Hilbertovy.

Existence normy (sk. součinu, příp. metriky) definuje na LP tzv. geometrické vlastnosti (vzdálenost, konvergence, pro sk. součin i kolmost).

Nyní připomeneme různé pojmy a vlastnosti související se zobrazeními na vektorových prostorech.

1. Buďte X, Y LP (tj. nepotřebuji geometrii).

   - *operátor*: $\boldsymbol{T} : X \to Y$
   - *funkcionál*: $\boldsymbol{T} : X \to \mathbb{K}$

   Každý funkcionál je i operátor. Budeme tedy BÚNO definovat další vlastnosti pro operátory.

2. Buďte X, Y LP. Operátor $\boldsymbol{T} : X \to Y$ je

   - *lineární*: $\boldsymbol{T}(ax + by) = a\boldsymbol{T}(x) + b\boldsymbol{T}(y) \qquad \forall x, y \in X \ \forall a, b \in \mathbb{K}$
   - *nelineární*: není lineární

   Pozn.: z linearity $\boldsymbol{T}$ plyne, že $\boldsymbol{T}(0) = 0$ (volte $a = b = 0$).

3. X, Y NLP (tady už kromě linearity prostorů potřebuji mít i normu), $\boldsymbol{T} : X \to Y$ lineární je

   - *omezený*: $\forall K > 0 \ \ \exists C > 0 \quad \|x\|_X \leq K \implies \|\boldsymbol{T}x\|_Y \leq C$ (zobrazují se „omezené množiny na omezené množiny“),
     ekvivalentně $\exists C > 0 \ \ \forall x \in X \quad \|\boldsymbol{T}x\|_Y \leq C \|x\|_X$.
   - *neomezený*: není omezený, tj. $\exists K > 0 \ \ \forall C > 0 \ \ \exists x_C \in X \quad \|x_C\| \leq K \wedge \|\boldsymbol{T}x\| > C$

4. Buďte X, Y NLP, $T : X \to Y$ je

   - *spojitý*: $x_n \to x \implies \boldsymbol{T}x_n \to \boldsymbol{T}x$ (tzv. „Heineova definice“)
   - *nespojitý*: není spojitý

Dále již budeme uvažovat pouze Banachovy (případně Hilbertovy) prostory, tj. vždy budeme mít úplnost.

Definice 1.1 (Norma operátoru) Mějme lineární operátor $\boldsymbol{T} : X \to Y$. Definujeme číslo

$$\|\boldsymbol{T}\|_{\mathscr{L}(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|\boldsymbol{T}x\|_Y .$$

Toto číslo může vyjít i nekonečno (např. pro nějaký neomezený operátor). Pro lin. operátor však vidíme:

$$x \neq 0 \implies \left\| \boldsymbol{T}\Big(\frac{x}{\|x\|_X}\Big) \right\|_Y \leq \|\boldsymbol{T}\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \qquad (\|\boldsymbol{T}\| \text{ je supremem takových})$$

$$\|\boldsymbol{T}x\|_Y \leq \|\boldsymbol{T}\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \cdot \|x\|_X$$

Platí i pro $\|\boldsymbol{T}\| = \infty$, $\forall x \neq 0$. Pokud $\|\boldsymbol{T}\| < \infty$, pak obě strany jsou konečné a nerovnost platí $\forall x \in X$ (tj. včetně $x = 0$).

Poznámka připustili jsme $\|\boldsymbol{T}\| = \infty$, abychom měli tuto ekvivalenci:

Lemma 1.2 (O charakterizaci omezenosti) Pro lin. operátory máme:

$$\boldsymbol{T} \text{ omezený} \iff \|\boldsymbol{T}\| < \infty$$

a v tom případě má $\|\boldsymbol{T}\|$ vlastnosti normy (ověřte sami).

Důkaz. Implikace „$\Rightarrow$“: $\boldsymbol{T}$ omezený: $(\text{vol}\, K = 1: \ \exists C\ \forall \|x\| \leq 1\ \|\boldsymbol{T}x\| \leq C) \implies \|\boldsymbol{T}\| \leq C$.

Implikace „$\Leftarrow$“: $\|\boldsymbol{T}\| < \infty$: $\|\boldsymbol{T}x\| \leq \|\boldsymbol{T}\| \cdot \|x\|\ \forall x \in X$, tj. $\|x\| \leq K \implies \|\boldsymbol{T}x\| \leq K\|\boldsymbol{T}\|$. □

Lemma 1.3 (O ekvivalenci spojitosti a omezenosti operátoru) Nechť jsou X, Y Banachovy. Pokud je $\boldsymbol{T} : X \to Y$ *lineární* operátor, pak

$$\boldsymbol{T} \overset{(1)}{\text{omezený}} \iff \boldsymbol{T} \overset{(2)}{\text{spojitý}} \iff \|\boldsymbol{T}\| \overset{(3)}{<} \infty.$$

Důkaz. Ekvivalenci (1) a (3) už jsme dokázali. Ukážeme:

(1) $\Rightarrow$ (2): Je-li $\boldsymbol{T}$ omezený, pak $\exists C > 0$, $\|\boldsymbol{T}(x_n - x)\| \leq C\|x_n - x\|$. Z linearity $\boldsymbol{T}$ pak plyne $\|\boldsymbol{T}x_n - \boldsymbol{T}x\| \leq C\|x_n - x\|$. Pokud nyní $x_n \to x$, pak odsud máme $\boldsymbol{T}x_n \to \boldsymbol{T}x$ a tedy $\boldsymbol{T}$ je spojitý.

(2) $\Rightarrow$ (1): Ze spojitosti plyne mj., že pokud $x_n \to 0$, pak $\boldsymbol{T}x_n \to 0$. Proto $\forall \varepsilon$ (např. pro pevně zvolené $\varepsilon = 1$) $\exists \delta > 0$, že $\|x_n\| < \delta \Rightarrow \|\boldsymbol{T}x_n\| < \varepsilon = 1$. Buď nyní $\|x\| < K$, pak $\left\|\frac{x}{K}\delta\right\| < \delta \Rightarrow \left\|\frac{\boldsymbol{T}x}{K}\delta\right\| < 1 \implies \|\boldsymbol{T}x\| < \frac{K}{\delta} =: C$. □

Definice 1.4 (Prostor omezených lineárních operátorů)

$$\mathscr{L}(X, Y) \coloneqq \{\boldsymbol{T} : X \to Y,\ X, Y \text{ NLP},\ \boldsymbol{T} \text{ lineární omezený}\}.$$

Lze ukázat, že $\mathscr{L}(X, Y)$ sám o sobě je NLP s normou $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(X,Y)}$ definovanou pomocí 1.1. Navíc, pokud Y je Banachův, pak i $\mathscr{L}(X, Y)$ je úplný v normě $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(X,Y)}$, a tedy Banachův. Speciálně prostory operátorů $\mathscr{L}(X, \mathbb{R})$, $\mathscr{L}(X, \mathbb{C})$ jsou vždy Banachovy.
Další používané značení:

$$\mathscr{L}'(X) \coloneqq \mathscr{L}(X, \mathbb{K}),$$
$$\mathscr{L}(X) \coloneqq \mathscr{L}(X, X).$$

Věta 1.5 (Vliv konečné a nekonečné dimenze) *Buď $\boldsymbol{T} : X \to Y$, X, Y Banachovy, T lineární,* $\dim X = n \in \mathbb{N}$. *Potom $\boldsymbol{T}$ je omezený, a tedy i spojitý.*

Důkaz. Zvolme pevně bázi $\{x_j\}_{j=1}^n$ v prostoru X. Potom

$$x \in X \quad \implies \quad x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, \quad \implies \quad \boldsymbol{T}x = \sum_{j=1}^n \alpha_j T x_j$$

$$\|\boldsymbol{T}x\| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j|\, \|\boldsymbol{T}x_j\| \leq \underbrace{\max_{j=1,\dots n} \|\boldsymbol{T}x_j\|}_{c} \cdot \sum_{j=1}^n |\alpha_j| = c\,\|x\|_1 \leq \tilde{c}\,\|x\|$$

kde $\|a\|_1 = \sum |a_j|$ je tzv. *Manhattanská norma*, jedna z možných norem X, a poslední nerovnost plyne z ekvivalence všech norem pro $\dim X < \infty$. □

Poznámka V konečné dimenzi jsou tedy všechny lineární operátory už spojité. Přirozená otázka: platí to i pro $\dim X = \infty$? Ne: X, Y NLP, $\dim X = \infty$, pak $\exists \boldsymbol{T} : X \to Y$ lineární a neomezený. (V případě X, Y Banachovy tedy i nespojitý).

Příklad $X = \mathcal{C}^1([a,b])$ s normou $\|f\| = \sup\limits_{[a,b]}|f(x)|$. (V této normě není X úplný, proč?)
$Y = \mathcal{C}([a,b])$ s toutéž normou. (V ní je Y Banachův, proč?)

Buď nyní $f_n(x) = \sin nx, \quad f_n \in X, \quad \|f_n\| = 1. \qquad f_n'(x) = n\cos nx, \quad f_n' \in Y, \quad \|f_n'\| = n.$
Omezená množina se zobrazila na neomezenou $\implies$ operátor derivace je neomezený.

Cvičení Nech $\dim X = \infty$, Y Banachův. Vezměte $\{x_1, x_2, \dots\}$ LN spočetně nekonečnou množinu nenulových prvků v X. BÚNO $\|x_j\| = 1$ (Jinak místo nich vezmeme $\frac{x_j}{\|x_j\|}$.)
Každou LN množinu lze podle tzv. *Zornova lemmatu* (je ekvivalentní s axiomem výběru) doplnit na bázi LP. Doplňme ji tedy prvky $\{z_\alpha\}_{\alpha\in A}$, A je tzv. *indexová množina.*
Potom dle vlastností báze $B \coloneqq \{x_j\}_{j=1}^\infty \cup \{z_\alpha\}_{\alpha\in A}$ platí $\quad \forall x \in X\ \exists n(x), m(x) \in \mathbb{N}\ \exists a_j, b_j$ skaláry, že

$$x = \sum_{j=1}^{n(x)} a_j x_j + \sum_{k=1}^{m(x)} b_k z_k.$$

Definujeme $\boldsymbol{T}x \coloneqq \displaystyle\sum_{j=1}^{n(x)} a_j \boldsymbol{T} x_j + \sum_{k=1}^{m(x)} b_k \boldsymbol{T} z_k$ pro takové $x \in X$.

Tím je definován $\boldsymbol{T}$ na celém X, pokud definujeme Tx_j a Tz_α. Definujeme je takto:

$$Tx_j = j \ \ \forall j \in \mathbb{N}$$
$$Tz_\alpha = 0 \ \ \forall z_\alpha,\ \alpha \in A$$

Potom $\boldsymbol{T}$ je lineární na X (ověřte), přičemž $\|x_n\| = 1$, ale $\|\boldsymbol{T}x_n\| = n \ \ \forall x_n$.

2 Základy spektrální analýzy

2.1 Motivace: řešení jedné ODR

Příklad Uvažujme obyčejnou diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

$$\begin{aligned} y'' + y &= f(x) \quad \text{na } (0,a) \text{ pro } a > 0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde $f \in C([0,a])$.

Řešení této úlohy pro $f \equiv 0$ je $y_H = \cos x$, jak snadno zjistíme například metodou charakteristického polynomu. Pro nalezení jednoho (partikulárního) řešení rovnice s pravou stranou $f(x)$ můžeme použít např. metodu variace konstant. Z tvaru

$$y_P = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x \tag{2.2}$$

dostaneme rovnice pro $c_1(x)$, $c_2(x)$

$$\begin{aligned} c_1' \cos x + c_2' \sin x &= 0 \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x &= f(x), \end{aligned} \tag{2.3}$$

odkud plyne

$$\begin{aligned} c_1' &= -f \sin x, \\ c_2' &= f \cos x. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Tedy funkce $c_1(x) = -\int\limits_0^x f(t)\sin t \,\mathrm{d}t$, $c_2(x) = \int\limits_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t$ řeší rovnice (2.3).[1]

Dostáváme

$$y_P = -\cos x \int\limits_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t + \sin x \int\limits_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^x f(t)\left(\sin x \cos t - \cos x \sin t\right)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.5}$$

tedy celkově

$$y(x) = y_H + y_P = \cos x + \int\limits_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

Dosazením se lze přesvědčit, že funkce $y(x)$ daná předpisem (2.6) je řešením úlohy (2.1).

Poznámka Při dosazení (2.6) do (2.1) se může hodit následující lemma, které umožňuje derivování integrálu jak podle parametru, tak podle mezí.

Lemma 2.1 (O derivování integrálu dle parametru a mezí) Buďte $a, b \in \mathcal{C}^1((\alpha,\beta))$, $a((\alpha,\beta)) \subset (A,B)$, $b((\alpha,\beta)) \subset (A,B)$, $g \in \mathcal{C}^1((\alpha,\beta)\times(A,B))$. Nechť jsou dále funkce $a, b, g, \frac{\partial g}{\partial x}$ omezené na svých definičních oborech. Pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t + g(b(x))\,b'(x) - g(a(x))\,a'(x) \quad \text{pro každé } x \in (\alpha,\beta)\,. \tag{2.7}$$

[1]Pozn: Mohli jsme samozřejmě zvolit pro c_1 resp. c_2 i jiné z primitivních funkcí k $-f(x)\sin x$ resp. $f(x)\cos x$ (lišících se však jen o konstantu). Tato volba však zaručí, že y_p splňuje počáteční podmínky.

Důkaz. Protože g je spojité ve druhé proměnné, existuje $G \in \mathcal{C}^1((\alpha,\beta)\times(A,B))$ taková, že

$$\frac{\partial G}{\partial t}\,(x,t) = g(x,t), \quad (x,t)\in(\alpha,\beta)\times(A,B). \tag{2.8}$$

Podle Newtonovy-Leibnizovy formule lze psát

$$\int\limits_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)\,\mathrm{d}t = G(x,b(x)) - G(x,a(x)) \quad \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\big(G(x,b(x)) - G(x,a(x))\big) = \\ &= \underbrace{\frac{\partial G}{\partial x}\,(x,b(x)) - \frac{\partial G}{\partial x}\,(x,a(x))}_{\text{derivace pouze dle 1. proměnné}} + \underbrace{\frac{\partial G}{\partial t}\,(x,b(x))}_{\text{dle (2.8)}}\,b'(x) - \underbrace{\frac{\partial G}{\partial t}\,(x,a(x))}_{\text{dle (2.8)}}\,a'(x), \end{aligned} \tag{2.9}$$

přičemž v poslední rovnosti první dva členy jsou derivací pouze podle 1. proměnné, třetí člen je $g(x,b(x))$ a čtvrtý $g(x,a(x))$ dle (2.8).

Důkaz se dokončí tím, že se ověří rovnost

$$\frac{\partial G}{\partial x}\,(x,c) - \frac{\partial G}{\partial x}\,(x,d) = \int\limits_d^c \frac{\partial g}{\partial x}\,(x,t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.10}$$

Skutečně, je-li $G(x,t)$ primitivní ke $g(x,t)$ v proměnné t, je $\frac{\partial G}{\partial x}\,(x,t)$ primitivní ke $\frac{\partial g}{\partial x}\,(x,t)$ v proměnné t za uvedených předpokladů. Podrobnosti přenecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení. $\square$

Uvažme nyní modifiaci úlohy (2.1):

$$\begin{aligned} y''(x) + y(x) &= f(x)y(x) \quad \text{na } (0,a) \text{ pro } a>0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Na pravé straně rovnice máme tedy ve zdvojeném členu jakousi „zpětnou vazbu“. Pouze na základě analogie s první úlohou si troufneme vyslovit následující tvrzení:

Pokud existuje funkce $y \in \mathcal{C}\,([0,a])$, která splňuje vztah

$$y(x) = \cos x + \int\limits_0^x f(t)\sin(x-t)y(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.12}$$

pak je tato funkce už také prvkem $\mathcal{C}^1\,([0,a])$ a řeší úlohu (2.11).

Tohle tvrzení ověříme využitím lemmatu (2.1). Především platí, že pokud je $y \in \mathcal{C}\,([0,a])$, je integrand v rovnici (2.12) spojitý, tedy je $y \in \mathcal{C}^1([0,a])$ a máme

$$y'(x) = -\sin x + \int\limits_0^x f(t)\cos(x-t)y(t)\,\mathrm{d}t + 0, \tag{2.13}$$

odkud stejnou úvahou máme $y'(x) \in \mathcal{C}^1([0,a])$, tedy $y \in \mathcal{C}^2([0,a])$, a

$$y''(x) = -\cos x - \int\limits_0^x f(x)\sin(x-t)y(t)\,\mathrm{d}t + f(x)y(x). \tag{2.14}$$

Z posledních tří vztahů dostaneme $y'' + y = f(x)y(x)$, stejně jako $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Ověřili jsme tedy, že

$$\boxed{\text{Pokud existuje } y \in \mathcal{C}([0,a]) \text{ taková, že platí (2.12), je tato funkce kanonickým řešením úlohy (2.11).}}$$

Zatím jsme úlohu (2.11) nevyřešili, pouze jsme ji přeformulovali. Ukážeme však, že vhodným pohledem na toto přeformulování budeme schopni otázku existence (i jednoznačnosti) řešení zodpovědět.

Rozepišme ještě jednou

$$y(x) = \underbrace{\cos x}_{=:u(x)} + \int\limits_0^x \sin(x-t) f(t) y(t) \, \mathrm{d}t \tag{2.15}$$

a označme $K(x,t) = \sin(x-t)f(t)$ jako tzv. integrační faktor, tedy

$$y(x) = u(x) + \int\limits_0^x K(x,t) y(t) \, \mathrm{d}t \,, \tag{2.16}$$

což je přeformulování úlohy (2.11) na obecnější integrální rovnici (v matematické literatuře známou jako Volterrovu rovnici druhého druhu).

Nyní však přejdeme k ještě obecnější formulaci. Označíme

$$\boldsymbol{T}y(x) := \int_0^x K(x,t)y(t) \, \mathrm{d}t = \int\limits_0^x \sin(x-t) f(t) y(t) \, \mathrm{d}t \,. \tag{2.17}$$

Zobrazení $\boldsymbol{T} : \mathcal{C}([0,a]) \to \mathcal{C}([0,a])$ je (evidentně) lineární operátor. Problém hledání řešení (2.11), resp. (2.16) pak lze chápat jako hledání řešení operátorové rovnice

$$y = u + \boldsymbol{T}y \tag{2.18}$$

na Banachově prostoru $\mathcal{C}([0,a])$. Tuto rovnici lze také psát ve tvaru

$$(\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T})y = u, \tag{2.19}$$

kde $\boldsymbol{Id}$ je identický operátor na $\mathcal{C}([0,a])$. Pokud bychom ukázali existenci „inverzního operátoru k $\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T}$“, mohli bychom psát

$$y = (\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T})^{-1} u \tag{2.20}$$

a tím vyřešili zadanou úlohu.

Formulace problému ve tvaru rovnice (2.20) nás přivádí k těmto otázkám:

- Jaké jsou vlastnosti operátoru $\boldsymbol{T}$ z (2.20)?
- Za jakých podmínek existuje operátor inverzní k $\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T}$ a jaké má vlastnosti?
- Je y zavedené pomocí rovnice (2.20) skutečně řešením naší úlohy?

Nejprve odpovíme na první otázku. Operátor $\boldsymbol{T}$ je lineární a omezený, je tedy spojitý na prostoru $\mathcal{C}([0,a])$, tedy $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(\mathcal{C}([0,a]))$.

Připomeňme standartně používanou normu na $\mathcal{C}([0,a])$: $\|y\|_{\mathcal{C}([0,a])} = \sup\limits_{[0,a]}|y(x)| \quad \big(=: \|y\|_\infty \big)$.

Důkaz. Linearita je zřejmá, pro omezenost určíme nejprve

$$||\boldsymbol{T}y||_\infty = \sup_{x\in[0,a]} \Big| \int\limits_0^x \sin(x-t) f(t) y(t) \, \mathrm{d}t \Big| \leq \sup_{x\in[0,a]} \int\limits_0^x |f(t)||y(t)| \, \mathrm{d}t \leq a \, \|f\|_\infty \, \|y\|_\infty \,, \tag{2.21}$$

kde $\|f\|_\infty = \max\limits_{[0,a]}|f(x)|$ a $\|y\|_\infty = \max\limits_{[0,a]}|y(x)|$. Protože

$$\|\boldsymbol{T}\|_{\mathscr{L}(\mathcal{C}([0,a]))} = \sup_{\|y\|_\infty \le 1} ||\boldsymbol{T}y||_\infty \le \sup_{\|y\|_\infty \le 1} a\,\|f\|_\infty\,\|y\|_\infty \le a\,\|f\|_\infty < \infty, \tag{2.22}$$

tedy $\boldsymbol{T}$ je omezený operátor (pokud je interval $[0,a]$ omezený) . □

Pro odpověď na další otázky máme přichystanou následující větu. Všimněme si, že její velká abstrakce je pouze zdánlivá. V podstatě jde o popis naší úlohy v operátorové verzi.

Věta 2.2 (O von Neumannově řadě operátoru) *Buď X Banachův prostor, $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(X)$. Definujme $\boldsymbol{T}^0 \equiv \boldsymbol{Id}$, $\boldsymbol{T}^{j+1}y = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{T}^j y)$ tzv. iterovaný operátor. Dále nechť je splněna alespoň jedna z následujících tří podmínek:*

a) $||\boldsymbol{T}||_{\mathscr{L}(X)} < 1$,

b) $\sum\limits_{j=0}^{\infty} ||\boldsymbol{T}^j||_{\mathscr{L}(X)} < \infty$,

c) $\sum\limits_{j=0}^{\infty} ||\boldsymbol{T}^j y||_X < \infty \quad \forall y \in X$.

Potom

1. *$\forall u \in X$ existuje jediné $y \in X$ takové, že $(\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T})y = u$.*
2. *Definujeme-li zobrazení „$u \mapsto y$" z předchozího bodu a označíme-li jej $(\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T})^{-1}$, platí:*

$$(\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T})^{-1}(\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T}) = (\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T})(\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T})^{-1} = \boldsymbol{Id}, \tag{2.23}$$

a navíc

$$(\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{T}^j, \tag{2.24}$$

kde sumu sumu $\sum\limits_{j=0}^{\infty}$ chápeme jako $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{n}$ ve smyslu konvergence v $\mathscr{L}(X)$.

Poznámka

1. Řadě (2.24) se říká von Neumannova řada operátoru $\boldsymbol{T}$
2. V následujícím ukážeme řetězec podmínek (a)⇒(b)⇒(c).

   Platí $||\boldsymbol{T}^2 y||_X = ||\boldsymbol{T}(\boldsymbol{T}y)||_X \le ||\boldsymbol{T}||_{\mathscr{L}}(X)||\boldsymbol{T}y||_X \le ||\boldsymbol{T}||^2_{\mathscr{L}(X)}\,\|y\|_X$, odkud $||\boldsymbol{T}^2|| = \sup\limits_{\|y\|_X \le 1} ||\boldsymbol{T}^2 y||_X \le ||\boldsymbol{T}||^2$ a indukcí snadno

$$||\boldsymbol{T}^j||_{\mathscr{L}(X)} \le ||\boldsymbol{T}||^j_{\mathscr{L}(X)}. \tag{2.25}$$

Pokud tedy platí (a), je $\sum_{j=0}^n ||\boldsymbol{T}^j|| \le \sum_{j=0}^n ||\boldsymbol{T}||^j \le \sum_{j=0}^\infty ||\boldsymbol{T}||^j < \infty$ a limitní přechod $n \to \infty$ vlevo dává (b). Pokud platí (b), je $\sum_{j=0}^n ||\boldsymbol{T}^j y|| \le \|y\| \sum_{j=0}^n ||\boldsymbol{T}^j|| \le \|y\| \sum_{j=0}^\infty ||\boldsymbol{T}^j|| < \infty$, odkud (c).

Skutečně tedy (a)⇒(b)⇒(c) a bude stačit ukázat, že podmínka (c) implikuje tvrzení věty. [2]

Ještě než větu dokážeme, přesvědčme se, že operátor $\boldsymbol{T}$ definovaný v (2.17), splňuje její předpoklady: $\mathcal{C}$ je Banachův prostor a $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(\mathcal{C}([0,a]))$. V (2.22) jsme navíc ukázali, že $||\boldsymbol{T}||_{\mathscr{L}} \le a\,\|f\|_\infty$.

Odtud ihned dostáváme, že pro každé $f \in \mathcal{C}([0,b])$ existuje takové $a \in (0,b)$, že $||\boldsymbol{T}|| < 1$. Z tvrzení věty pak dostaneme „existenci a jednoznačnost" řešení úlohy (2.12), tedy i (2.11) na příslušném *zkráceném* intervalu $[0,a]$ tak, aby $a\,\|f\|_\infty < 1$. Toto je typický představitel tzv. vět o „lokální" existenci řešení diferenciální rovnice. Nevýhoda tohoto tvrzení spočívá v tom, že tento interval existence řešení závisí na velikosti pravé strany f.

[2] Jsme však vděčni za to, že máme tři různé podmínky: různé operátory mohou splňovat (a), (b), nebo (c), viz dále.

Toto pozorování nám zároveň bude sloužit i jako poučení. Ukážeme nyní, že $\boldsymbol{T}$ splňuje podmínku (b) bez jakýchkoli požadavků na velikost a. Stačí nerovnosti zavést jemněji. Je

$$|\boldsymbol{T}y(x)| \leq \int\limits_0^x |f(t)||y(t)| \, \mathrm{d}t \leq x \, \|f\|_\infty \, \|y\|_\infty \, ,$$

kde $\|f\|_\infty = \max\limits_{[0,x]}|f(t)|$ a $\|y\|_\infty = \max\limits_{[0,x]}|y(t)|$. Všimněme si, že zatím nehledáme $\sup\limits_{x\in[0,a]}$. Dále

$$|\boldsymbol{T}^2 y(x)| \leq \int\limits_0^x |f(t)||\boldsymbol{T}y(t)| \, \mathrm{d}t \leq \|f\|_\infty^2 \, \|y\|_\infty \int\limits_0^x t \, \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} \, \|f\|_\infty^2 \, \|y\|_\infty \, ,$$

odkud dostaneme indukcí

$$|\boldsymbol{T}^j y(x)| \leq \frac{x^j}{j!} \, \|f\|_\infty^j \, \|y\|_\infty \, .$$

Až nyní nalezneme supremum přes x a dostaneme

$$\left\|\boldsymbol{T}^j y\right\| \leq \frac{a^j}{j!} \, \|f\|_\infty^j \, \|y\|_\infty \, ,$$

a tedy

$$\left\|\boldsymbol{T}^j\right\| = \sup_{\|y\|_\infty \leq 1} \left\|\boldsymbol{T}^j y\right\| \leq \frac{a^j}{j!} \, \|f\|_\infty^j \, .$$

Odtud

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\|\boldsymbol{T}^j\right\| \leq \exp(a \, \|f\|_\infty) < \infty.$$

Podmínka (b) je tedy splněna a my jsme dospěli k závěru, že pokud dokážeme Větu 2.2, ukázali jsme zároveň existenci a jednoznačnost (klasického) řešení úlohy (2.11) pro libovolný (ale omezený) interval $[0, a]$, a pro libovolnou $f \in \mathcal{C}([0, a])$.

Důkaz Věty 2.2. Podle bodu 2 předchozí poznámky stačí ukázat, že tvrzení věty plyne z předpokladu (c).

Definujme následující posloupnost prvků $y_n \in X$ (tzv. „iterační proces“)

$$y_0 \in X \text{ libovolný}$$
$$y_{n+1} := u + \boldsymbol{T} y_n.$$

Máme

$$y_1 = u + \boldsymbol{T} y_0$$
$$y_2 = u + \boldsymbol{T} y_1 = u + \boldsymbol{T} u + \boldsymbol{T}^2 y_0,$$

indukcí snadno plyne

$$y_n = \sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{T}^j u + \boldsymbol{T}^n y_0. \tag{2.26}$$

Ukážeme, že posloupnost y_n má v X limitu. Protože X je Banachův, a tedy úplný, stačí pro konvergenci y_n ukázat, že $\{y_n\}$ je Cauchyovská posloupnost. Zvolme tedy $\epsilon > 0$, uvažujme $n > m$ a počítejme

$$y_n - y_m = \sum_{j=m}^{n-1} \boldsymbol{T}^j u + \boldsymbol{T}^n y_0 - \boldsymbol{T}^m y_0,$$

tedy

$$||y_n - y_m|| \leq \sum_{j=m}^{n-1} ||\boldsymbol{T}^j u|| + ||\boldsymbol{T}^n y_0|| + ||\boldsymbol{T}^m y_0||.$$

Protože platí poznámka (c), je první člen menší než ϵ pro dostatečně velká $n > m$. Stejně tak členy $||\boldsymbol{T}^n y_n||$, $||\boldsymbol{T}^m y_0||$ jsou (jako n-tý resp. m-tý člen konvergentní řady tvaru (c)) menší než ϵ pro dostatečně velká n, m.

Posloupnost $\{y_n\}$ je tedy Cauchyovská v Banachově prostoru X, proto je konvergentní v X, tedy existuje $y \in X$ takové, že $y_n \xrightarrow{X} y$. Protože $\boldsymbol{T}$ je spojitý, je $\boldsymbol{T}y_n \xrightarrow{X} \boldsymbol{T}y$, tedy platí i

$$\begin{array}{ccl} y_{n+1} & = & u + \boldsymbol{T}y_n \\ \downarrow & & \qquad\ \downarrow \\ y & = & u + \ \boldsymbol{T}y \end{array}$$

a y je řešením rovnice $y = u + \boldsymbol{T}y$ (pro libovolné $u \in X$). Jednoznačnost tohoto řešení ukážeme sporem. Nechť jsou řešení dvě, y a z, tedy nechť platí

$$y = u + \boldsymbol{T}y$$

$$z = u + \boldsymbol{T}z.$$

Odečtením těchto rovnic a označením $w = y - z$ získáme vztah $w = \boldsymbol{T}w$.

Odtud ovšem indukcí plyne $w = \boldsymbol{T}w = \boldsymbol{T}^2 w = \cdots = \boldsymbol{T}^j w \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Tedy $||w|| = ||\boldsymbol{T}^j w|| \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Řada $\sum_{j=0}^{\infty} ||\boldsymbol{T}^j w||$ je ovšem konvergentní řada typu (c), tedy

$$||w|| = \lim_{j\to\infty} ||\boldsymbol{T}^j w|| = 0,$$

odkud $w = 0$, a tedy $y = z$.

Úloha $y = u + \boldsymbol{T}y$ má tedy $\forall u \in X$ právě jedno řešení $y \in X$. Jinak řečeno: Víme

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T} \text{ je lineární a spojité} \\ \forall u \in X \quad \exists! y \in X, (\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T})y = u \end{array}\right\} = \boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T} \text{ je } \textit{na} \text{ a } \textit{prosté}$$

Zobrazení $u \mapsto y$ je tedy dobře definované zobrazení z X do X. Označme jej $(\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T})^{-1}$, tj $y = (\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T})^{-1}u$, $\forall u \in X$. Je lineární a prosté, nevíme nic o jeho spojitosti. Z 2.26 dostaneme

$$\begin{array}{ccl} y_n & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \boldsymbol{T}^j u + \boldsymbol{T}^n y_0 \\ \downarrow & & \qquad\qquad\ \downarrow \\ y & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{T}^j u + \quad 0, \end{array}$$

tedy máme pro všechna $u \in X : (\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T})^{-1}u = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{T}^j u$ neboli $(\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{T}^j$ ve smyslu rovnosti operátorů.

Konečně, označme

$$S_N \circ \boldsymbol{T} := \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{T}^j.$$

Pak

$$S_N \circ (\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T}) = \sum_{j=0}^{N} \boldsymbol{T}^j - \sum_{j=1}^{N+1} \boldsymbol{T}^j = \boldsymbol{T}^0 - \boldsymbol{T}^{N+1} = \boldsymbol{Id} - \underbrace{\boldsymbol{T}^{N+1}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

a podobně pro $(\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T}) \circ S_N$ □

Poznámka Časem uvidíme, že platí: je-li operátor $\boldsymbol{T} : X \mapsto X$ lineární, omezený, prostý a na, pak jeho *inverze* $\boldsymbol{T}^{-1}$ (která existuje) je také *lineární* a *omezená*, tj. spojitá. To vnáší do naší úlohy tzv. *prvek stability.* Je-li totiž inverzní operátor (v našem případě $(\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T})^{-1}$ spojitý, pak to znamená, že pro

$$u_n \xrightarrow{X} u \ \Rightarrow \ \underbrace{(\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T})^{-1}u_n}_{y_n} \xrightarrow{X} \underbrace{(\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{T})^{-1}u}_{y}$$

jinak řečeno, „blízkým pravým stranám rovnice u_n odpovídají blízká řešení“, či „malé změny na pravé straně rovnice způsobují malé změny řešení“. Právě tomuto se říká *stabilita řešení.*

Příklad Uvažujme

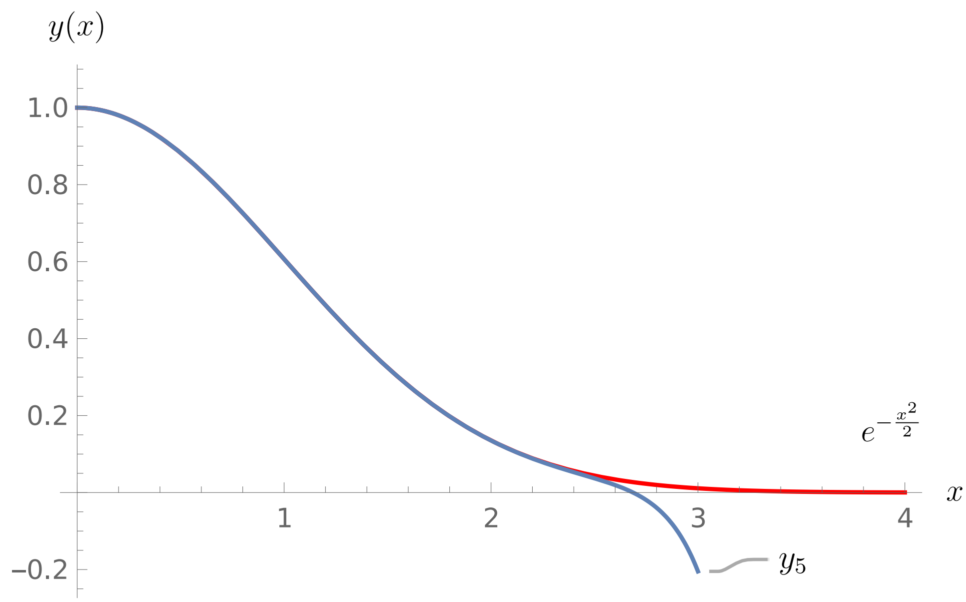
$$
\begin{aligned}
y'' + y &= x^2 y\\
y(0) &= 1\\
y'(0) &= 0.
\end{aligned}
$$

Úloha má dle předchozí teorie na libovolném $[0,a]$ jediné řešení. Můžeme ověřit, že funkce $y(x) = e^{-x^2/2}$ je tímto řešením.

Důkaz předchozí věty však také ukazuje, že toto řešení je možné získat formou iterací (tj. lze se k němu libovolě přiblížit). Uvažujme $y_0 \equiv 0$ a napišme prvních pár iterací. Zdá se vám, že konverguje k $e^{-x^2/2}$? Určitě z toho plyne nějaké zajímavé poučení. ☺

Při $y_0 = 0$ dostáváme pro y_5

$$
\begin{aligned}
y_5(x) = &\cos x + \tfrac{164925}{2048} x \sin x - \tfrac{164925}{2048} x^2 \cos x - \tfrac{54975}{1024} x^3 \sin x + \tfrac{165437}{6144} x^4 \cos x + \tfrac{32383}{3072} x^5 \sin x\\
&- \tfrac{154871}{46080} x^6 \cos x - \tfrac{143131}{161280} x^7 \sin x + \tfrac{126481}{645120} x^8 \cos x + \tfrac{12983}{362880} x^9 \sin x - \tfrac{18889}{3628800} x^{10} \cos x\\
&- \tfrac{7}{12960} x^{11} \sin x + \tfrac{1}{31104} x^{12} \cos x
\end{aligned}
$$



Obrázek 1: Srovnání přesného řešení a páté iterace y_5.

2.2 Základní pojmy spektrální analýzy

Budeme zkoumat operátorovou rovnici pro neznámé $x \in X$

$$
(\boldsymbol{T} - \lambda \boldsymbol{Id})x = u, \quad \lambda \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(x),\ u \in X \text{ Banachův prostor} \tag{2.27}
$$

Motivací k tomu je předchozí paragraf. Označme $\boldsymbol{T}_\lambda \coloneqq \boldsymbol{T} - \lambda \boldsymbol{Id}$, pak $\boldsymbol{T}_\lambda \in \mathscr{L}(X) \Leftrightarrow \boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(X)$.

Označme obor hodnot (range) operátoru $\boldsymbol{T}_\lambda$

$$
\mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda) \coloneqq \{y \in X,\ \exists x \in X,\ \boldsymbol{T}_\lambda x = y\} \quad (= \boldsymbol{T}_\lambda(X)).
$$

Otázky řešitelnosti rovnice (2.27) lze přeformulovat v řeči operátoru $\boldsymbol{T}_\lambda$ následovně.

V řeči rovnic	V řeči operátoru
$\exists$ řešení pro libovolnou pravou stranu $u \in X$?	Je $\boldsymbol{T}_\lambda$ *na*, tj je $\mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda) = X$?
Pokud řešení pro dané $u \in X$ existuje, je určeno jednoznačně?	Je $\boldsymbol{T}_\lambda$ *prostý* na X?
Pokud $\forall u \in \mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda)\ \exists! x \in X;\ \boldsymbol{T}_\lambda x = u$, je toto řešení *stabilní*? (viz pozn. níže)	Je-li $\boldsymbol{T}_\lambda$ prostý, je potom $\boldsymbol{T}_\lambda^{-1}$ spojitý na $\mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda)$?

Poznámka Pod pojmem *stabilní řešení* míníme (zjednodušeně) situaci, kdy v rovnici $\boldsymbol{T}_\lambda x = u$, která má jednoznačně určená řešení pro $\forall u \in \mathcal{U}(u_0)$ platí, že „malé změny $u \in \mathcal{U}(u_0)$“ mají za následek „malé změny řešení“. To přesně odpovídá situaci, kdy je inverzní zobrazení $\boldsymbol{T}_\lambda^{-1}$ spojité na $\mathcal{U}(u_0)$. Tato vlastnost je velmi důležitá při hledání přibližného řešení. Při něm často aproximujeme pravou stranu u nějakou „jí blízkou pravou stranou“ $\overline{u}$ a doufáme, že i řešení $\overline{x}$, které odpovídá pravé straně $\overline{u}$, bude blízké řešení x, odpovídajícímu pravé straně u. Pro *nestabilní* operátory to však nemusí být pravda.

Rozdíl mezi konečnou a nekonečnou dimenzí.

V konečné dimenzi je $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(X) \Leftrightarrow \exists$ matice $M \in \mathcal{M}^{n\times m}$ taková, že $\boldsymbol{T}(x) = Mx \quad \forall x \in X$ (v X volíme jednu pevnou bázi).

Potom platí

$$\boldsymbol{T} \text{ je prostý } \Leftrightarrow \boldsymbol{T} \text{ je na } \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{M \text{ reprezentující } \boldsymbol{T} \text{ je regulární.}} \tag{2.28}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{T}^{-1} \text{ je prostý } \Leftrightarrow \boldsymbol{T}^{-1} \text{ je na} \Leftrightarrow \overbrace{M^{-1} \text{ je regulární a reprezentuje } \boldsymbol{T}^{-1}} \text{ (tj } \boldsymbol{T}^{-1} \text{ je lin.)} \tag{2.29}$$

Protože v konečné dimenzi je každý lineární operátor spojitý, je i $\boldsymbol{T}^{-1} \in \mathscr{L}(X)$.

V konečné dimenzi tedy platí „všechno nebo nic“; je to tzv. konečně dimenzionální Fredholmova alternativa pro $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(X)$; $\dim X = n$, která říká, že platí právě jedna z následujících situací:

1. $\boldsymbol{T}$ je prostý, na a má spojitou inverzi
2. $\boldsymbol{T}$ není prostý, není na a nemá spojitou inverzi

V nekonečné dimenzi není obecně žádný vztah mezi prostotou a zobrazením na.

Příklad Definujme prostor posloupností ℓ_2

$$\ell_2 := \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \in \mathbb{C};\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

Lze ukázat, že ℓ_2 s normou $||\{x_n\}||_{\ell_2}^2 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ je Banachův prostor (je dokonce Hilbertův, více později). Na ℓ_2 definujme dva tzv. *operátory posunu* („shift operators“)

$$\begin{aligned} A_1 &: (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots) \\ A_2 &: (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots). \end{aligned}$$

Evidentně

$$\begin{aligned} ||A_1 x||_{\ell_2} &= ||x||_{\ell_2} \Rightarrow ||A_1|| = \sup_{||x|| \le 1} ||A_1 x|| = 1 \\ ||A_2 x||_{\ell_2} &= ||x||_{\ell_2} \Rightarrow ||A_2|| \le 1, \end{aligned}$$

tedy oba jsou omezené, tedy spojité, tedy $A_1, A_2 \in \mathscr{L}(\ell_2)$.
Přitom

- A_1 je prosté, tedy různým prvkům přiřadí různé prvky, ale není na (nic se nezobrazí např. na $(1, 0, 0, \dots)$
- A_2 je na, ale není prostý (rozmyslete).

Nicméně, co se týče stability, tak i v nekonečné dimenzi platí následující hluboká věta.

Věta 2.3 (O spojitosti inverze bijektivního zobrazení) *Nechť X je Banachův prostor, $\boldsymbol{A} \in \mathscr{L}(X)$ je prosté a na. Potom $\boldsymbol{A}^{-1} \in \mathscr{L}(X)$, tedy $\boldsymbol{A}^{-1}$ je lineární a spojitý operátor.*

Důkaz. Plyne z věty o otevřeném zobrazení. Viz Lukeš 4.13-4.16. □

Tímto se zdá, že problém stability řešení je vyřešen: stačí prostota a na. Ano, pro lineární omezené (tj. spojité operátory tomu tak je. Ale např, pro lineární a nespojité, nebo pro nelineární operátory není situace tak jednoduchá.

Možné stavy operátoru

Buď $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(X)$, X je Banachův, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{T}_\lambda := \boldsymbol{T} - \lambda \boldsymbol{Id} \in \mathscr{L}(X)$. Pak v závislosti na $\lambda \in \mathbb{C}$ může operátor $\boldsymbol{T}_\lambda$ mít různé vlastnosti z hlediska jeho prostoty, spojitosti inverze a velikosti $\mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda)$. Následující tabulka shrnuje všechny možnosti, přičemž dvě z nich nemohou nastat: ta, která je vyloučena větou 2.3 (označeno „V1“) a ta, která je vyloučena lemmatem 2, které zformulujeme a dokážeme za níže (označeno „L1“).

Tabulku je nutno chápat tak, že pomocí ní definujeme různé kategorie, do kterých může patřit parametr $\lambda \in \mathbb{C}$. Tedy např. levý horní roh tabulky je nutno číst takto: „$\lambda \in \mathbb{C}$ je regulárním bodem $\boldsymbol{T}$, pokud $\boldsymbol{T}_\lambda$ je prosté, $\boldsymbol{T}_\lambda^{-1}$ spojité a $\mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda) = X$“.

	$\overbrace{\mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda) = X}^{\boldsymbol{T}_\lambda \text{ je „na“}}$	$\overbrace{\mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda) \neq X,\ \overline{\mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda)} = X}^{\boldsymbol{T}_\lambda \text{ není „na“}}$	$\overbrace{\overline{\mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda)} \neq X}^{\boldsymbol{T}_\lambda \text{ není „na“}}$
$\boldsymbol{T}_\lambda$ prostý a $\boldsymbol{T}_\lambda^{-1}$ (který $\exists$) je spojitý	λ je regulární bod $\boldsymbol{T}$	~~L1~~	$\lambda \in \sigma_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{T})$
$\boldsymbol{T}_\lambda$ prostý a $\boldsymbol{T}_\lambda^{-1}$ (který $\exists$) není spoj.	~~V1~~	$\lambda \in \sigma_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{T})$	$\lambda \in \sigma_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{T})$
$\boldsymbol{T}_\lambda$ není prostý, tj. $\left(\nexists \boldsymbol{T}_\lambda^{-1}\right)$	$\lambda \in \sigma_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{T})$	$\lambda \in \sigma_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{T})$	$\lambda \in \sigma_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{T})$

Tabulka 1: Spektrální tabulka pro lineární omezené operátory v nekonečné dimenzi.

Poznámka • $\sigma_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{T})\ldots$ tzv. *spojité spektrum* operátoru $\boldsymbol{T}$. Pokud $\lambda \in \sigma_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{T})$, tak rovnice $\boldsymbol{T}_\lambda y = u$ nemá řešení pro každou pravou $u \in X$, nicméně ke každému $\epsilon > 0$ existuje $u_\epsilon \in X$, $\|u_\epsilon - u\|_X < \epsilon$ a přitom existuje řešení rovnice $\boldsymbol{T}_\lambda y = u_\epsilon \in X$ (to je důsledek toho, že $\overline{\mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda)} = X$). Někdy se jim říká „skorořešení“. Zároveň však $\boldsymbol{T}_\lambda$ je nestabilní ($\boldsymbol{T}_\lambda^{-1}$ je nespojitý), takže nedává dobrý smysl se bavit o tom, co se děje s řešeními, když trochu měníme pravé strany u_ϵ.

- $\sigma_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{T})\ldots$ tzv. *reziduální spektrum* $\boldsymbol{T}$. Protože $\overline{\mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda)} \neq X$, nejsou k dispozici řešení pro velkou část $u \in X$
- $\sigma_{\mathrm{P}}\ldots$ tzv. *bodové spektrum* $\boldsymbol{T}$. $\boldsymbol{T}_\lambda$ není prostý, tj.

$$\exists x_1 \neq x_2,\ \boldsymbol{T}_\lambda x_1 = \boldsymbol{T}_\lambda x_2$$

def. $x \coloneqq x_1 - x_2 \neq 0$, tj. $\exists x \neq 0$ tak, že

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_\lambda x &= 0 \\ (\boldsymbol{T} - \lambda \boldsymbol{Id})x &= 0 \\ \boldsymbol{T}x &= \lambda x. \end{aligned}$$

Tedy $\lambda \in \sigma_P(\boldsymbol{T}) \Leftrightarrow \exists x \neq 0 :\ \boldsymbol{T}x = \lambda x \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\underline{\lambda \text{ je vlastní číslo } T}$ a $x \neq 0$ je odpovídající vl. vektor.

Definice 2.4 (Spektrum operátoru) Nechť X je Banachův prostor a $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(X)$. Množinu

$$\sigma(\boldsymbol{T}) \coloneqq \sigma_C(\boldsymbol{T}) \cup \sigma_R(\boldsymbol{T}) \cup \sigma_P(\boldsymbol{T})$$

nazýváme spektrem operátoru $\boldsymbol{T}$.

<u>Pozorování:</u>

- $\lambda \in \sigma(\boldsymbol{T}) \Leftrightarrow \boldsymbol{T}_\lambda$ není prostý nebo není na
- λ regulární $\Leftrightarrow \boldsymbol{T}_\lambda$ prostý, na (a pak už $\boldsymbol{T}_\lambda^{-1}$ spojitý)
- Ne každý prvek spektra T je vlastním číslem.

Definice 2.5 (Spektrální poloměr) Nechť X je Banachův prostor a $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(X)$. Spektrální poloměr operátoru $\boldsymbol{T}$ definujeme předpisem

$$\rho(\boldsymbol{T}) \coloneqq \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(\boldsymbol{T})\}\ .$$

<u>Pozorování:</u> Pokud je $\rho(\boldsymbol{T}) < \infty$, pak platí $|\lambda| > \rho(\boldsymbol{T}) \Rightarrow \lambda$ regulární.

Konečně se dostáváme ke slíbenému lemmatu ze spektrální tabulky.

Lemma 2.6 (O nespojitosti inverze hustě definovaného injektivního operátoru) Nechť X je Banachův prostor, $\boldsymbol{A} \in \mathscr{L}(X)$. Nechť dále platí

1. $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}) \neq X$, $\overline{\mathcal{R}(\boldsymbol{A})} = X$,
2. existuje $\boldsymbol{A}^{-1} : \mathcal{R}(\boldsymbol{A}) \to X$ (tj. $\boldsymbol{A}$ je prostý na X).

Pak $\boldsymbol{A}^{-1}$ není spojitý.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že operátor $\boldsymbol{A}^{-1}$ je spojitý na $\mathcal{R}(\boldsymbol{A})$. Díky vlastnosti $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}) \neq X$ můžeme zvolit $y \in X \backslash \mathcal{R}(\boldsymbol{A})$ a díky vlastnosti $\overline{\mathcal{R}(\boldsymbol{A})} = X$ existuje posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{R}(\boldsymbol{A})$ taková, že $y_n \to y$. Navíc díky $\overline{\mathcal{R}(\boldsymbol{A})} = X$ umíme najít i posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{R}(\boldsymbol{A})$ takovou, že $\boldsymbol{A}x_n = y_n$, což lze díky existenci inverze psát jako $x_n = \boldsymbol{A}^{-1}y_n$. Díky spojitosti $\boldsymbol{A}^{-1}$ a cauchyovskosti $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská. Díky úplnosti prostoru X tato posloupnost konverguje, označme limitní prvek x. Pak díky linearitě a spojitosti $\boldsymbol{A}$ můžeme psát

$$\boldsymbol{A}x = A(\lim_{n\to\infty} x_n) \overset{\boldsymbol{A}\text{ spoj.}}{=} \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

Protože $\exists x \in X$ takové, že $\boldsymbol{A}x = y$, je $y \in \mathcal{R}(\boldsymbol{A})$. Tím jsme dostali spor s prvním bodem výše. $\square$

Poznámka (Tabulka 1 v konečné dimenzi) Víme, že $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(X)$; $\dim X = n \in \mathbb{N}$ je reprezentován maticí $M \in \mathcal{M}^{n\times n}$.

Potom platí:

$$
\begin{array}{c}
\boldsymbol{T} \text{ je prostý } \Leftrightarrow \boldsymbol{T} \text{ je na } \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{M \text{ je regulární}} \text{ a reprezentuje } \boldsymbol{T} \\
\Updownarrow \\
\boldsymbol{T}^{-1} \text{ je prostý } \Leftrightarrow \boldsymbol{T}^{-1} \text{ je na } \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{M^{-1} \text{ je regulární}} \text{ a reprezentuje } \boldsymbol{T}^{-1}
\end{array}
$$

Za výše popsané situace je navíc vždy i $\boldsymbol{T}^{-1} \in \mathscr{L}(X)$.

Tabulku 1 tedy lze schematicky upravit do tvaru

	1	2, 3	4
	2	3, 4	4
	4	3	1

Tabulka 2: Tabulka 1 přepsaná v konečné dimenzi

1. V konečné dimenzi nastává pouze tato situace, a tedy zde máme

   1. $\lambda \in \mathbb{C} \to \lambda$ je buď regulární nebo už je to vl. číslo
   2. $\sigma(\boldsymbol{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \text{ je vlastní číslo } \boldsymbol{T}\} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda \text{ je vl. číslo } M\}$.

2. Nemůže obecně nastat

3. Tento sloupec popisuje situaci $\mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda) \neq X$, $\overline{\mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda)} = X$. Ta však v konečné dimenzi nastat nemůže, protože v ní platí $\mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda) = \overline{\mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda)}$

4. Namůže nastat, jelikož pro $\dim X = n$ je $\boldsymbol{T}$ je prostý $\Leftrightarrow \boldsymbol{T}_\lambda$ je na.

Následující věta ukazuje, že $\rho(\boldsymbol{T})$ je pro $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(X)$ vždy konečný.

Věta 2.7 *X Banachův, $T \in \mathscr{L}(X)$ (tj. $||T|| < \infty$). Potom pro $|\lambda| > ||\boldsymbol{T}||$ platí*

$$
\begin{aligned}
a): &\quad \lambda \notin \sigma(\boldsymbol{T}),\ tj.\ \lambda \text{ je regulární} \\
b): &\quad (T - \lambda \boldsymbol{Id})^{-1} = T_\lambda^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} \in \mathscr{L}(X)
\end{aligned}
$$

Poznámka

- Z a) ihned plyne $\rho(\boldsymbol{T}) \leq ||T||$.
- Řada v b) se nazývá von Neumannova řada operátoru $(\boldsymbol{T} - \lambda \boldsymbol{Id})$. Tvrzení b) mimo jiné říká, že pokud $\|T\| < |\lambda|$, je operátor T_λ prostý, spojitý, na, a má spojitou inverzi.

Důkaz. Je-li $|\lambda| > ||\boldsymbol{T}||$, pak jistě $\lambda \neq 0$. Položme $\boldsymbol{A} := \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{T}$. Potom $||\boldsymbol{A}|| = \frac{1}{|\lambda|}||\boldsymbol{T}|| < 1$ a na $\boldsymbol{A}$ můžeme použít větu 2.2. To nám dá, že:

a) $\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{A}$ je prostý a na $\Rightarrow \boldsymbol{T} - \lambda \boldsymbol{Id} = (-\lambda)(\boldsymbol{Id} - \boldsymbol{A})$ je prostý a na $\xRightarrow{\text{věta 2.2}} (\boldsymbol{T} - \lambda \boldsymbol{Id})^{-1}$ je spojitý. Odtud je λ regulární atd.

b) Věta 2.2 dá i

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{Id}-\boldsymbol{A})^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k \\
(\boldsymbol{Id}-\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{T})^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{T}^k}{\lambda^k} \Big/ \cdot (-1) \\
\left(\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{T}-\boldsymbol{Id}\right)^{-1} &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{T}^k}{\lambda^k} \Big/ \cdot \frac{1}{\lambda} \quad \textit{pozor!}^3 \\
\underbrace{\lambda^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{T}-\boldsymbol{Id}\right)^{-1}}_{(\boldsymbol{T}-\lambda\boldsymbol{Id})^{-1}} &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{T}^k}{\lambda^{k+1}}
\end{aligned}
$$

□

[3] Inverzní zobrazení k y=3x je y=x/3, tedy inverzní robrazení má hodnotu koeficientu převrácenou. Na levé straně rovnosti lze tedy (alternativně) postupovat:

$$
\left(\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{T}-\boldsymbol{Id}\right)^{-1} = \lambda(T-\lambda\boldsymbol{Id})^{-1}\,,
$$

a pak je jasné, proč musíme rovnici dělit λ.

Příklad Uvažujme $\ell_2 := \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \in \mathbb{C},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$ prostor všech komplexních posloupností, které jsou tzv. „sčítatelné s kvadrátem“. Platí, že ℓ_2 se skalárním součinem $\big(\{x_n\},\{y_n\}\big)_{\ell_2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$, který indukuje normu $\|\{x_n\}\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$, je úplný, a tedy Hilbertův (tj. i Banachův) prostor.
Uvažujme operátor

$$\boldsymbol{T} : \ell_2 \to \ell_2$$
$$\boldsymbol{T} : (x_1, x_2 \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots).$$

Protože $||\boldsymbol{T}x||_{\ell_2} = ||x||_{\ell_2}$, je $||\boldsymbol{T}|| = \sup\limits_{||x|| \le 1} ||\boldsymbol{T}x|| = \sup\limits_{||x|| \le 1} ||x|| = 1$.
Tedy $\rho(\boldsymbol{T}) \le ||T|| = 1$, a proto $|\lambda| > 1 \Rightarrow \lambda$ je regulární. Celé spektrum $\boldsymbol{T}$ tedy leží v jednotkovém kruhu v $\mathbb{C}$.

- $\lambda = 0$: Už víme, že $\boldsymbol{T}$ není na, je prostý. Zároveň je vidět, že žádný prvek z ℓ_2 se pomocí $\boldsymbol{T}$ nezobrazí na $(a, 0, 0, \ldots)$, $a \in \mathbb{C},\ a \neq 0$. Nelze tedy žádnou posloupností z $\mathcal{R}(\boldsymbol{T})$ dokonvergovat např. k prvku $(1, 0, 0, \ldots)$. Proto $\overline{\mathcal{R}(\boldsymbol{T})} \neq \ell_2$, odkud plyne $0 \in \sigma_R(\boldsymbol{T})$ (plyne z tabulky 1).
- $|\lambda| \le 1,\ \lambda \neq 0$

1. Ukážeme nejprve, že žádné z těchto λ není vlastním číslem $\boldsymbol{T}$. Pokud by tomu tak bylo, tak $\exists x \neq 0$, že
$$\boldsymbol{T}x = \lambda x$$
$$(0, x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots),$$
tj.
   i) $\lambda x_1 = 0$
   ii) $\lambda x_k = x_{k-1} \quad \forall k = 2, 3, 4, \ldots$

   Z i) plyne $x_1 = 0$ (neboť $\lambda \neq 0$), z ii) pak indukcí plyne $x_2 = x_3 = \cdots = 0$. Tedy $x = 0$, což je však spor s tím, že by to měl být vlastní vektor $\boldsymbol{T}$.

2. Ukážeme, že $\boldsymbol{T}_\lambda$ není na, speciálně, že žádné $x \in \ell_2$ se nezobrazí na $(1, 0, 0, \ldots)$. Nechť takové $x \in \ell_2$ existuje. Pak tedy
$$\underset{(-\lambda x_1,\, x_1 - \lambda x_2,\, x_2 - \lambda x_3,\, \ldots)}{\boldsymbol{T}_\lambda x \overset{}{\underset{\|}{}}} = (1, 0, 0, \ldots),$$

tedy $1 = -\lambda x_1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\lambda}$
$$k = 1, 2, 3, \ldots \quad x_k - \lambda x_{k+1} = 0 \ \Rightarrow\ x_{k+1} = \frac{x_k}{\lambda} \ \Rightarrow\ x = \left(-\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda^2}, -\frac{1}{\lambda^3}, \ldots \right)$$

Zdánlivě jsme tedy takové x našli, ale $||x||_{\ell_2}^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2k}} = \infty$, neb jde o geometrickou řadu s kvocientem $1/\lambda^2$, pro který $|\lambda| \le 1 \Rightarrow |1/\lambda^2| \ge 1$. Protože $\boldsymbol{T}_\lambda$ je lineární a $(1, 0, 0, \ldots) \notin \mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda)$, tak platí také $(a, 0, 0, \ldots) \notin \mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda)\ \forall a \in \mathbb{C},\ a \neq 0 \ \Rightarrow\ \overline{\mathcal{R}(\boldsymbol{T}_\lambda)} \neq \ell_2$.
Pohybujeme se tedy v posledním sloupci tabulky 1, $\forall \lambda \neq 0,\ |\lambda| \le 1$. Protože však současně žádné takové λ není vlastním číslem, je $\lambda \in \sigma_R(\boldsymbol{T})$ pro všechna taková λ. (To by šlo také nezávisle ukázat tak, že bychom ukázali prostotu $\boldsymbol{T}_\lambda$. Zkuste si.)
Závěr: Pro toto $\boldsymbol{T}$ platí $\sigma(\boldsymbol{T}) = \sigma_R(\boldsymbol{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \le 1\}$. Spektrum je tedy právě celý jednotkový kruh, je tedy nespočetně mnoho prvků spektra (a přitom žádný z nich není vl. číslem). Takový operátor je tedy „poměrně nehezký“, ale přitom negeneruje žádné vl. vektory.

Cvičení Zkuste spektrálně analyzovat

a) Mějme operátor $\boldsymbol{T} : \ell_2 \to \ell_2$

$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto \left(x_2, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{3}, \frac{x_5}{4}, \dots\right)$ Zkuste navíc rozmyslet, jaká je $||T||$.

Řešení: $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(\ell_2),\ \sigma(\boldsymbol{T}) = \sigma_P(\boldsymbol{T}) = \{0\},\ \sigma_R(\boldsymbol{T}) = \emptyset,\ \sigma_C(\boldsymbol{T}) = \emptyset$

b) Mějme operátor $\boldsymbol{T} : \ell_2 \to \ell_2$

$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots\right)$ Zkuste navíc rozmyslet, jaká je $||T||$ a zda $0 \in \sigma_C(\boldsymbol{T})$, nebo $0 \in \sigma_R(\boldsymbol{T})$.

Řešení: $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(\ell_2),\ \sigma(\boldsymbol{T}) = \{0\},\ \sigma_P(\boldsymbol{T}) = \emptyset,\ \sigma_C(\boldsymbol{T}) = \emptyset$

3 Kompaktní operátory

Z minulých kapitol víme, že pro *lineární* operátor mezi Banachovými prostory $\boldsymbol{T} : X \to Y$ platí:

$$\boldsymbol{T} \text{ je spojitý } \Leftrightarrow \boldsymbol{T} \text{ je omezený},$$

píšeme $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(X, Y)$. Dále budeme využívat definice $\mathscr{L}(X) \coloneqq \mathscr{L}(X, X)$.

Připomeňme, že $\boldsymbol{T}$(omezená množina) = omez. množina. Tento výrok tedy pro lineární operátory charakterizuje spojitost, jinými slovy $\forall A \subset X$ omezená, je $\boldsymbol{T}(A)$ omezená v Y.

Definice 3.1 (Kompaktní operátor) Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $\boldsymbol{K} : X \to Y$ je lineární operátor. Řekneme, že $\boldsymbol{K}$ je kompaktní, jestliže pro každou omezenou množinu $A \subset X$ platí, že $\overline{\boldsymbol{K}(A)} \subset Y$ je kompatkní množina. Množinu všech kompaktních operátorů zapisujeme jako $\mathscr{C}(X, Y)$ a zavádíme $\mathscr{C}(X) \coloneqq \mathscr{C}(X, X)$.

Poznámka

1. $\mathscr{C}(X, Y) \subset \mathscr{L}(X, Y)$. Je-li totiž $A \subset X$ omezená, pak $\overline{\boldsymbol{K}(A)} \subset Y$ je kompaktní a podle nutné podmínky kompaktnosti musí být $\overline{\boldsymbol{K}(A)}$ omezená a uzavřená množina, tedy i $\overline{\boldsymbol{K}(A)} \supseteq \boldsymbol{K}(A)$ je omezená.

2. Připomeňme, že omezenost a uzavřenost jsou postačující podmínky pro kompaktnost pouze v konečnědimenzionálním normovaném lineárním prostoru (NLP).

3. Pro kompaktní množiny můžeme používat Weierstrassovské vybírání podposloupností, čehož dále využijeme.

Charakterizace operátoru pomocí posloupností Pro $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(X, Y)$ jsme měli:

$$\begin{aligned} &\text{spojitost: } x_n \to x \ \Rightarrow\ \boldsymbol{T}x_n \to \boldsymbol{T}x \\ &\text{omezenost: } \{x_n\} \text{ je omezená } \Rightarrow\ \{\boldsymbol{T}x_n\} \text{ je omezená} \end{aligned}$$

Charakterizaci kompaktnosti raději shrneme do věty.

Věta 3.2 (O charakterizaci kompaktního operátoru pomocí posloupnosti) *Operátor $\boldsymbol{K} : X \to Y$ je kompaktní právě tehdy, když pro každou omezenou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ existuje vybraná podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a prvek $y \in Y$ takový, že $\boldsymbol{K}(x_{n_k}) \to y$.*

Úkaz:

Pokud by celý prostor Y měl vlastnost, že z každé omezené posloupnosti v Y se dá vybrat konvergentní podposloupnost, pak by platilo

$$\mathscr{L}(X, Y) = \mathscr{C}(X, Y)\,.$$

Tuto úvahu zdůvodníme následovně. Stačí ukázat, že

$$\mathscr{L}(X, Y) \subset \mathscr{C}(X, Y)\,,$$

opačnou implikaci jsme již vyřešili. Buď tedy $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(X, Y)$ a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ omezená posloupnost. Díky spojitosti $\boldsymbol{T}$ je posloupnost $\{\boldsymbol{T}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená. Pokud bychom zaručili, že z každé takové posloupnosti už můžeme vybrat konvergentní podposloupnost, dokázali bychom tím kompaktnost každého spojitého operátoru. Takovou vlastnost jistě nemůže mít každý metrický prostor. Na počest Bolzanovy-Weierstrassovy věty platné v $\mathbb{R}$ ji nazveme *B-W vlastností.* $\square$

Lemma 3.3 (O nutné podmínce pro B-W vlastnost) Nechť Y je Banachův prostor. Pak

$$Y \text{ má B-W vlastnost } \Leftrightarrow \dim Y < \infty.$$

Úkaz:

„$\Leftarrow$“ Na $\mathbb{R}$ můžeme používat Bolzanovu-Weierstrassovu větu z prvního semestru. V prostoru $\mathbb{R}^n$ provedeme postupné výběry po složkách. Nyní jelikož $\dim X = n \in \mathbb{N}$, můžeme najít bázi a každému prvku $x \in X$ přiřadit n-tici souřadnic vzhledem k této bázi.

„$\Rightarrow$“ Je-li $\dim Y = \infty$, zvolíme $y_1 \in Y$ a poté indukcí vybíráme prvky $y_{k+1} \in Y$ tak, aby vzdálenost prvku y_{k+1} od prvku y_k byla větší nebo rovna jedné. Po přechodu k libovolné posloupnosti dostaneme stále posloupnost, která má prvky vzdálené od sebe více než o jedničku a proto nemůže splňovat B-C podmínku. $\square$

Lemma 3.4 (O kompaktnosti identity) Pro Banachův prostor X v dané normě platí:

$$\boldsymbol{Id} : X \to X \text{ je kompaktní } \Leftrightarrow X \text{ má B-W vlastnost.}$$

Důkaz. Zřejmé. $\square$

Z předchozích dvou lemmat plyne zajímavé zjištění, že <u>v nekonečné dimenzi není identita kompaktní operátor</u>. Obecně tedy máme:

$$\mathbf{Id} \in \mathscr{L}(X) \text{ je kompaktní } \Leftrightarrow \dim X < \infty.$$

Poznámka V teorii parciálních diferenciálních rovnic se uplatňuje proces „kompaktního vnoření“ jednoho prostoru do druhého. V uvedené situaci uvažujeme dva prostory $X \subset Y$, ovšem opatřené různými normami $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$. Zobrazení $\mathbf{Id} : X \to Y$ v takovém případě může být kompaktní. Je to ovšem způsobeno právě růzností norem, které na nekonečnědimenzionálních prostorech nejsou ekvivalentní.

Příkladem takového procesu může být tzv. Rellichova věta:

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená omezená množina s hladkou hranicí. Definujme Sobolevův prostor

$$W^{1,2}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \|f\|_{W^{1,2}} := \left[\int_\Omega \left(|f|^2 + |\nabla f|^2 \right) \, \mathrm{d}x \right]^{1/2} < +\infty \right\}.$$

Pak je $W^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ a navíc $\mathbf{Id} : W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ je kompaktní operátor.

Praktické použití této věty spočívá právě ve vybírání konvergentní podposloupnosti v L^2 z omezené posloupnosti v prostoru $W^{1,2}$.

3.1 Vlastnosti kompaktních operátorů

V této podkapitole formulujeme sedm klíčových vlastností, které značně zjednodušují problematiku spektrální analýzy pro kompaktní operátory.

Lemma 3.5 $\dim Y < \infty \Rightarrow \mathscr{L}(X, Y) = \mathscr{C}(X, Y)$

Důkaz. $A \subset X$ je omezená $\xRightarrow{\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(X,Y)}$ $\boldsymbol{T}(A)$ je omezená $\Rightarrow$ $\overline{\boldsymbol{T}(A)}$ je omezená a uzavřená v Y $\xRightarrow{\dim Y < \infty}$ $\overline{\boldsymbol{T}(A)}$ je kompaktní. $\square$

Důsledkem tohoto lemmatu je $T \in \mathscr{L}(X)$, $\dim X = \infty$, $\dim \mathcal{R}(T) < \infty \Rightarrow T \in \mathscr{C}(X)$.

Lemma 3.6 $\boldsymbol{S} \in \mathscr{L}(X)$, $\boldsymbol{K} \in \mathscr{C}(X) \Rightarrow \boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{K} \in \mathscr{C}(X)$, $\boldsymbol{K} \circ \boldsymbol{S} \in \mathscr{C}(X)$.

Důkaz. Zvolme omezenou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$. Pak $\{\boldsymbol{S}x_n\}_{n=1}^\infty$ je omezená a díky kompaktnosti $\boldsymbol{K}$ můžeme z posloupnosti $\{(\boldsymbol{K} \circ \boldsymbol{S})x_n\}_{n=1}^\infty$ vybrat konvergentní podposloupnost, proto je $\boldsymbol{K} \circ \boldsymbol{S}$ kompaktní. Dále, z posloupnosti $\{\boldsymbol{K}x_n\}_{n=1}^\infty$ můžeme vybrat konvergentní $\{\boldsymbol{K}x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ a díky spojitosti operátoru $\boldsymbol{S}$ je i podposloupnost $\{(\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{K})x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ konvergentní, proto je $\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{K}$ kompaktní.

$\square$

Lemma 3.7 $\boldsymbol{K} \in \mathscr{C}(X)$ $\dim X = \infty \Rightarrow 0 \in \sigma(\boldsymbol{K})$

Důkaz. $0 \notin \sigma(\boldsymbol{K}) \Rightarrow \exists \boldsymbol{K}^{-1} \in \mathscr{L}(X)$. Pak dle Lemmatu 3.6 dostáváme, že

$$\underset{\in\mathscr{C}}{\boldsymbol{K}} \circ \underset{\in\mathscr{L}}{\boldsymbol{K}^{-1}} \underset{\Rightarrow}{=} \underset{\in\mathscr{C}}{\mathbf{Id}},$$

přičemž kompaktnost identity je ve sporu s Lemmatem 3.4. □

Lemma 3.8 $\boldsymbol{K} \in \mathscr{C}(X)$, $\lambda \neq 0$. Pak

1. $\mathcal{R}(\boldsymbol{K} - \lambda\mathbf{Id})$ je uzavřená množina (viz Lukeš 5.17).
2. $\boldsymbol{K}$ je na (tj. $\mathcal{R}(\boldsymbol{K} - \lambda\mathbf{Id}) = X$) $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{K} - \lambda\mathbf{Id}$ je prostý (viz Lukeš 5.27).

Poznámka Druhé části předchozího lemmatu se říká „Fredholmova alternativa v nekonečné dimenzi“.

Pro $\boldsymbol{K} \in \mathscr{C}(X)$, $\lambda \neq 0$ můžeme na základě nově nabytých znalostí upravit spektrální tabulku. Konkrétně jsme zjistili, že

a) nemůže nastat situace $\mathcal{R}(\boldsymbol{K}_\lambda) \neq X$, $\overline{\mathcal{R}(\boldsymbol{K}_\lambda)} = X$, protože platí $\mathcal{R}(\boldsymbol{K}_\lambda) = \overline{\mathcal{R}(\boldsymbol{K}_\lambda)}$.

b) $\boldsymbol{K}_\lambda$ je prostý $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{K}_\lambda$ je na.

Máme tedy

	$\mathcal{R}(\boldsymbol{K}_\lambda) = X$	$\mathcal{R}(\boldsymbol{K}_\lambda) \neq X$, $\overline{\mathcal{R}(\boldsymbol{K}_\lambda)} = X$	$\overline{\mathcal{R}(\boldsymbol{K}_\lambda)} \neq X$
$\boldsymbol{K}_\lambda$ je prostý, $\boldsymbol{K}_\lambda^{-1}$ je spojitý	λ je regulární		~~b)~~
$\boldsymbol{K}_\lambda$ je prostý, $\boldsymbol{K}_\lambda^{-1}$ není spojitý		~~a)~~	~~b)~~
$\boldsymbol{K}_\lambda$ není prostý	~~b)~~	~~a)~~	$\lambda \in \sigma_{\mathrm{P}}$ (je vl. číslo)

Shrnutí:

- 0 je vždy ve spektru kompaktního operátoru. Je jediným prvkem spektra, který nemusí být vlastním číslem.
- Všechny nenulové prvky spektra už jsou vlastní čísla.

Lemma 3.9 $\boldsymbol{K} \in \mathscr{C}(X)$, $\lambda \neq 0 \in \sigma(\boldsymbol{K})$. Pak

- λ je vlastní číslo,
- $\dim \operatorname{Ker}(\boldsymbol{K} - \lambda\mathbf{Id}) < +\infty$,
- $\operatorname{Ker}(\boldsymbol{K} - \lambda\mathbf{Id})$ je prostor všech vl. vektorů příslušných vl. číslu λ a je uzavřeným podprostorem X.

Důkaz. viz Lukeš 5.15. □

Definice 3.10 (Násobnost vlastního čísla) Číslo $\dim \operatorname{Ker}(\boldsymbol{K} - \lambda\mathbf{Id}) \in \mathbb{N}$ nazýváme násobností vlastního čísla $\lambda \in \sigma_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{K})$.

Dle předchozího lemmatu víme, že každé nenulové vlastní číslo má konečnou násobnost - dimenze prostoru generovaného vlastními vektory, příslušejících jednomu nenulovému vlastnímu číslu, je konečná.

Lemma 3.11 $\boldsymbol{K} \in \mathscr{C}(X)$. Pak $\forall \varepsilon > 0$ je množina $\sigma(\boldsymbol{K}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \varepsilon\}$ konečná.

Důsledkem toho je, že spektrum kompaktního operátoru je nejvýše spočetné. Navíc má-li spektrum kompaktního operátoru hromadný bod, pak jím může být pouze 0.

Lemma 3.12 Mějme posloupnost Banachových prostorů $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ takovou, že

- $\dim X_n < \dim X_{n+1} < \infty$
- $X_n \subset X_{n+1} \subset X$.

Dále mějme operátory $\boldsymbol{K}_n \in \mathscr{L}(X, X_n) = \mathscr{C}(X, X_n)$, $\boldsymbol{K}_n : X \to X_n \subset X$, pro něž $\exists\, \boldsymbol{K} := \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{K}_n$, což je operátor definovaný v $\mathscr{L}(X)$. Pak je $\boldsymbol{K} \in \mathscr{C}(X)$.

4 Duálnost

4.1 Duál a dualita

Definice 4.1 (Duál) Buď X Banachův prostor. Prostor $X' \coloneqq \mathscr{L}(X, \mathbb{K})$ nazýváme topologickým duálem k X.

Poznámka

- Prostor X' je tedy tvořen všemi spojitými lineárními funkcionály, přičemž spojitost uvažujeme ve smyslu
$$x_n \xrightarrow{X} x \implies \boldsymbol{T}x_n \to \boldsymbol{T}x \quad \text{pro všechna } \boldsymbol{T} \in X' \,.$$
- Víme, že jsou-li X, Y normované prostory a Y je Banachův, pak i $\mathscr{L}(X, Y)$ je Banachův. Proto je X' automaticky Banachovým prostorem.
- Je-li $\boldsymbol{T} \in X'$, pak jeho norma je přirozeně $\|\boldsymbol{T}\|_{X'} \coloneqq \sup\limits_{\|x\|_X \le 1} |\boldsymbol{T}x|$.
- Topologický duál není totéž, co vektorový duál (pouze lineární zobrazení $X \to \mathbb{K}$, nevyžaduje spojitost). Prvků vektorového duálu je víc (o ony „nespojité“). V konečné dimenzi pro X Banachův je vektorový duál vždy topologickým duálem.

Definice 4.2 (Dualita) Nechť X je Banachův a X' jeho duál. Zobrazení $\boldsymbol{S} : X \times X' \to \mathbb{C}$ nazveme dualitou, jestliže splňuje vlastnosti:

1. sesquilinearita: $\boldsymbol{S}(\alpha x + \beta y, z) = \alpha \boldsymbol{S}(x, z) + \beta \boldsymbol{S}(y, z)$, $\quad \boldsymbol{S}(z, \alpha x + \beta y) = \overline{\alpha} \boldsymbol{S}(z, x) + \overline{\beta} \boldsymbol{S}(z, y)$,
2. spojitost: $\boldsymbol{S}(x_n, y_n) \to \boldsymbol{S}(x, y) \quad$ kdykoliv $(x_n, y_n) \to (x, y)$ v $X \times X'$.

Někdy píšeme $\boldsymbol{S}(x, \boldsymbol{T}) = \langle x, \boldsymbol{T} \rangle$. Obecně je často $\langle \cdot, \cdot \rangle$ symbolem duality.

Poznámka

- Pokud se nám podaří v nějakém smyslu schopni ztotožnit prostory X a X' (uvidíme v následujícím), pak roli duality hraje skalární součin. Ztotožněním prostorů myslíme následující: píšeme $X \simeq Y$, jestliže existuje zobrazení $\boldsymbol{D} : X \to Y$, které je izometrické a izomorfní, tj. zachovává normu a je bijektivní.
- Strukturu duality má i zobrazení „s prohozenými složkami“ $\overline{\boldsymbol{S}} : X' \times X \to \mathbb{C}$, které je sesquilineární a spojité ve smyslu předchozí definice. Je otázkou dohody jaké pořadí prostorů X a X' se v dané situaci volí.

Příklad Uvažujme prostor vektorů $\mathbb{R}^n$. Víme, že každá lineární forma $\boldsymbol{T} \in \mathbb{R}^{n\prime}$ je reprezentovatelná lineární kombinací (násobení transponovaným vektorem): $\boldsymbol{T}\left[(x_1, \cdots, x_n)\right] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$. Transponování je izometrické a izomorfní zobrazení, lze tedy psát $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n\prime}$. Dualitou na takovém prostoru je například *skalární součin* na $\mathbb{R}^n$. Později uvidíme, že podobně lze uvažovat i v jakémkoliv Hilbertově prostoru – v tomto smyslu je dualita zobecněním skalárního součinu.

Věta 4.3 (O ztotožnění sdružených Lebesgueových prostorů) *Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená souvislá množina, $\boldsymbol{T} \in L^p(\Omega)'$, $p \in (1, \infty)$. Buď $q \in (1, \infty)$ takové, že platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q je tzv. sdružený exponent k p). Pak existuje právě jeden prvek $g \in L^q(\Omega)$ takový, že:*
$$\boldsymbol{T}(f) = \int_\Omega f \overline{g} \, \mathrm{d}x \quad \forall f \in L^p(\Omega) \quad \textit{a zároveň} \quad \|\boldsymbol{T}\|_{L^p(\Omega)'} = \|g\|_{L^q(\Omega)} \,.$$

Důkaz. Důkaz nebudeme provádět. □

Předchozí věta ukazuje, že platí $L^p(\Omega)' \simeq L^q(\Omega)$. V tomto smyslu ztotožňujeme $\boldsymbol{T}$ a g, a dualitu $\langle f, \boldsymbol{T} \rangle \mapsto \boldsymbol{T}(f)$ ztotožňujeme s dualitou
$$\langle f, g \rangle \mapsto \int_\Omega f \overline{g}, \quad f \in L^p,\, g \in L^q \,. \tag{4.1}$$
Povšimněme si, že pokud v předchozí větě položíme $p = q = 2$, získáme vlastnost $L^2(\Omega)' \simeq L^2(\Omega)$ a dualita (4.1) má stejný tvar jako skalární součin na $L^2(\Omega)$, $\langle f, g \rangle \equiv (f, g)_{L^2}$. Je přirozené se ptát, zda se za tímto výsledkem skrývá něco hlubšího. Odpověď je pozitivní.

Věta 4.4 (Rieszova-Fréchetova o reprezentaci) *Buď H Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot\,,\cdot)_H$, $\boldsymbol{T} \in H'$. Pak existuje právě jeden prvek $f \in H$ takový, že platí následující:*

1. $\boldsymbol{T}(x) = \big(x, f\big)_H$ *pro každé* $x \in H$,
2. $\|\boldsymbol{T}\|_{H'} = \|f\|_H$.

Důkaz. viz Lukeš 2.9 □

Důsledek 4.5 Zobrazení „$x \mapsto f$“ je izometrický izomorfismus (je bijektivní a zachovává normu). Proto pro všechny Hilbertovy prostory H můžeme provést ztotožnění $H' \simeq H$.

Lemma 4.6 (O inkluzi duálních prostorů) Nechť jsou X, Y Banachovy a platí $X \subset Y$ a $\|x\|_Y = \|x\|_X$ $\forall x \in X$. Potom platí

$$Y' \subset X'$$

ve smyslu zúžení zobrazení (restrikce). Zde je však důležité dát velký pozor, je snadné tento výsledek špatně interpretovat!

Důkaz.

$$\begin{aligned} \text{Mějme } \boldsymbol{T} \in Y' &\implies \boldsymbol{T} \text{ spojité a lineární (na prvcích z } Y) \\ &\implies \boldsymbol{T}|_X \text{ spojité a lineární (na prvcích z } X) \implies \boldsymbol{T}|_X \in X' \end{aligned}$$

□

Příklad Bezhlavá aplikace předchozí inkluze nás může zahnat do slepých ulic.
Uvažujme prostor $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. Dle předchozího tvrzení můžeme prohlásit $(\mathbb{R}^2)' \subset (\mathbb{R})'$. Protože jsou oba prostory Hilbertovy, lze je ztotožnit $(\mathbb{R}^n)' = \mathbb{R}^n$, proto by mělo platit $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}$, což je zřejmě nesmysl. Kde je ale chyba?

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 & \implies & (\mathbb{R}^2)' & \subset & \mathbb{R}' \\ & & \| & & \| \\ & & \mathbb{R}^2 & \subset & \mathbb{R} \end{array}$$

V předchozích úvahách jsme učinili dvě chyby: jednu větší, jednu menší.

1. Menší chybu jsme učinili tím, že jsme $(\mathbb{R}^n)' \simeq \mathbb{R}^n$ považovali rovnost, ve skutečnosti je to *ztotožnění*. Každé lineární zobrazení na $\mathbb{R}^n$ má tvar
$$\boldsymbol{T}(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$$
a ztotožňuje se s n-ticí koeficientů
$$T \simeq (\alpha_1, \dots \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \text{ reprezentuje } (\mathbb{R}^n)' \,.$$
Na ono reprezentující $\mathbb{R}^n$ je tedy třeba nahlížet opravdu jako na prostor prvků, které reprezentují lineární zobrazení.

2. Velkou chybu jsme učinili, když jsme inkluzi $(\mathbb{R}^2)' \subset \mathbb{R}'$ považovali za množinovou inkluzi. Tvrzení je třeba chápat v tomto smyslu:

„Všechna lineární zobrazení pracující na $\mathbb{R}^2$ lze zúžit tak, aby pracovala na $\mathbb{R}$.“

Pokud je lineární zobrazení $\boldsymbol{T} \in (\mathbb{R}^2)'$ reprezentovatelné dvojicí $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, lze toto zobrazení skutečně zúžit na $\boldsymbol{T}|_{\mathbb{R}}$ reprezentované $(\alpha_1, 0)$, který můžeme považovat za prostor $\mathbb{R}$. To je pravý smysl „inkluze“ $Y' \subset X'$.

Poznámka „Duálnost" se často projevuje tím, že vzorce obsahující prvky X a X' vykazují jisté symetrie. Například víme, že

$$\|\boldsymbol{T}\|_{X'} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\boldsymbol{T}(x)|.$$

Dále víme, že $|\boldsymbol{T}(x)| \leq \|\boldsymbol{T}\| \, \|x\|_X$.

Uvažujme nyní funkcionál $\boldsymbol{T} \in X'$ takový, že $\|\boldsymbol{T}\|_{X'} \leq 1$. Pak jistě platí $|\boldsymbol{T}x| \leq \|x\|_X$ a po přechodu k supremu i

$$\sup_{\|\boldsymbol{T}\|_{X'} \leq 1} |\boldsymbol{T}(x)| \leq \|x\|_X \ .$$

Následující věta ukazuje, že platí dokonce *rovnost*:

$$\sup_{\|\boldsymbol{T}\|_{X'} \leq 1} |\boldsymbol{T}(x)| = \|x\|_X \ .$$

Věta 4.7 (Hahnova-Banachova) *Buď X Banachův, $x \in X$ takové, že $x \neq 0$. Pak existuje $\boldsymbol{T} \in X'$ s vlastnostmi*

$$\boldsymbol{T}(x) = \|x\|_X \ , \qquad \|\boldsymbol{T}\|_{X'} = 1 \, .$$

Důkaz. viz Taylor, str. 181 □

4.2 Duální zobrazení, duální operátor

Definice 4.8 (Duální zobrazení) Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(X,Y)$, $\boldsymbol{T}' : Y' \to X'$. Řekneme, že $\boldsymbol{T}'$ je duální zobrazení k $\boldsymbol{T}$, jestliže (formálně zapsáno)

$$\boldsymbol{T}' \circ \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y}' \circ \boldsymbol{T} \quad \text{pro všechna } \boldsymbol{y}' \in Y' \, ,$$

neboli přesněji

$$\underbrace{(\boldsymbol{T}'\boldsymbol{y}')}_{\in X'} \underbrace{(x)}_{\in X} = \underbrace{\boldsymbol{y}'}_{\in Y'} \underbrace{(\boldsymbol{T}x)}_{\in Y} \quad \text{pro všechna } \boldsymbol{y}' \in Y' \text{ a všechna } x \in X \, .$$

V předchozí definici je klíčové uvědomit si příslušnost jednotlivých objektů.

- $\boldsymbol{y}' \in Y'$ je zobrazení pracující na Y,
- $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{y}' \in X'$ je zobrazení pracující na X,
- $\big(\boldsymbol{T}(\cdot)\big)(\cdot)$ je objekt, který přiřazuje prvkům z $X' \times X$ číslo. To odpovídá struktuře duality.

S použitím tzv. *kanonické* duality $\langle \boldsymbol{F}, g \rangle = \boldsymbol{F}(g)$ můžeme zapsat definici duálního zobrazení v symetrickém tvaru:

$$\langle \boldsymbol{T}'\boldsymbol{y}', x \rangle = \langle \boldsymbol{y}', \boldsymbol{T}x \rangle \, .$$

Povšimněme si, že na levé straně máme zobrazení $X' \times X \to \mathbb{C}$ a na pravé zobrazení $Y' \times Y \to \mathbb{C}$.

Lemma 4.9 (O linearitě a spojitosti duálního operátoru) Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(X,Y)$. Pak $\boldsymbol{T}' \in \mathscr{L}(Y', X')$.

Důkaz. Linearita je zřejmá. Ukažme spojitost. Zafixujme $\{\boldsymbol{y}'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y'$ takovou, že $\boldsymbol{y}'_n \to \boldsymbol{y}'$. Ukážeme, že posloupnost $\{\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X'$ konverguje k $\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$. Platí

$$\begin{aligned} \left\|\boldsymbol{T}'\boldsymbol{y}'_n - \boldsymbol{T}'\boldsymbol{y}'\right\|_{X'} &= \sup_{\|x\| \leq 1} \left\|\boldsymbol{T}'\boldsymbol{y}'_n(x) - \boldsymbol{T}'\boldsymbol{y}'(x)\right\|_X = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\boldsymbol{y}'_n(\boldsymbol{T}x) - \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{T}x)\|_X = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(\boldsymbol{y}'_n - \boldsymbol{y}')(\boldsymbol{T}x)\|_X \leq \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|\boldsymbol{y}'_n - \boldsymbol{y}'\| \, \|\boldsymbol{T}\| \, \|x\| = \|\boldsymbol{y}'_n - \boldsymbol{y}'\| \, \|\boldsymbol{T}\| \to 0 \, , \end{aligned}$$

což jsme chtěli ukázat. □

Poznámka Dá se ukázat, že: $\boldsymbol{T}$ je kompaktní operátor právě tehdy, když je $\boldsymbol{T}'$ kompaktní operátor (tzv. Schauderova věta). Sami zkuste dokázat, že $\|\boldsymbol{T}\| = \|\boldsymbol{T}'\|$.

Dále nás bude zajímat, lze-li v nějakém smyslu ztotožnit $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T}'$ (podobně jako ztotožňujeme Hilbertův prostor s vlastním duálem), tedy, zda bychom mohli psát

$$\underbrace{\boldsymbol{T}}_{X\to Y} \simeq \underbrace{\boldsymbol{T}'}_{Y'\to X'} .$$

Muselo by tedy platit něco ve smyslu

$$X \simeq Y' \quad \text{a} \quad Y \simeq X' .$$

Uvážíme-li nyní duály předchozích výrazů, dostaneme

$$X' \simeq Y'' \quad \text{a} \quad Y' \simeq X'' .$$

Zkombinováním obou „rovnic“ získáme s trochou *máchání rukama* výraz

$$X \simeq X'' \quad \text{a} \quad Y \simeq Y'' .$$

To by mohlo platit pro Hilbertovy prostory, kde je dokonce už i $X' \simeq X$. Obecně k danému $\boldsymbol{T}$ nemusí vždy existovat $\boldsymbol{T}'$, výše uvedené vlastnosti platí pouze v případě, že existuje. Ale v Hilbertově prostoru je opět situace příznivější.

Věta 4.10 (O duálním zobrazení mezi Hilbertovými prostory) *Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje právě jedno zobrazení $\boldsymbol{T}' : H_2 \to H_1$ takové, že*

$$(\boldsymbol{T}x, y)_{H_2} = (x, \boldsymbol{T}'y)_{H_1} \quad \textit{pro všechna } x \in H_1,\ y \in H_2 . \tag{4.2}$$

Pro takové zobrazení navíc platí:

1. $\boldsymbol{T}' \in \mathscr{L}(H_2, H_1)$,
2. $\|\boldsymbol{T}'\| = \|\boldsymbol{T}\|$.

Poznámka Aplikujeme-li komplexní sdružení na rovnici (4.2), dostaneme

$$\overline{(\boldsymbol{T}x, y)}_{H_2} = \overline{(x, \boldsymbol{T}'y)}_{H_1} \to (\boldsymbol{T}'y, x)_{H_1} = (y, \boldsymbol{T}x)_{H_2} .$$

Na Hilbertových prostorech tedy hraje roli duality skalární součin.

Důkaz. Zafixujme $y \in H_2$ a definujme

$$\boldsymbol{L}_y \in \mathscr{L}(H_1, \mathbb{C}) ,$$
$$\boldsymbol{L}_y(x) \coloneqq (\boldsymbol{T}x, y)_{H_2} .$$

Podle Rieszovy-Fréchetovy věty (Věta 4.4) existuje právě jedno $z \in H_1$ takové, že

$$\boldsymbol{L}_y(x) = (x, z)_{H_1} .$$

Nyní definujeme zobrazení:

$$\boldsymbol{T}' : H_2 \to H_1 ,$$
$$\boldsymbol{T}'(y) \coloneqq z .$$

Toto zobrazení má vlastnost

$$(\boldsymbol{T}x, y)_{H_2} = (x, \boldsymbol{T}'y)_{H_1} \quad \text{pro libovolné } x \in H_1, y \in H_2 .$$

Tím jsme dokázali první část tvrzení o existenci a jednoznačnosti zobrazení $\boldsymbol{T}'$.

Ukažme jeho linearitu. Zřejmě je pro každé $x \in H_1$ splněno

$$\big(\boldsymbol{T}'(\alpha y_1 + \beta y_2), x\big)_{H_1} = (\alpha y_1 + \beta y_2, \boldsymbol{T}x)_{H_2} = \alpha(y_1, \boldsymbol{T}x)_{H_2} + \beta(y_2, \boldsymbol{T}x)_{H_2} = \\ = \alpha(\boldsymbol{T}'y_1, x)_{H_1} + \beta(\boldsymbol{T}'y_2, x)_{H_1} = (\alpha\boldsymbol{T}'y_1 + \beta\boldsymbol{T}'y_2, x)_{H_1}$$

a odtud

$$\boldsymbol{T}'(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\boldsymbol{T}'y_1 + \beta\boldsymbol{T}'y_2\,.$$

Ukažme spojitost zobrazení $\boldsymbol{T}'$ pomocí omezenosti jeho normy. Podle definice zobrazení $\boldsymbol{T}'$ a druhé části Rieszovy-Fréchetovy věty (Věta 4.4) dostáváme

$$\left\|\boldsymbol{T}'y\right\|_{H_1} = \|z\|_{H_1} = \|\boldsymbol{L}_y\|\ . \tag{4.3}$$

Dále je podle definice $\boldsymbol{L}_y$ a Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|\boldsymbol{L}_y x\| = |(\boldsymbol{T}x, y)_{H_2}| \le \|\boldsymbol{T}x\|_{H_2}\, \|y\|_{H_2} \le \|\boldsymbol{T}\|\, \|x\|_{H_1}\, \|y\|_{H_2}$$

a odtud s použitím (4.3) plyne

$$\left\|\boldsymbol{T}'y\right\|_{H_1} = \|\boldsymbol{L}_y\| = \sup_{\|x\|_{H_1}\le 1} \|\boldsymbol{L}_y x\|_{H_2} \le \|\boldsymbol{T}\|\, \|y\|_{H_2}\ .$$

$$\left\|\boldsymbol{T}'\right\| = \sup_{\|y\|_Y\le 1} \left\|\boldsymbol{T}'y\right\| \le \|\boldsymbol{T}\| \sup_{\|y\|\le 1} \|y\|_{H_2} = \|\boldsymbol{T}\| < +\infty\,.$$

Tím jsme ověřili spojitost a celkově $\boldsymbol{T}' \in \mathscr{L}(H_2, H_1)$.

Zbývá ukázat rovnost norem $\left\|\boldsymbol{T}'\right\| = \|\boldsymbol{T}\|$. Za tím účelem definujeme $\boldsymbol{T}'' = (\boldsymbol{T}')'$. O tomto zobrazení již víme, že $\boldsymbol{T}'' \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$, $(\boldsymbol{T}''x, y)_{H_2} = (x, \boldsymbol{T}'y)_{H_1}$ a $\left\|\boldsymbol{T}''\right\| \le \left\|\boldsymbol{T}'\right\|$. Pak s použitím předchozích částí důkazu dostaneme

$$(\boldsymbol{T}''x, y)_{H_2} = (x, \boldsymbol{T}'y)_{H_1} = \overline{(\boldsymbol{T}'y, x)}_{H_1} = \overline{(y, \boldsymbol{T}x)}_{H_2} = (\boldsymbol{T}x, y)_{H_2} \quad \text{pro všechna } x \in H_1, y \in H_2\,,$$

tedy

$$\boldsymbol{T}''x = \boldsymbol{T}x \quad \text{pro každé } x \in H_1\,.$$

Odtud

$$\|\boldsymbol{T}\| = \left\|\boldsymbol{T}''\right\| \le \left\|\boldsymbol{T}'\right\| \le \|\boldsymbol{T}\|\ ,$$

a proto musí platit v předchozím řetězci všude rovnosti. □

Definice 4.11 (Hermitovsky sdružený operátor) Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory, $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$. Zobrazení $\boldsymbol{T}'$ s vlastnostmi z předchozí věty nazýváme hermitovsky sdružený operátor s $\boldsymbol{T}$ (případně adjungovaný operátor k $\boldsymbol{T}$).

Definice 4.12 (Samoadjungovaný (omezený) operátor.) Nechť H je Hilbertův prostor. Operátor $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(H)$ nazveme (omezený) samoadjungovaný (případně hermitovský), jestliže $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}'$.

Poznámka V předchozí definici jsou oba operátory $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}'$ definovány na celém Hilbertově prostoru. Zdůrazňujeme zde, že mluvíme o „omezených samoadjungovaných“ operátorech. V případě neomezených operátorů uvidíme, že definiční obor operátorů zcela mění spektrální vlastnosti a definice hermitovskosti a samoadjungovanosti je složitější.

4.3 Vlastnosti samoadjungovaných operátorů

Lemma 4.13 (O vlastních číslech samoadjungovaných operátorů) Nechť $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(H)$ je samoadjungovaný. Pak má pouze reálná vlastní čísla a vlastní vektory příslušející různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

Důkaz. První část tvrzení plyne z rovnosti

$$\lambda \|x\|_H^2 = (\lambda x, x)_H = (\boldsymbol{T}x, x)_H = (x, \boldsymbol{T}x)_H = (x, \lambda x)_H = \overline{\lambda}(x, x)_H = \overline{\lambda} \|x\|_H^2 .$$

Nechť jsou $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vlastní čísla příslušející vlastním vektorům y_1, y_2. Pak z rovnosti

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2)_H = (\lambda_1 y_1, y_2)_H - (y_1, \lambda_2 y_2)_H = (\boldsymbol{T}y_1, y_2)_H - (y_1, \boldsymbol{T}y_2)_H = (\boldsymbol{T}y_1, y_2)_H - (\boldsymbol{T}y_1, y_2)_H = 0$$

vidíme, že musí platit $(y_1, y_2) = 0$. □

Poznámka Samoadjungovaný operátor může mít ovšem i jiné prvky spektra. O nich obecně nevíme nic.

Věta 4.14 (O spektrálních vlastnostech samoadjungovaných operátorů) *Nechť H je Hilbertův prostor a $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(H)$ je samoadjungovaný operátor. Označme*

$$m(\boldsymbol{T}) = \inf \{(\boldsymbol{T}x, x)_H : \|x\|_H = 1\} \qquad M(\boldsymbol{T}) = \sup \{(\boldsymbol{T}x, x)_H : \|x\|_H = 1\}$$

Pak

1. *Je-li $\lambda \in \sigma(\boldsymbol{T})$, pak $\lambda \in [m(\boldsymbol{T}), M(\boldsymbol{T})]$.*
2. *Platí $\rho(\boldsymbol{T}) = \|\boldsymbol{T}\|$. Speciálně: alespoň jedna z hodnot $\lambda = \pm \|\boldsymbol{T}\|$ je vlastním číslem $\boldsymbol{T}$.*

Cvičení Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je reálná symetrická matice, $x \in \mathbb{R}^n$ a $f(x) = (\mathbb{A}x, x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$. Určete minimum a maximum f za podmínky $\|x\| = 1$.

4.4 Kompaktní samoadjungované operátory na Hilbertových prostorech

Nejprve zopakujeme výsledky, které zatím máme o kompaktních samoadjungovaných operátorech. Na Hilbertově prostoru H uvažujme $\boldsymbol{K} \in \mathscr{C}(H)$ takový, že $(\boldsymbol{K}x, y)_H = (x, \boldsymbol{K}y)_H$ pro všechna $x, y \in H$. Pak platí

1. $\boldsymbol{K}$ má nejvýše spočetně mnoho vlastních čísel a všechna jsou reálná.
2. Jediným dalším prvkem spektra $\sigma(\boldsymbol{K})$ může být číslo 0, to může nebo nemusí být vlastním číslem.
3. Ke každému nenulovému vlastnímu číslu existuje nejvýše konečně mnoho lineárně nezávislých vlastních vektorů. Navíc vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou na sebe vždy kolmé.

Základní otázkou této kapitoly je:

„Vezmeme-li vlastní vektory všech nenulových vlastních čísel, tvoří bázi H?“

Odpověď na to nám dá tzv. Hilbertova-Schmidtova věta. Nejprve nás ale čeká *intermezzo*, ve kterém si připomeneme direktní součet, ortogonální doplněk a Fourierovy řady.

Definice 4.15 (Direktní součet podprostorů) Nechť H je lineární vektorový prostor a A, B jsou podprostory H. Řekneme, že H je direktním součtem A a B (píšeme $A \oplus B = H$), jestliže

1. $A + B = H$, tj. pro každé $h \in H$ existují $a \in A$, $b \in B$ takové, že $a + b = h$,
2. $A \cap B = \{0\}$.

Příklad Jsou-li A a B dvě různé (ne nutně kolmé) přímky protínající počátek, pak lze psát $\mathbb{R}^2 = A \oplus B$.

Definice 4.16 (Ortogonální doplněk) Nechť H je Hilbertův prostor a A je uzavřený lineární podprostor v H. Definujeme ortogonální doplněk $A^\perp \subset H$ předpisem

$$A^\perp := \{y \in H : (x,y) = 0 \text{ pro každé } x \in A\} \ .$$

Věta 4.17 (O vlastnostech ortogonálního doplňku) *Nechť H je Hilbertův prostor a A je uzavřený lineární podprostor H a $A^\perp$ je jeho ortogonální doplněk. Pak*

1. *$A^\perp$ je uzavřený lineární podprostor H,*
2. *platí $(A^\perp)^\perp = A$,*
3. *platí $A \oplus A^\perp = H$.*

Důkaz.

1. Linearita je zřejmá. Uzavřenost plyne ze spojitosti skalárního součinu. Pro konvergentní posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^\infty$: $y_n \to y$ totiž máme

$$0 = \big(x, y_n\big)_H \to \big(x, y\big)_H = 0 \,.$$

2. Druhou část ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení.
3. Třetí část lze nejlépe nahlédnout v kontextu tzv. *lemmatu o kolmé projekci*:

Lemma 4.18 Je-li A lineární podprostor H, pak pro každé $x \in H \setminus A$ existuje prvek $Px \in A$ takový, že

$$\big(x - Px, y\big) = 0 \quad \text{pro všechna } y \in A \,,$$

neboli $x - Px \in A^\perp$.

Nyní už je tvrzení zřejmé. Pro $x \in A$ máme $x = x + 0$. Pro $x \in H \setminus A$ můžeme psát

$$x = \underbrace{(x - Px)}_{\in A^\perp} + \underbrace{Px}_{\in A} \ .$$

Navíc pro $v \in A \cap A^\perp$ máme $\big(v, v\big) = 0$, odtud $v = 0$. Tím jsme dokázali direktnost součtu.

□

Připomeňme, že o metrickém prostoru X říkáme, že je separabilní, jestliže v něm existuje spočetná hustá množina. Ortogonálním systémem v H nazýváme posloupnost $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ takovou, že pro $i \neq j$ platí $(e_i, e_j)_H = 0$. O ortogonálním systému řekneme, že je úplný, právě když

$$y \in H, (y, e_n)_H = 0 \ \ \forall n \implies y = 0 \,.$$

Věta 4.19 (O Fourierových řadách na Hilbertově prostoru.) *Nechť H je Hilbertův prostor. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

1. *H je separabilní prostor,*
2. *Existuje úplný spočetný ortogonální systém $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset H$,*
3. *Každý prvek H je součtem své Fourierovy řady, tedy pro každé $x \in H$ platí*

$$x = \sum_{n=1}^\infty \frac{(x, e_n)_H}{\|e_n\|^2} e_n \,,$$

4. Pro každé $x \in H$ platí

$$\|x\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x, e_n)_H^2}{\|e_n\|^2} . \qquad \textit{(tzv. Parsevalova rovnost)}$$

Nyní jsme připraveni dokázat klíčovou větu této kapitoly.

Věta 4.20 (Hilbertova-Schmidtova) *Nechť H je Hilbertův prostor, $\boldsymbol{K}$ je kompaktní samoadjungovaný operátor na H. Označme Λ uzavřený podprostor H generovaný všemi vlastními vektory $\boldsymbol{K}$, které odpovídají všem nenulovým vlastním číslům $\boldsymbol{K}$. Pak*

$$H = \Lambda \oplus \mathrm{Ker}\ \boldsymbol{K} .$$

Důkaz. Důkaz věty rozdělíme do několika kroků.

Krok 1: Vlastnosti prostoru Λ.

Díky kompaktnosti a samoadjungovanosti $\boldsymbol{K}$ existuje nejvýše spočetná posloupnost $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \sigma_{\mathrm{P}}(K)$ nenulových vlastních čísel. Označme podprostor příslušející j-tému vlastnímu číslu

$$E_j = \mathrm{Ker}\ (\boldsymbol{K} - \lambda_j \boldsymbol{Id}) = \{x \in H : x \neq 0, \boldsymbol{K}x = \lambda_j x\}$$

Díky kompaktnosti $\boldsymbol{K}$ je $\dim E_j := n_j < +\infty$. Označme B_j bázi prostoru E_j. Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je tato báze ortogonalizovaná (jinak můžeme použít například Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci). Definujme

$$B := \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j .$$

Pak i B je nejvýše spočetná množina a je tvořena vlastními vektory. Ukažme, že je i ortogonální množina: zvolme $x \neq y \in B$. Pak oba prvky buď patří do stejné B_j a jsou na sebe kolmé díky předpokladu výše, nebo jsou z různých bází B_i, B_j a jsou na sebe kolmé díky samoadjungovanosti $\boldsymbol{K}$.

Definujme prostor všech nejvýše spočetných součtů prvků z B předpisem

$$\Lambda := \overline{\mathrm{Lin}\ B} = \left\{ z \in H : z = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j,\ \alpha_j \in \mathbb{C},\ e_j \in B \right\} .$$

Pak Λ je uzavřený lineární podprostor H, je tedy Hilbertovým prostorem.

Navíc je Λ separabilní. Spočetnou hustou množinu v něm tvoří

$$\left\{ z \in H : z = \sum_{j=1}^{N} (r_j + \mathrm{i} q_j)\, e_j,\ r_j, q_j \in \mathbb{Q},\ e_j \in B,\ N \in \mathbb{N} \right\}$$

Krok 2: Příslušnost množin $\boldsymbol{K}(\Lambda)$ a $\boldsymbol{K}(\Lambda^{\perp})$.

Nejprve ukážeme, že $\boldsymbol{K}(\Lambda) \subset \Lambda$. Zvolme $x \in \Lambda$. Pak

$$\boldsymbol{K}x = \boldsymbol{K} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j e_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \boldsymbol{K} e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \lambda_j e_j ,$$

tedy $\boldsymbol{K}x \in \Lambda$.

Dále ukažme, že $\boldsymbol{K}(\Lambda^{\perp}) \subset \Lambda^{\perp}$. Zvolme $x \in \Lambda, y \in \Lambda^{\perp}$. Pak $\boldsymbol{K}x \in \Lambda^{\perp}$ a z rovnosti

$$(\boldsymbol{K}y, x)_H = (y, \boldsymbol{K}x)_H = 0$$

vidíme, že musí nutně platit $\boldsymbol{K}y \in \Lambda^{\perp}$. Tím jsme dokázali, že $\boldsymbol{K}(\Lambda^{\perp}) \subset \Lambda^{\perp}$.

Krok 3: Platnost tvrzení $\boldsymbol{K}(\Lambda^{\perp}) = \{0\}$.
Definujme zúžení operátoru $\boldsymbol{K}$ předpisem

$$\tilde{\boldsymbol{K}} := \boldsymbol{K}|_{\Lambda^{\perp}}$$

Protože $\boldsymbol{K}(\Lambda^{\perp}) \subset \Lambda^{\perp}$, platí $\tilde{\boldsymbol{K}} : \Lambda^{\perp} \to \Lambda^{\perp}$. Tedy $\tilde{\boldsymbol{K}}$ je také kompaktní a samoadjungovaný operátor na $\Lambda^{\perp}$.

Ukážeme sporem, že $\tilde{\boldsymbol{K}}$ nemá žádné nenulové vlastní číslo. Nechť platí negace tohoto výroku a existuje vlastní číslo $\lambda \neq 0$ a vlastní vektor $y \in \Lambda^{\perp}, y \neq 0$ takové, že $\tilde{\boldsymbol{K}} y = \lambda y$. Díky samoadjungovanosti je pak

$$\boldsymbol{K} y = \tilde{\boldsymbol{K}} y = \lambda y \, ,$$

a tedy λ je i vlastní číslo operátoru $\boldsymbol{K}$. Podle druhé části důkazu je ale potom $y \in \Lambda$. Tedy $y \in \Lambda \cap \Lambda^{\perp}$, což implikuje $y = 0$ a to je ve sporu s předpoklady.

Celkově jsme zjistili, že $\tilde{\boldsymbol{K}}$ je kompaktní operátor, který nemá nenulové vlastní číslo, tedy $\sigma(\tilde{\boldsymbol{K}}) \subset \{0\}$. Podle Věty o spektrálních vlastnostech samoadjungovaných operátorů (4.14) je $\rho(\tilde{\boldsymbol{K}}) = 0$, a tedy $\left\|\tilde{\boldsymbol{K}}\right\| = 0$, což je ekvivalentní s $\tilde{\boldsymbol{K}} \equiv 0$. Z konstrukce $\tilde{\boldsymbol{K}}$ pak snadno nahlédneme, že $\boldsymbol{K}(\Lambda^{\perp}) = \{0\}$.

Krok 4: Dokončení důkazu.
Předchozí část důkazu nám dává $\Lambda^{\perp} \subset \operatorname{Ker} \boldsymbol{K}$. Zjevně platí $\Lambda \oplus \Lambda^{\perp} = H$, tedy

$$\Lambda + \operatorname{Ker} \boldsymbol{K} = H \, .$$

Zbývá ukázat, že $\Lambda \cap \operatorname{Ker} \boldsymbol{K} = \{0\}$, tím dokážeme direktnost součtu těchto prostorů.

Zvolme $z \in \Lambda \cap \operatorname{Ker} \boldsymbol{K}$. Díky jeho příslušnosti do Λ lze psát

$$0 = \boldsymbol{K} z = \boldsymbol{K} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \boldsymbol{K} e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \lambda_j e_j \, .$$

To je Fourierova řada nulového prvku. Z teorie jednoznačnosti Fourierových řad pak vyplývá, že

$$\alpha_j \lambda_j = 0 \quad \text{pro všechna } j \in \mathbb{N} \, .$$

Díky nenulovosti λ_j dostáváme

$$\alpha_j = 0 \quad \text{pro všechna } j \in \mathbb{N} \tag{4.4}$$

a tedy $z = 0$, což jsme chtěli ukázat. □

Poznámka 1. První část důkazu vlastně jen osvětluje vlastnosti prostoru Λ. Povšimněme si, že separabilitu prostoru Λ jsme využili na konci při rozkladu nulového prvku do Fourierovy řady, kterou bychom jinak nemohli provést.

2. V důkazu nám stačilo pouze ukázat, že $\Lambda^{\perp} \subset \operatorname{Ker} \boldsymbol{K}$. Dá se dokonce ukázat, že $\Lambda^{\perp} = \operatorname{Ker} \boldsymbol{K}$.

   Zvolme $z \in \operatorname{Ker} \boldsymbol{K} \setminus \Lambda^{\perp}$ takové, že $z \neq 0$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\big(z, e_n\big) \neq 0$. (Skutečně, jinak by platilo $\big(z, \sum_{j=1}^{\infty} \beta_n e_n\big) = 0$ a odtud $z \in \Lambda^{\perp}$.) Pak ale platí $\boldsymbol{K} z = 0$, neboť $z \in \operatorname{Ker} \boldsymbol{K}$. Odtud dostáváme pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$0 = \big(\boldsymbol{K} z, e_n\big) = \big(z, \boldsymbol{K} e_n\big) = \big(z, \lambda_n e_n\big) = \lambda_n \big(z, e_n\big) \, ,$$

   což je ve sporu s $\lambda_n \neq 0$. Tím jsme ověřili, že $\Lambda^{\perp} = \operatorname{Ker} \boldsymbol{K}$.

Důsledek 4.21 (O rozkladu Hilbertova prostoru pomocí kompaktního samoadjungovaného operátoru) Nechť H je Hilbertův prostor, $\boldsymbol{K}$ je kompaktní samoadjungovaný operátor na H, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ je ortogonální systém všech vlastních vektorů příslušející všem nenulovým vlastním číslům operátoru $\boldsymbol{K}$. Pak pro každý prvek $h \in H$ existuje posloupnost $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ taková, že

$$h = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j + z \,, \tag{4.5}$$

přičemž $z \in \operatorname{Ker} \boldsymbol{K}$. Dále

$$\boldsymbol{K} h = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \lambda_j e_j \tag{4.6}$$

a platí

$$\alpha_k = \frac{(h, e_k)}{\|e_k\|^2} \quad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N} \,.$$

Poznámka Hilbertova-Schmidtova věta 4.20 a důsledek 4.21 rozšiřuje známou větu ze čtvrtého semestru matematické analýzy (Věta 4.19) i na Hilbertovy prostory, které nejsou separabilní. Neseparabilní část prostoru je právě Ker $\boldsymbol{T}$. Zatímco se v rovnici (4.5) objevuje i tato neseparabilní část, v rovnici (4.6) už nevystupuje. Tato vlastnost pak umožňuje využívat vlastností rozkladu do Fourierových řad u kompaktních samoadjungovaných operátorů i na neseparabilních prostorech.

Na závěr kapitoly se rozloučíme větou, která (mimo jiné) umožňuje konstruovat kompaktní operátory na Hilbertových prostorech.

Věta 4.22 (O rozkladu Hilbertova prostoru pomocí omezené posloupnosti) *Nechť H je separabilní Hilbertův prostor, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ je úplný ortonormální systém a $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ je omezená posloupnost. Označme*

$$M := \sup_{j \in \mathbb{N}} \{|\alpha_j|\} < +\infty \,.$$

Definujme operátor $\boldsymbol{T}$ předpisem

$$\boldsymbol{T} h = \sum_{j=1}^{\infty} (h, e_j)_H \cdot \alpha_j e_j \,.$$

Pak

1. *$\boldsymbol{T}$ je dobře definován na celém H, $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(H)$ a $\|\boldsymbol{T}\| = M$.*
2. *$\boldsymbol{T}$ je samoadjungovaný $\iff \alpha_j \in \mathbb{R}$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$.*
3. *$\boldsymbol{T}$ je kompaktní $\iff$ existuje přerovnání poslopnosti $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} \alpha_{j_n} = 0$.*

Příklad

1. Volme posloupnost $\alpha_n = 1$. Pak operátor generovaný takovou posloupností je zřejmě $\boldsymbol{Id}$. Podle druhé a třetí části předchozí věty je $\boldsymbol{Id}$ samoadjungovaná, ale není kompaktní.
2. Volme posloupnost $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$. Pak podle předchozí věty generuje tato posloupnost operátor, který je samoadjungovaný a navíc díky $\alpha_n \to 0$ je kompaktní.

Poznámka V kvantové statistické mechanice se pracuje s tzv. operátorem hustoty $\hat{\rho}$ definovaným předpisem

$$\hat{\rho} := \sum_{j=1}^{\infty} p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \,, \quad \text{kde } \{|\psi_j\rangle\}_{j=1}^{\infty} \in H \text{ jsou takové, že } |\langle\psi_j|\psi_j\rangle| = 1 \text{ a } \sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1 \,.$$

Povšimněme si, že v nediracovské notaci bychom takový operátor zapsali předpisem

$$\boldsymbol{\rho}(h) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j (\psi_j, h)_H \psi_j \,.$$

Ke splnění podmínek z předchozí věty mu chybí jen to, že $\{|\psi_j\rangle\}_{j=1}^{\infty}$ nemusí tvořit (a většinou netvoří) ortonormální posloupnost. Nicméně se dá ukázat, že operátor hustoty je vždy kompaktní a samoadjungovaný. Dokonce patří do speciální třídy kompaktních operátorů, pro které lze definovat tzv. stopu operátoru předpisem

$$\operatorname{Tr} \hat{\rho} := \sum_{j=1}^{\infty} \langle\psi_j|\hat{\rho}|\psi_j\rangle$$

(tzv. *trace-class* operátory). Více lze najít například v knize: BLANK, Jiří, Pavel EXNER a Miloslav HAVLÍČEK. Hilbert Space Operators in Quantum Physics Theoretical and Mathematical Physics. Melville, N.Y.: Springer, 2008. ISBN 9781402088698.

5 Neomezené operátory

V úvodní kapitole jsme ukázali charakterizaci spojitých lineárních operátorů na Banachových prostorech: pro $\boldsymbol{T}: X \to Y$ lineární platí

$$\boldsymbol{T} \text{ je omezený } \Leftrightarrow \|\boldsymbol{T}\| < +\infty \Leftrightarrow \boldsymbol{T} \text{ je spojitý} .$$

Speciálně si uvědomme, že řetězec těchto ekvivalencí dává i tento řetězec ekvivalencí negovaných výroků:

$$\boldsymbol{T} \text{ není omezený } \Leftrightarrow \|\boldsymbol{T}\| = +\infty \Leftrightarrow \boldsymbol{T} \text{ není spojitý} .$$

V této kapitole představíme některé vlastnosti lineárních, ale neomezených a tedy nespojitých operátorů. Budeme pracovat pouze na Hilbertových prostorech, kde máme k dispozici vlastnosti skalárního součinu. Ukazuje se, že jsou zde problémy se samotným definičním oborem příslušného samoadjungovaného operátoru, a dokonce i samotného operátoru $\boldsymbol{L}$.

Poznámka Místo $\boldsymbol{L}'$ jako označení adjungovaného operátoru zde budeme používat značení $\boldsymbol{L}^*$, abychom adjungovanost odlišili od značení derivací na prostorech funkcí.

5.1 Symetrie a samoadjungovanost

Definice 5.1 (Adjungovaný operátor) Nechť H je Hilbertův prostor, $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}) \subset H$ je lineární podprostor a $\boldsymbol{L} : \mathcal{D}(\boldsymbol{L}) \to H$ je lineární operátor.

1. Definujme $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*) := \{y \in H;\ \exists! h^* \in H,\ \big(\boldsymbol{L}x, y\big) = \big(x, h^*\big)\ \forall x \in \mathcal{D}(\boldsymbol{T})\}$
2. Je-li $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*)$ neprázdná množina, definujeme adjungovaný operátor $\boldsymbol{L}^* : \mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*) \to H$ předpisem

$$\boldsymbol{L}^* y = h^* .$$

Poznámka Je-li $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*) \neq \emptyset$, pak z definice ihned dostáváme

$$(\boldsymbol{L}x, y)_H = (x, \boldsymbol{L}^* y)_H \quad \text{pro všechna } x \in \mathcal{D}(\boldsymbol{L}), y \in \mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*) .$$

Zatímco pro omezené (spojité) operátory je předchozí rovnost důsledkem Rieszovy-Fréchetovy věty (Věta 4.4), pro neomezené operátory je třeba tuto rovnost postulovat.

Přirozeně zavádíme i pojem samoadjungovaného operátoru.

Definice 5.2 (Samoadjungovaný operátor) Operátor $\boldsymbol{L} : \mathcal{D}(\boldsymbol{L}) \to H$ nazveme samoadjungovaným, jestliže

1. $\exists \mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*) \neq \emptyset,\ \mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*) = \mathcal{D}(\boldsymbol{L})$,
2. $\boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{L}$ na $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*)$.

Poznámka Rovnost definičních oborů je zde velmi důležitá. Později uvidíme, že pokud $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}) \neq \mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*)$ a $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}^*$ na $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}) \cap \mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*)$, dostaneme pro $\boldsymbol{L}$ jiné spektrální vlastnosti, než kdyby byl samoadjungovaným.

Přímo z definice plyne následující lemma.

Lemma 5.3 $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*) \neq \emptyset \Rightarrow \boldsymbol{L}^*$ je lineární.

Důležitá otázka: Kdy je $\mathcal{D}(\boldsymbol{T}^*) \neq \emptyset$?

Věta 5.4 (O existenci adjungovaného operátoru) *$\boldsymbol{L}$ je lineární operátor s definičním oborem $\mathcal{D}(\boldsymbol{L})$. Pak*

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*) \neq \emptyset \Leftrightarrow \overline{\mathcal{D}(\boldsymbol{L})} = H .$$

Důkaz. Lze najít ve skriptech Lukeš, 11.6. □

Pozn.: Nejjednodušší realizace $\overline{\mathcal{D}(\boldsymbol{L})} = H$ se zdá být přímo $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}) = H$. K vysvětlení toho, proč tato situace nastat nemůže se dostaneme později.

Definice 5.5 (Symetrický operátor) $\boldsymbol{L} : \mathcal{D}(\boldsymbol{L}) \to H$ je lineární operátor. Řekneme, že $\boldsymbol{L}$ je symetrický, pokud

$$\big(\boldsymbol{L}x, y\big)_H = \big(x, \boldsymbol{L}y\big)_H \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(\boldsymbol{L})\,.$$

Což pro neomezené operátory není totéž, co samoadjungovanost.[4]

Lemma 5.6

$$\boldsymbol{L} \text{ je symetrický } \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{D}(\boldsymbol{L}) \subseteq \mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*) \\ \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}^* \text{ na } \mathcal{D}(\boldsymbol{L}) \end{cases}$$

Z toho plyne implikace $\underline{\boldsymbol{L} \text{ je samoadjungovaný} \Rightarrow \boldsymbol{L} \text{ je symetrický}}$. Speciálně pak $\underline{\boldsymbol{L} \text{ není symetrický} \Rightarrow \boldsymbol{L} \text{ není samoadjungovaný}}$. Ta se často v praxi využívá k důkazu, že $\boldsymbol{L}$ není samoadjungovaný, aniž je třeba hledat $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*)$.

Věta 5.7 (O omezenosti symetrického operátoru na celém prostoru)

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{D}(\boldsymbol{L}) = H \\ \boldsymbol{L} \textit{ je lineární a symetrický} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{L} \textit{ je omezený}$$

Důkaz. Lze nalézt opět ve skriptech Lukeš, 11.10. □

Odtud plyne

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{D}(\boldsymbol{L}) = H \\ \boldsymbol{L} \text{ je lineární a samoadjungovaný} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{L} \text{ je omezený,}$$

tedy neomezený, samoadjungovaný operátor má $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}) \neq H$.

Jediná možná situace pro samoadjungované neomezené operátory na H, je

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{L}) \neq H,\ \overline{\mathcal{D}(\boldsymbol{L})} = H$$
$$\mathcal{D}(\boldsymbol{L}) \text{ je lin. podprostor.}$$

O takovém operátoru $\boldsymbol{L}$ se říká, že je *hustě definován* na H.

[4]Terminologie používaná v literatuře se různí. Někteří autoři používají termínů „symetrický“ a „samoadjungovaný“ (kromě tohoto textu ještě například např. Lukeš, Formánek) a jiní „hermitovský“ (pro takový, kterému zde říkáme symetrický) a „samoadjungovaný“ (např. Černý+Pokorný, Čihák). Mnoho autorů mezi pojmy dokonce nerozlišuje, většinou z důvodu práce s omezenými operátory, kde všechny pojmy skutečně splývají.

Příklad (Operátor derivování) $H = L^2\left((0,1)\right)$, $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}) = \mathcal{C}^1\left([0,1]\right)$. Na tomto prostoru definujme $\boldsymbol{L}f = f'$. Víme, že $\overline{\mathcal{C}^1\left([0,1]\right)} = L^2((0,1))$. Operátor je zřejmě lineární a neomezený.
Zkoumejme symetrii jako nutnou podmínku samoadjungovanosti. Zřejmě je

$$\left(\boldsymbol{L}f, g\right)_{L^2} = \left(f', g\right)_{L^2} = \int_0^1 f'(x)\overline{g}(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \left(f, \boldsymbol{L}g\right)_{L^2} = \int_0^1 f(x)\overline{g}'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aplikujeme-li metodu per-partes, dostaneme

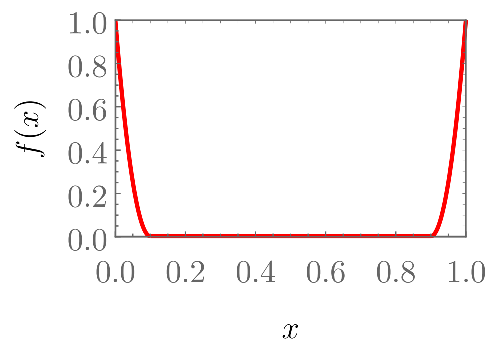
$$\int_0^1 f'(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)\overline{g(x)}\Big]_0^1 - \int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Ani v případě, že se pomocí vhodných okrajových podmínek zbavíme krajních členů, nemůže být operátor derivace $\boldsymbol{L}$ nikdy symetrický, tedy ani samoadjungovaný, kvůli změně znaménka před integrálem.
Určíme nyní $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*)$ vyšetřením množiny

$$\left\{g \in C^1\left([0,1]\right) : \exists! h^* \in L^2\left((0,1)\right) \text{ tak, že } \overbrace{\left(\boldsymbol{L}f, g\right)_{L^2} = \left(f, h^*\right)_{L^2}}^{[f\overline{g}]_0^1 - \int_0^1 f\overline{g'} = \int_0^1 f\overline{h^*} \quad (\star)} \ \forall f \in C^1\left([0,1]\right)\right\},$$

přičemž platnost rozpisu dle Per-Partes vyžadujeme pro $\forall f \in \mathcal{C}^1([0,1])$.
Volbou speciálních funkcí f zjistíme nutné podmínky.

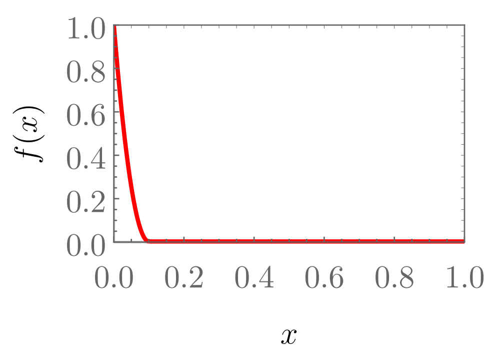
1. Zvolíme funkci f jako na obrázku:

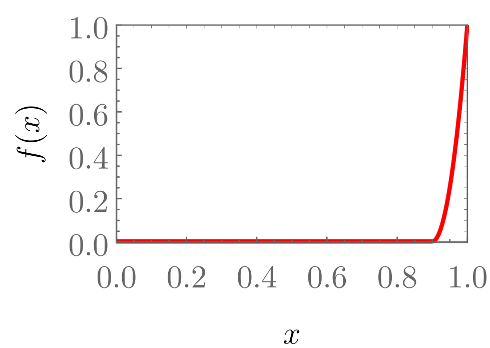


   Při dosazení těchto f_ϵ do $(\star)$ a provedením limity $\epsilon \to 0^+$ dostaneme $[f\overline{g}]_0^1 = 0$.

2. Volbou f_δ, definovaného obrázkem jako

3. Zvolíme funkci dle jednoho z obrázků





   dostaneme podmínku $g(0) = g(1) = 0$. To je první zpřesnění, ze kterého plyne

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*) \subseteq \{g \in \mathcal{C}^1([0,1]),\ g(0) = g(1) = 0\}$$

4. $(\star)$ se tedy redukuje na

$$-\int\limits_0^1 f\overline{g'} = \int\limits_0^1 f\overline{h^*}$$

$$\int\limits_0^1 f\overline{(g'+h^*)} = 0 \;\; \forall f \in \mathcal{C}^1([0,1]).$$

   Odtud (z du Bois-Reymondova lemmatu) plyne, že $g' + h^*$ je s.v. rovno nule, a tedy že h^* je s.v. rovno spojité funkci $-g'$. Po předefinování h^* v bodech míry nula (hodnotami funkce $-g'$) lze tedy h^* považovat za spojité.

Nalezli jsme h^*, tedy není třeba dále modifikovat $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*)$. Máme

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*) &= \{g \in \mathcal{C}^1([0,1]),\ g(0) = g(1) = 0\} \\ \boldsymbol{L}^* g &= -g'\end{aligned}$$

Evidentně $\boldsymbol{L} \neq \boldsymbol{L}^*$, navíc i $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*) \subsetneqq \mathcal{D}(\boldsymbol{L})$. Zcela jistě tedy nejde o samoadjungovaný operátor.

Příklad (Modifikovaný operátor derivování) Pro samoadjungovanost operátoru derivace je třeba modifikovat jak $\boldsymbol{L}$ (aby vyšlo $\boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{L}$), tak $\mathcal{D}(\boldsymbol{L})$ (aby byl $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}^*) = \mathcal{D}(\boldsymbol{L})$). Myšlenka pro modifikaci vychází z pozorování

$$\boldsymbol{L}f = f' \;\Rightarrow\; \boldsymbol{L}^* f = -f',$$

přičemž přebývající znaménko je třeba „rozpůlit mezi $\boldsymbol{L}$ a $\boldsymbol{L}^*$“. Definujme tedy

$$\boldsymbol{L}f \coloneqq if' \quad \text{na } L^2\left((0,1)\right).$$

Jelikož nutnou podmínkou pro samoadjungovanost je symetrie, bude pro symetrii potřeba mít v $\mathcal{D}(\boldsymbol{L})$ správně podchyceny okrajové podmínky. Uvažujme tři možnosti

1. $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}_1) = L^2\left((0,1)\right) \cap C^1\left([0,1]\right)$,
2. $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}_2) = L^2\left((0,1)\right) \cap C^1\left([0,1]\right) \cap \{f(x) : f(0) = f(1)\}$,
3. $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}_3) = L^2\left((0,1)\right) \cap C^1\left([0,1]\right) \cap \{f(x) : f(0) = f(1) = 0\}$

a tři restrikce

$$\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L}|_{\mathcal{D}(\boldsymbol{L}_1)}\,, \qquad \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{L}|_{\mathcal{D}(\boldsymbol{L}_2)}\,, \qquad \boldsymbol{L}_3 = \boldsymbol{L}|_{\mathcal{D}(\boldsymbol{L}_3)}\,.$$

Symetrii prozkoumáme opět pomocí per partes:

$$\big(\boldsymbol{L}f, g\big) = \int_0^1 if'\overline{g} = \underbrace{[if\overline{g}]_0^1}_{(\star\star)} - i\int_0^1 f\overline{g}' = \underbrace{[if\overline{g}]_0^1}_{(\star\star)} + \int_0^1 f\overline{ig'} = (\star\star) + \big(f, \boldsymbol{L}g\big)$$

$$(\star\star) \begin{cases} = 0 \;\text{ pro } f, g \in \mathcal{D}(\boldsymbol{L}_2), \text{ nebo } f, g \in \mathcal{D}(\boldsymbol{L}_3) \\ \neq 0 \;\text{ pro } f, g \in \mathcal{D}(\boldsymbol{L}_1), \end{cases}$$

z čehož plyne, že symetrické jsou pouze $\boldsymbol{L}_2, \boldsymbol{L}_3$ a $\boldsymbol{L}_1$ symetrický není. Jako cvičení si zkuste ukázat

- $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}_1^*) = \mathcal{D}(\boldsymbol{L}_3) \subsetneqq \mathcal{D}(\boldsymbol{L}_1)$ (další potvrzení toho, že $\boldsymbol{L}_1$ není symetrický)
- $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}_2^*) = \mathcal{D}(\boldsymbol{L}_2)$ (tj. je symetrický a může být i samaoadjungovaný, pokud $\boldsymbol{L}_2^* = \boldsymbol{L}_2$)
- $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}_3^*) = \mathcal{D}(\boldsymbol{L}_1) \supsetneqq \mathcal{D}(\boldsymbol{L}_3)$ (tj. potvrzení symetrie, ale zároveň důkaz, že $\boldsymbol{L}_3$ *není* samoadjungovaný.)

Jediný kandidát na samoadjungovanost je $\boldsymbol{L}_2$, který je symetrický a splňuje $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}_2^*) = \mathcal{D}(\boldsymbol{L}_2)$. Zbývá ověřit, že $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}^*$ na tomto definičním oboru. To plyne podobně jako v předchozím příkladu. Ze symetrie máme

$$\big(\boldsymbol{L}f, g\big) = \big(f, \boldsymbol{L}g\big) \overset{\text{na } \mathcal{D}(\boldsymbol{L}_2^*)}{=} \big(f, h^*\big) = \big(f, \boldsymbol{L}^* g\big) \quad \forall f \in \mathcal{C}^1([0,1])$$

a dále postupujeme stejně použitím du Bois-Reymondova lemmatu.
<u>Závěr:</u> $\boldsymbol{L}_1$ není symetrický (ani samoadjungovaný), $\boldsymbol{L}_3$ je symetrický (ale není samoadjungovaný) a $\boldsymbol{L}_2$ je samoadjungovaný. Vidíme, že i v případě $\mathcal{D}(\boldsymbol{L})$ se okrajové podmínky „rozdělily“ mezi $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}_2)$ a $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}_2^*)$.

Poznámka Připomeňme kvantověmechanický operátor hybnosti

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \quad \text{definovaný na } L^2(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})\,.$$

Modifikací předchozího příkladu snadno zjistíme, že operátor definovaný na takové množině je symetrický, ale není obecně samoadjungovaný. Je si třeba uvědomit, z jakého prostoru bereme vlastní vektory. Pokud bychom se snažili nalézt řešení rovnice

$$-i\hbar \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = k\psi(x) ,$$

zjistili bychom, že řešení rovnice $\psi(x,k)$ pro vlastní funkce

$$\psi(x,k) = Ce^{\frac{ik}{\hbar}x}$$

nepatří do $L^2(\mathbb{R})$. Operátor hybnosti tedy na $L^2(\mathbb{R})$ nemá žádné vlastní vektory. V náseldující kapitole se s tímto nedostatkem budeme schopni vyrovnat pomocí tzv. váhových Hilbertových prostorů L^2_ϱ.

5.2 Spektrum neomezených operátorů

V případě omezených operátorů hrály zásadní roli pro charakter spektra následující třídy operátorů:

- Samoadjungované operátory: jsou zavedeny i pro neomezené operátory, avšak komplikovanějším způsobem.
- Kompaktní operátory: žádný neomezený operátor však nemůže být kompaktní, protože každý kompaktní operátor už je omezený. Roli kompaktních operátorů pro nemezené operátory částečně převezme třída tzv. uzavřených operátorů, kterou budeme nyní definovat.

Definice 5.8 (Uzavřený operátor) $\boldsymbol{L} : \mathcal{D}(\boldsymbol{L}) \to H$ je lineární operátor hustě definovaný na H. Řekneme, že $\boldsymbol{L}$ je uzavřený, pokud pro $x_n \in \mathcal{D}(\boldsymbol{L})$:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_n & \to & x \in H \\ \boldsymbol{L}x_n & \to & g \in H \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \mathcal{D}(\boldsymbol{L}),\ \boldsymbol{L}x = g,$$

nebo-li $\boldsymbol{L}$ má *uzavřený graf*: $[x_n, \boldsymbol{L}x_n] \to [x,g] \ \Rightarrow g = \boldsymbol{L}x$ a $[x, \boldsymbol{L}x] \in$ graf. Slovně lze tuto vlastnost definovat tak, že „konverguje-li posloupnost vzorů a současně i posloupnost obrazů, pak musí limita obrazu být zobrazenou limitou vzoru.“

Dále jsme u omezených operátorů studovali, zda jsou prosté a na. Tato otázka má smysl i u neomezených operátorů. Konečně jsme takové studovali spojitost inverzních operátorů. Touto otázkou se, celkem překvapivě, má smysl zabývat i v této kapitole. Ukazuje se, že nespojité lineární operátory v nekonečné dimenzi mohou být uzavřené, ač jsou nespojité a mohou mít spojitou inverzi, ač jsou samy nespojité. To jen ukazuje, jak malou intuici máme v prostorech nekonečné dimenze.

Věta 5.9 (O spektrálních vlastnostech neomezených operátorů) *$\boldsymbol{L} : \mathcal{D}(\boldsymbol{L}) \to H$ je lineární operátor hustě definovaný na H. Pak*

1. $\overline{\mathcal{R}(\boldsymbol{L})} = H \ \Rightarrow \ \boldsymbol{L}$ *je prostý a na* $\mathcal{R}(\boldsymbol{L})$.
2. $\mathcal{R}(\boldsymbol{L}) = H \ \Rightarrow \ \boldsymbol{L}$ *je prostý, na H, samoadjungovaný a* $\boldsymbol{L}^{-1}$ *je spojitý.*
3. $\boldsymbol{L}^{-1}$ *je spojitý* $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{L}$ *je prostý, na* H *a uzavřený.*

Důkaz. Viz např. Rudin: Functional analysis, 13.11 a dál. □

Definice 5.10 (Resolventa, spektrum operátoru)

- Resolventa $\boldsymbol{L} \equiv \mathrm{Res}\,(\boldsymbol{L}) := \{\lambda \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{L}_\lambda$ prostý, na $H,\ \boldsymbol{L}_\lambda^{-1}$ spojitý$\}$.
- Spektrum $\boldsymbol{L} \equiv \sigma(\boldsymbol{L}) := \mathbb{C} \setminus \mathrm{Res}\ \boldsymbol{L} = \begin{cases} \text{bodové spektrum (vl. č.)} := \{\lambda \in \mathbb{C},\ \exists x \in \mathcal{D}(\boldsymbol{L}),\ x \neq 0,\ \boldsymbol{L}x = \lambda x\} \\ \text{zbytek} \end{cases}$

Poznámka Spektrum neomezeného operátoru může být jakákoli neomezená podmnožina $\mathbb{C}$, včetně celého $\mathbb{C}$.

Vlastnosti spektra lineárních neomezených operátorů $\boldsymbol{L}$ na H

1. $\boldsymbol{L}$ je uzavřený $\Rightarrow \sigma(\boldsymbol{L})$ je uzavřená množina v $\mathbb{C}$.
2. $\boldsymbol{L}$ uzavřený a symetrický, pak nastane právě jedna z následujících situací:
   (a) $\sigma(\boldsymbol{L}) = \mathbb{C}$,
   (b) $\sigma(\boldsymbol{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} \lambda \geq 0\}$,
   (c) $\sigma(\boldsymbol{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} \lambda \leq 0\}$,
   (d) $\sigma(\boldsymbol{L})$ je uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$.

   Pouze v bodu d) je $\boldsymbol{L}$ samoadjungovaný, jinak je pouze symetrický.
3. Je-li $\boldsymbol{L}$ symetrický a má reálná vlastní čísla (případně pokud je uzavřený a samoadjungovaný), pak jsou vlastní vektory příslušející různým vlastním číslům na sebe kolmé.

Poznámka

1. Druhá část předchozí věty ukazuje velkou odlišnost mezi samoadjungovaným a symetrickým operátorem. Neomezený symetrický operátor může obsahovat prvky z nebodového spektra, které nejsou reálné. U samoadjungovaného operátoru taková situace nemůže nastat.
2. Vlastních čísel i vektorů může mít neomezený operátor obecně nespočetně mnoho. Odvětví matematiky zabývající se touto problematikou se nazývá spojitý funkcionální kalkulus, užívající obecnějšího integrálu namísto sumace při rozkladu prvků do vlastních vektorů.
3. V teorii o neomezených operátorech nemáme apriori věty o úplnosti zadaného systému. V konkrétních případech je třeba jejich úplnost dokazovat případ od případu.

6 Lineární diferenciální operátory

V této kapitole zavedeme speciální případ lineárních neomezených operátorů, lineární diferenciální operátory, k nimž budeme generovat báze v polynomiálním tvaru.

6.1 Výrazy v samoadjungovaném tvaru

Definice 6.1 (Lineární diferenciální výraz n-tého řádu) Mějme $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $y \in \mathcal{C}^n(a,b)$. Lineárním diferenciálním výrazem n-tého řádu nazveme výraz

$$\ell(y) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(k)}, \tag{6.1}$$

kde $y = y(x)$, $\forall k$ je $p_k \in \mathcal{C}(a,b)$ a platí $p_n \not\equiv 0$ na (a,b).

Poznámka V této definici požadujeme existenci většího počtu spojitých derivací pro funkce p_k, než je pro korektnost definice nutné. Činíme tak však s ohledem na (6.2). Terminologicky: v předchozí definici nepoužíváme pojem lineární diferenciální operátor, abychom odlišili skutečnost, že k definici operátoru potřebujeme navíc mít vhodný definiční obor – nejen prostor všech funkcí, pro který má (6.1) smysl, ale takový definiční obor, který z ℓ učiní alespoň symetrický operátor.

Definice 6.2 (Lineární diferenciální operátor) Pojmem lineární diferenciální operátor $\boldsymbol{L}$ n-tého řádu myslíme příslušný lineární diferenciální výraz $\ell(y)$ na určitém předem specifikovaném definičním oboru, tedy

$$\boldsymbol{L} = \ell|_{\mathcal{D}(\boldsymbol{L})}$$

Budeme chtít, aby v souladu s úvahami předchozí kapitoly byl $\boldsymbol{L}$ hustě definovaný na Hilbertově prostoru H, tedy $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}) \neq H$, $\overline{\mathcal{D}(\boldsymbol{L})} = H$. Typicky budeme mít $\mathcal{D}(\boldsymbol{L}) \subsetneqq (H \cap \mathcal{C}^n(a,b))$, tak aby $\mathcal{D}(\boldsymbol{L})$ tvořil lineární podprostor H.

Víme, že symetrie je nutnou podmínkou k samoadjungovanosti. Dále budeme hledat další nutné podmínky samoadjungovanosti, resp. symetrie a budeme pracovat na mnohem menším prostoru $\mathcal{C}^\infty_{cpt}(a,b)$, tedy nekonečněkrát diferencovatelné funkce s kompaktním nosičem.

Poznámka Díky tomuto přístupu se při provádění per partes nemusíme zabývat okrajovými členy jelikož všechny funkce z uvažovaného prostoru $\mathcal{C}^\infty_{cpt}(a,b)$ (a jejich derivace) jsou na nějakém okolí krajních bodů nulové. Toto zjednodušení si můžeme dovolit, jelikož hledáme nutné podmínky samoadjungovanosti, resp. symetrie. Pokud operátor nebude splňovat podmínky pro takto „hezké“ funkce, nemůže je splňovat pro žádný jiný definičný obor. Při zkoumání či konstukci $\mathcal{D}(\boldsymbol{L})$, však musíme mít vždy na mysli (či se přesvědčit o tom), že $\mathcal{C}^\infty_{cpt}(a,b)$ je prostor hustý v $\mathcal{D}(\boldsymbol{L})$, aby se výsledky, dosažení na $\mathcal{C}^\infty_{cpt}(a,b)$ daly pomocí argumentu hustoty přenést na $\mathcal{D}(\boldsymbol{L})$. Všimněte si například konce důkazu Lemmatu 6.4.

Definice 6.3 (Adjungovaný výraz k $\ell(y)$) Adjungovaný výraz k výrazu $\ell(y)$ značíme $\ell^*(y)$ a definujeme jej jako

$$\ell^*(y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\overline{p_k(y)}\ y\right)^{(k)} \tag{6.2}$$

Lemma 6.4 K danému ℓ je ℓ^* jediný lineární diferenciální výraz pro který

$$(\ell(y), z) = (y, \ell^*(z)) \qquad \forall y, z \in \mathcal{C}^\infty_{cpt}(a,b).$$

Důkaz. V každém z členů typu $\int_a^b p_k(x) y^{(k)}(x)\overline{z(x)}$, $k = 1, \ldots, n$ provedeme nejprve k-krát per partes a dostaneme:

$$\int_a^b p_k(x) y^{(k)}(x)\overline{z(x)} = (-1) \int_a^b \left(p_k(x)\overline{z(x)}\right)' y^{(k-1)} = (-1)^{(k)} \int_a^b \left(p_k(x)\overline{z(x)}\right)^{(k)} y.$$

hraniční členy jsou nulové díky tomu, z jakých prostorů bereme y, z. Celkově pak máme

$$\big(\ell(y), z\big) = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_k(x) y^{(k)}(x) \overline{z(x)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{(k)} \int_a^b \Big(p_k(x)\overline{z(x)}\Big)^{(k)} y = \big(y, \ell^*(z)\big).$$

Poslední rovnost platí díky $p_k(x)\overline{z(x)} = \overline{\overline{p_k(x)} z(x)}$.

Jednoznačnost dokážeme sporem, předpokládejme že existují dva adjungované operátory ℓ^* a $\tilde{\ell}$ splňující rovnost. Máme

$$\big(\ell(y), z\big) = \big(y, \ell^*(z)\big) = \big(y, \tilde{\ell}(z)\big) \qquad \forall y, z \in \mathcal{C}^\infty_{cpt}(a, b).$$

Pak ale nutně z poslední rovnosti, která musí platit pro všechna y z husté podmnožiny v L^2, dostáváme

$$\ell^*(z) = \tilde{\ell}(z) \qquad \forall z \in \mathcal{C}^\infty_{cpt}(a, b),$$

pokud si totiž zvolíme pevné z, pak ze spojitosti skalárního součinu musí být prvky v druhé složce skalárního součinu stejné. TO však znamená, že $\ell^* = \tilde{\ell}$ na $\mathcal{C}^\infty_{cpt}(a, b)$. Tato množina funkcí je však hustá v $\mathcal{D}(\boldsymbol{L})$ a proto

$$\ell^* = \tilde{\ell} \text{ na } \mathcal{D}(\boldsymbol{L}).$$

□

Další podmínkou kterou pro samoadjungovanost potřebujeme je $\ell = \ell^*$, což klade podmínku na tvar jednotlivých koeficientů p_k

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \; y^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\overline{p_k} \; y\right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \; \overline{p_k}^{(k-j)} y^{(j)}.$$

Srovnejme koeficienty u $y^{(n)}$

$$\begin{aligned} & p_n = (-1)^n \overline{p_n} \\ & n \text{ sudé} : p_n = \overline{p_n} \implies p_n \text{ je reálný} \\ & n \text{ liché} : p_n = -\overline{p_n} \implies p_n + \overline{p_n} = 2Re(p_n) = 0 \implies p_n \text{ je ryze imaginární} \end{aligned}$$

a dále postupujeme stejně. Nyní definujeme elementární diferenciální výrazy, pomocí kterých lineární diferenciální výraz $\ell = \ell^*$ následně zapíšeme.

Definice 6.5 (Elementární diferenciální výraz) Elementárním diferenciální výrazem nazveme LDV ve tvaru

$$\begin{aligned} E_{2k} &= (-1)^k \left(p \; y^{(k)}\right)^{(k)} \\ E_{2k-1} &= \frac{i}{2} \left[\left(p \; y^{(k-1)}\right)^{(k)} + \left(p \; y^{(k)}\right)^{(k-1)} \right], \end{aligned} \tag{6.3}$$

kde p je reálná funkce.

Věta 6.6 (O kombinaci elementárních diferenciálních výrazů) $\ell(y) = \ell^*(y)$ $\forall y \in \mathcal{C}^\infty_{cpt}$ $\iff$ *$\ell(y)$ je konečnou lineární kombinací elementárních diferenciálních výrazů E_{2k} a E_{2k-1}. Více viz* Čihák*, str. 210.*

Příklad Podívejme se, jak elementární diferenciální výraz vyjde pro $k = 1$ a $k = 2$.

$$E_1 = \frac{i}{2} \left((p \; y)' + p \; y'\right) = \frac{i}{2}(p' \; y + 2p \; y') = ip \; y' + \frac{i}{2} p' \; y. \text{ Pro } p = 1 \text{ dostáváme } iy'.$$

$$E_2 = -(p \; y')' \ldots \text{ tzv. diferenciální výraz 2. řádu v samoadjungovaném tvaru.}$$

Poznámka Pokud bychom pracovali ve vyšší dimenzi, bude E_2 odpovídat základnímu tvaru pro rovnici druhého řádu pro funkci u

$$-\operatorname{div}(p\nabla u).$$

Pro $p \equiv 1$ pak dostáváme Laplaceův operátor (při omezení na příslušný definiční obor)

$$-\Delta u$$

který je tedy v samoadjungovaném tvaru.

6.2 Ortogonální báze v L^2_ρ složené z polynomů

Budeme uvažovat prostor

$$H = L^2_\rho(a,b) \equiv \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{C}; \int_a^b \rho\,|f|^2 < \infty,\ \text{kde } \rho : (a,b) \to \mathbb{R} \text{ je tzv. } \underline{\text{váha}} \text{ splňující } \rho > 0, \rho \in \mathcal{C}(a,b), \rho \in L^1 \right\}.$$

Poznámka Často se uvažuje obecnější váha než $\rho \in \mathcal{C}(a,b)$.

Lze ukázat, že $L^2_\rho(a,b)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$\left(y,z\right)_{2,\rho} \equiv \int_a^b \rho y \overline{z}$$

a normou

$$\|y\|_{2,\rho} = \int_a^b \rho\,|y|^2\,.$$

Poznámka Prostor L^2_ρ uvažujeme např. proto, že chceme pracovat s polynomy na $\mathbb{R}$. Přitom žádný polynom P není prvkem $L^2(\mathbb{R})$ ale všechny polynomy jsou prvkem $L^2_{e^{-x^2}}$.

Uvažujme nyní $\boldsymbol{T} : \mathcal{D}(\boldsymbol{T}) \to L^2_\rho$, symetrický na $\mathcal{D}(\boldsymbol{T})$, přitom nechť $\mathcal{D}(\boldsymbol{T})$ je takové, že $\mathcal{D}(\boldsymbol{T}) \subsetneqq L^2_\rho$, $\overline{\mathcal{D}(\boldsymbol{T})} = L^2_\rho$ a $\mathcal{D}(\boldsymbol{T}) \subset L^2_\rho \cap L^2$.

Definice 6.7 (Vlastní číslo a vlastní funkce s vahou ρ) $\boldsymbol{T}$ je hustě definovaný na $L^2_\rho(a,b)$. Číslo λ nazveme vlastním číslem s vahou ρ, pokud $\exists y \neq 0, y \in L^2_\rho$ takové, že

$$\boldsymbol{T}y = \lambda\rho y \tag{6.4}$$

Nechť $\boldsymbol{T}$ je alespoň symetrický na $\mathcal{D}(\boldsymbol{T})$ ve smyslu $\left(\boldsymbol{T}y,z\right)_2 = \left(y,\boldsymbol{T}z\right)_2$ Všimněte si, že zde pracujeme se skalárním součinem <u>bez váhy</u>, přestože vlastní vektory a vlastní čísla zvažujeme <u>s vahou</u>. Potom

$$\begin{array}{l} \left(\boldsymbol{T}y,y\right)_2 = \left(\lambda y\rho,y\right)_2 = \lambda\left(\rho y,y\right)_2 = \lambda \displaystyle\int_a^b \rho|y|^2 = \lambda\,\|y\|^2_{2,\rho} \\ \quad\shortparallel \\ \left(y,\boldsymbol{T}y\right)_2 = \cdots = \overline{\lambda}\,\|y\|^2_{2,\rho}\,. \end{array}$$

Pokud je tedy $y \in \mathcal{D}(\boldsymbol{T})$, je $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dále pro $\boldsymbol{T}y_j = \lambda_j\rho y_j$, $j = 1,2\ldots$, ($\boldsymbol{T}$ je symetrický, tedy obě tato vlastní čásla jsou reálná), $\lambda_1 \neq \lambda_2$, máme

$$\lambda_1\left(y_1,y_2\right)_{2,\rho} = \lambda_1\left(y_1\rho,y_2\right)_2 = \left(\boldsymbol{T}y_1,y_2\right)_2 = \left(y_1,\boldsymbol{T}y_2\right) = \cdots = \lambda_2\left(y_1,y_2\right)_{2,\rho}. \tag{6.5}$$

Jelikož máme různá vlastní čísla $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dostáváme kolmost v L^2_ρ: $\left(y_1,y_2\right)_{2,\rho} = 0$.

<u>Závěr:</u> V případě symetrického operátoru $\mathcal{T}$ jsou vlastní čísla vahou reálná a vlastní vektory pak tvoří ortogonální systém v L^2_ρ. Obecně však v tomto případě <u>není k dispozici</u>

- výrok o spočetnosti takto vytvořeného systému OG funkcí,
- výrok o úplnosti tohoto sytému, tedy o tom, že by tvořil bázi (musí se dokazovat pro jednotlivé případy zvlášť).

Víme však, že generujeme OG množiny. Jednodušší je situace prostorů funkcí na kompaktních kmožínách, kde máme k dispozici Weistrassovu větu o tom, že polynomy jsou husté v $\mathcal{C}(K)$ (pro K kompakt), pokud daný systém obsahuje polynomy všech stupňů. Zdá se tedy rozumné soustředit se na tuto speciální OG množinu. Jelikož $\mathcal{C}(K)$ je hustá v $L^2_\rho(K)$, plyne pak úplnost OG množiny polynomů (obsahující polynomy všech stupňů) v $L^2_\rho(K)$ z Weistrassovy věty. Na nekompaktech se úplnost jakékoli OG množiny funkcí dokazuje mnohem obtížněji.

Na základě této poznámky se budeme nyní zabývat situací OG množin vlastních funkcí, které jsou polynomy.

Věta 6.8 (Věta o rekurentním vzorci) *Mějme prostor $L^2_\rho(a,b)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, ρ takové, že $\|P\|_{2,\rho} < \infty$ $\forall$ polynomy P. Buď $\{varphi_n\}_{n=0}^\infty$ systém reálných OG polynomů v $L^2_\rho(a,b)$, stupeň$(\varphi_n) = n$, $n = 0,1,2,3,\ldots$ Potom $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists A_n, B_n, C_n \in \mathbb{R}$, že*

$$x\varphi_n = A_n\varphi_{n+1} + C_n\varphi_n + B_n\varphi_{n-1}. \tag{6.6}$$

Poznámka

$$n = 0 \implies \varphi_0 = c \neq 0, \text{ potom } x\varphi_0 = cx = \frac{c}{a}\underbrace{(ax+b)}_{\varphi_1,\ a\neq 0} - \frac{b}{a}\underbrace{c}_{\varphi_0} \implies x\varphi_0 = \frac{c}{a}\varphi_1 - \frac{b}{a}\varphi_0$$

Důkaz. $n \in \mathbb{N}$: stupeň$(x\varphi_n) = n+1 \implies \exists \gamma_{n,k} \in \mathbb{R}$, že

$$x\varphi_n = \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_{n,k}\varphi_k \quad \text{(obecně polynomy nemusí být OG, postačující podmínkou je stupeň}(\varphi_n) = n \tag{6.7}$$

Vztah (6.7) platí obecně pro jakékoliv polynomy, stupeň$(\varphi_n) = n$, tyto polynomy nemusí být OG. Nyní provedeme na (6.7) skalární součin „s vahou“: $\big(\bullet, \varphi_j\big)_{2,\rho}$ $\forall j = 0,1,\ldots$ a dostaneme

$$\big(x\varphi_n, \varphi_j\big)_{2,\rho} = \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_{n,k} \underbrace{\big(\varphi_k, \varphi_j\big)_{2,\rho}}_{\delta_{kj}\|\varphi_k\|^2_{2,\rho}} = \begin{cases} \gamma_{n,j}\,\|\varphi_j\|^2_{2,\rho} & j \le n+1 \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases} \tag{6.8}$$

jelikož $\gamma_{n,j} = 0$ pro $j > n+1$ (suma je rovna nule pro $j > n+1$ protože $\varphi_k \perp \varphi_j$ pro $k \in \{0,\ldots,n+1\}$ a $j > n+1$).

Kvůli reálnosti φ_n je

$$\big(x\varphi_n, \varphi_j\big)_{2,\rho} = \big(\varphi_n, x\varphi_j\big)_{2,\rho} = \big(\varphi_n, \sum_{p=0}^{j+1}\gamma_{j,p}\varphi_p\big)_{2,\rho} = \sum_{p=0}^{j+1}\gamma_{j,p}\big(\varphi_n, \varphi_p\big)_{2,\rho}. \tag{6.9}$$

Tento vztah porovnáme s (6.8), kerý budeme číst tak, že „výsledný výraz je nulový, pokud je index u φ, který není sčítacím indexem, větší než horní mez součtu“. Zde to tedy znamená, že výraz (6.9) je nulový pro $n > j+1$ a tedy nenulový pouze pro $j \ge n-1$. Poslední výraz v (6.9) je však stále roven poslednímu výrazu v (6.8), tedy

$$\gamma_{n,j}\,\|\varphi_j\|^2_{2,\rho}, \tag{6.10}$$

přičemž jsme zjistili, že tento výraz je nenulový pouze pro $n-1 \ge j \ge n+1$. Protože normy všech polynomů φ_j jsou nenulové (jde o polynomy stupně j), rozhoduje o nulovosti výrazu (6.10) koeficient $\gamma_{n,j}$. To znamená, že jedinými nenulovými koeficienty jsou $\gamma_{n,n-1}$, $\gamma_{n,n}$ a $\gamma_{n,n+1}$. Z (6.7) pak plyne

$$x\varphi_n = \underbrace{\gamma_{n,n-1}}_{=:B_n}\varphi_{n-1} + \underbrace{\gamma_{n,n}}_{=:C_n}\varphi_n + \underbrace{\gamma_{n,n+1}}_{=:A_n}\varphi_{n+1}.$$

$\square$

Tento rekurentní vzorec lze např. využít pro vypočet systémů OG polynomů a výpočet jejich norem. Víme, že:

$$x\varphi_n = A_n\varphi_{n+1} + C_n\varphi_n + B_n\varphi_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \tag{6.11}$$

Především vidíme, že

- $A_n \neq 0\ \forall n$, jinak by byl stupeň polynomu vpravo roven n, přičemž stupeň polynomu vlevo je $n+1$.
- Vynásobením rovnosti (6.11) nejprve $\left(\bullet, \varphi_{n+1}\right)_{2,\rho}$ a poté $\left(\bullet, \varphi_{n-1}\right)_{2,\rho}$ dostaneme s využitím ortogonality systému $\{\varphi_n\}$, že

$$\begin{aligned} \left(x\varphi_n, \varphi_{n+1}\right)_{2,\rho} &= A_n \left\|\varphi_{n+1}\right\|_{2,\rho}^2 \\ \left(x\varphi_n, \varphi_{n-1}\right)_{2,\rho} &= B_n \left\|\varphi_{n-1}\right\|_{2,\rho}^2 \\ \| \qquad & \\ \left(x\varphi_{n+1}, \varphi_n\right)_{2,\rho} &= B_{n+1} \left\|\varphi_n\right\|_{2,\rho}^2 \ . \end{aligned}$$

  Protože je díky reálnosti polynomů $\left(x\varphi_n, \varphi_{n+1}\right)_{2,\rho} = \left(x\varphi_{n+1}, \varphi_n\right)_{2,\rho}$, plyne porovnáním prvního a třetího řádku předchozího výpočtu $A_n \left\|\varphi_{n+1}\right\|_{2,\rho}^2 = B_{n+1} \left\|\varphi_n\right\|_{2,\rho}^2$, odkud dostaneme rekurentní vztah pro normy

$$\left\|\varphi_{n+1}\right\|_{2,\rho}^2 = \frac{B_{n+1}}{A_n} \left\|\varphi_n\right\|_{2,\rho}^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{6.12}$$

  $\|\varphi_0\|$ a $\|\varphi_1\|$ samozřejmě musíme znát. Navíc z (6.12) a z toho, že $A_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ plyne, že i $B_n \neq 0\ \forall n$.

Poznámka Přesvědčili jsme se, koeficienty A_n a B_n v (6.11) jsou vždy nenulové. Koeficienty C_n však nulové ve speciálním případě být mohou. Konkrétně, pokud je $b = -a$, a váha ρ je sudá na intervalu (a, b), je $C_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Bonus Důkaz této poznámky lze provést například takto: Opět podle obecné vlastnosti polynomů máme

$$\varphi_n(-x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{n,k}\varphi_k(x) \quad \Big/ \left(\bullet, \varphi_j(x)\right)_{2,\rho} \text{ pro } j = 0, \dots, n, \text{ jinak je součin } 0$$

$$\begin{aligned} \beta_{n,j} \left\|\varphi_j\right\|_{2,\rho}^2 = \left(\varphi_n(-x), \varphi_j(x)\right)_{2,\rho} &= \int_{-a}^{a} \varphi_n(-x)\varphi_j(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x \overset{t:=-x}{=} -\int_{a}^{-a} \varphi_n(t)\varphi_j(-t)\rho(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\varphi_n(x), \varphi_j(-x)\right)_{2,\rho} = \left(\varphi_n(x), \sum_{m=0}^{j} \beta_{j,m}\varphi_m(x)\right) = 0 \text{ pro } n > j. \end{aligned}$$

$\beta_{n,j}$ jsou tedy nenulová pouze pro $j = n$ a z prvního vztahu máme tedy $\varphi_n(-x) = \beta_{n,n}\varphi_n(x)$. Nyní srovnejme koeficienty u x^n v polynomu $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$:

$$a_n(-x)^n = \beta_{n,n}a_n x^n \implies \beta_{n,n} = (-1)^n.$$

Proto $\varphi_n(-x) = (-1)^n\varphi_n(x) \implies (\varphi_n(-x))^2 = (\varphi_n(x))^2$, tj. $|\varphi_n|^2$ je <u>sudá</u>.
Závěrem máme

$$\begin{aligned} x\varphi_n &= A_n\varphi_{n+1} + C_n\varphi_n + B_n\varphi_{n-1} \quad \Big/ \left(\bullet, \varphi_n\right)_{2,\rho} \\ \underbrace{\left(x\varphi_n, \varphi_n\right)}_{\|} &= C_n \left\|\varphi_n\right\|_{2,\rho}^2 \\ \overbrace{\int_{-a}^{a} x|\varphi_n|^2\rho(x)} &= 0, \qquad \text{neboť } x \text{ jsou lichá a } |\varphi_n|_\rho^2 \text{ sudá,} \end{aligned}$$

z čehož plyne $C_n = 0$.

6.3 Gaussova redukovaná rovnice a ortogonální systémy polynomů

Uvažujme tzv. Gaussovu redukovanou rovnici (GRR)

$$\boxed{xy'' + (s+1-x)y' - \alpha y = 0}, \quad x \neq 0;\ \alpha, s \in \mathbb{C};\ s \neq -1, -2, -3, \dots \text{ (bez spoilerů, důvod brzy poznáme).}$$

1. Nejprve ukážeme, že tuto rovnici lze psát ve tvaru „vlastní vektor a vlastní číslo s vahou“, tj. ve tvaru

$$\boldsymbol{T}y = \lambda\rho y \quad \text{pro } \lambda \in \mathbb{C} \text{ s vhodnou vahou } \rho,$$

přičemž $\boldsymbol{T}y$ má tvar diferenciálního výrazu v samoadjungovaném tvaru, tj. $\boldsymbol{T}y = (-py')'$. Tedy

$$\begin{aligned} (-py')' &= \lambda\rho y, \quad p \not\equiv 0 \\ -p'y' - py'' - \lambda\rho y &= 0 \\ \boxed{y'' + \frac{p'}{p}y + \lambda\frac{\rho}{p}y = 0} \end{aligned}$$

Porovnáním poslední rovnosti se zadáním GRR a úpravou pro $x \neq 0$ dostaneme

$$y'' + \left(\frac{s+1}{x} - 1\right)y' - \frac{\alpha}{x}y = 0.$$

Jelikož nám stačí nalézt libovolné, netriviální řešení, můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{p'}{p} &= \frac{s+1}{x} - 1 \\ \big(\ln|p|\big)' &= (s+1)\big(\ln|x|\big)' - 1 \\ |p| &= |x|^{s+1}e^{-x}K\,, \quad K > 0 \\ p &= x^{s+1}e^{-x}\,, \quad \text{zvolili jsme větev } x > 0. \end{aligned}$$

Pro $x > 0$ vyžadujeme $\rho \in L^1(0,\infty)$, tedy $\underline{s > -1}$. Navíc máme $\lambda = -\alpha$, $\frac{\rho}{p} = \frac{1}{x} \implies \rho = \frac{p}{x}$, $\rho = x^s e^{-x}$.

Dostali jsme tedy rovnici

$$\boxed{\Big(-\underbrace{x^{s+1}e^{-x}}_{p}y'\Big)' = (-\alpha)\underbrace{x^s e^{-x}}_{\rho}y\,,} \tag{6.13}$$

jejíž řešení řeší GRR. Je podstatné si uvědomit, že pracujeme na prostoru $L^2_\rho(0,\infty) = L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$, $s > -1$

2. Budeme hledat řešení GRR ve tvaru řady. K tomu však musíme učinit násedující úvahy.

   - Pro $x = 0$ GRR degeneruje (ztrácí řád), je potřeba ji vyšetřovat separátně na $(-\infty, 0)$ a na $(0,\infty)$.
   - Můžeme předpokládat, že tato dvě separátní řešení bude možné „slepit“ v bodě $x = 0$ tak, že vznikne řešení na nějakém intervalu $(-a, a) \subset \mathbb{R}$. Pokud hledáme řešení GRR ve třídě takovýchto „slepitelných“ řešení, která jsou navíc analytická v okolí nuly (lze je tam vyjádit Taylorovou řadou) lze je hledat i ve tvaru Taylorovy řady se středem v nule. S tím rizikem, že řešení v tomto tvaru nenajdeme, což by nás dovedlo k závěru, že úloha žádná „slepitelná“ řešení ve tvaru Taylorovy řady nemá.

   Za této podmínky položíme $y =: \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ a dosazením do GRR dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2}x + (s+1)\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n - \alpha\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(n+1)n x^x + \sum_{n=0}^{\infty}(s+1)c_{n+1}(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha x^n &= 0 \end{aligned}$$

Nyní srovnejme koeficienty:

$$
\begin{aligned}
x^0: &\quad (s+1)c_1 = c_0\alpha \implies c_1 = c_0\frac{\alpha}{s+1} \quad (\text{odtud } s \neq -1)\\
\text{pro } n \geq 1 \text{ máme } x^n: &\quad c_{n+1}\left[(n+1)n + (s+1)(n+1)\right] = c_n(n+\alpha)\\
&\qquad c_{n+1} = c_n\frac{n+\alpha}{(n+1)(s+n+1)} \quad (\text{odtud } s \neq -2,-3,\dots)\ ,
\end{aligned}
$$

přičemž získaný rekurentní vztah je platný i pro $n = 0$. Protože každý násobek řešení GRR je zase jejím řešením, lze BÚNO volit základní řešení pro $c_0 = 1$. Dostáváme, že koeficienty řady, která definuje řešení, by musely mít tvar

$$
\begin{aligned}
c_0 &= 1\\
c_{n+1} &= \frac{n+\alpha}{n+s+1}\frac{c_n}{n+1}\,, \quad \text{pro } n = 0,1,2,\dots; s \neq -1,-2,\dots\,.
\end{aligned}
$$

Ještě však musíme ukázat, že řada s takto danými koeficienty $c_0,\ c_1$ někde konverguje. Protože řady s koeficienty tohoto typu tvoří jednu velmi důležitou třídu řad, věnujeme jim následující intermezzo.

Intermezzo: Hypergeometrické řady

Definice 6.9 (Hypergeometrická řada) Hypergeometrickou řadou nazveme mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

pro koeficienty splňující

- $\exists$ polynomy P, Q s koeficienty u nejvyšší mocniny rovnými 1, st $P = p \geq 0$, st $Q = q \geq 0$, Q nemá kořeny mezi $\mathbb{N} \cup \{0\}$,
- $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{P(n)}{Q(n)} \frac{1}{n+1}\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,;\ c_0 = 1$

Poznámka Pro $P(n) = Q(n)(n+1)$ máme $\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1$, $\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = |x|$, tedy geometrickou řadu s kvocientem x. Člen $\frac{1}{n+1}$ je zde jen z historických důvodů.

Rozložme nyní P a Q na kořenové činitele v $\mathbb{C}$ (kořeny na rozdíl od standardních zvyklostí označujeme $-a_j$ a $-b_j$). Dostaneme

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(a_1+n)(a_2+n)\dots(a_p+n)}{(b_1+n)(b_2+n)\dots(b_q+n)} \frac{1}{n+1}\,. \tag{6.14}$$

Pro tuto situaci se zavádí následující zápis hypergeometrické řady:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = {}_pF_q[a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q](x).$$

Z rovnice 6.14 ihned vidíme:

- $p < q+1 \implies \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to 0 \implies R = +\infty \implies \sum c_n x^n$ definuje holomorfní ($\mathcal{C}^\infty$) fci na celém $\mathbb{C}$.
- $p = q+1 \implies \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to 1 \implies R = 1 \implies \sum c_n x^n$ definuje holomorfní ($\mathcal{C}^\infty$) funkci na $\mathcal{U}^1(0)$.
- $p > q+1 \implies \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to \infty \implies R = 0$, což nedefinuje žádnou diferencovatelnou funkci.

Definice 6.10 (Pochhammerův symbol) Pro $a \in \mathbb{C}$ definujme

$$(a)_0 \coloneqq 1\,, \quad (a)_n \coloneqq \underbrace{a(a+1)\dots(a+n-1)}_{n\in\mathbb{N}\text{ členů}}$$

Pochhammerovu symbolu se někdy též říká „Rising factorial" a užívá se i značení $\langle a \rangle_n$. Budeme ho číst „a Pochhammer n", případně „a dole n". Nakonec si ještě všimněte, že např. $(1)_n = n!$, nebo $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$.

S tímto značením přepíšeme rovnici 6.14

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(a_1+n-1)(a_2+n-1)\dots(a_p+n-1)}{(b_1+n-1)(b_2+n-1)\dots(b_q+n-1)} \frac{1}{n} c_{n-1} \\ &= \frac{[(a_1+n-1)(a_2+n-2)]\dots[(a_p+n-1)(a_p+n-2)]}{\underbrace{[(b_1+n-1)(b_2+n-2)]}_{\text{dalšími kroky jde k } (b_1+n-1)\dots(b_1)=(b_1)_n}\dots[(b_q+n-1)(b_q+n-2)]} \underbrace{\frac{1}{n}\frac{1}{n-1}}_{\text{jde k } \frac{1}{n!}} c_{n-2} = \end{aligned}$$

$$\frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n} \frac{1}{n!} \underbrace{c_0}_{=1} = \frac{\prod_{j=1}^{p} (a_j)_n}{\prod_{k=1}^{q} (b_k)_n} \frac{1}{n!}\,.$$

Tím jsme se dostali k explicitnímu vyjádření hypergeometrické řady

$$\boxed{{}_pF_q[a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{j=1}^{p}(a_j)_n}{\prod\limits_{k=1}^{q}(b_k)_n}\frac{x^n}{n!}}$$

Důvod přidání onoho historického členu $\frac{1}{n+1}$ vyniká v hypergeometrické řadě ${}_0F_0[;](x)$. Ta je dle předchozího závěru rovna

$$ {}_0F_0[;](x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x $$

Příklad

- Ukažte:

$$ {}_0F_1\left[;\frac{1}{2}\right]\left(-\frac{x^2}{4}\right) = \cos x. $$

Řada vlevo má $p=0$, $q=1 \implies p<q+1 \implies$ řada definuje hladkou (a holomorfní) funkci v $\mathbb{C}$.

Řešení:

$$ \begin{aligned} {}_0F_1\left[;\frac{1}{2}\right]\left(-\frac{x^2}{4}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1/2)_n}\frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\underbrace{\frac{1}{n!4^n\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\dots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}}_{\frac{2^n}{n!4^n(1\cdot3\dots(2n-1))}=\frac{1}{(2n)!}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned} $$

- Ukažte

$$ \frac{2x}{\sqrt{\pi}}{}_1F_1\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]\left(-x^2\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{erf}(x)\,, $$

přičemž řada vlevo má smysl pro $\forall x\in\mathbb{C}$, avšak pravá má smysl pouze pro $x\in\mathbb{R}$. Řadu nalevo lze tedy chápat jako rozšíření $\operatorname{erf}(x)$ do komplexních čísel.

konec intermezza. Vraťme se k GRR.

---

3. Řešením GRR je řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, kde

$$ c_0 = 1\,,\quad c_{n+1} = \frac{n+\alpha}{n+s+1}\frac{1}{n+1}c_n\,,\quad n=0,1,2,\dots\,. $$

Jde tedy o hypergeometrickou řadu pro $p=1$, $q=1$, tj. $p<q+1$ a máme

$$ {}_1F_1\left[\alpha;\beta+1\right](x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(s+1)_k}\frac{x^k}{k!} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})\,,\quad \alpha\in\mathbb{C};\ s\in\mathbb{C}\setminus\{-1,-2,-3,\dots\} $$

${}_1F_1[\alpha,s+1](x)$ je polynomem, právě když řada vpravo obsahuje konečný počet členů, což nastane právě když $\exists n\in\mathbb{N},\ (\alpha)_k = 0\ \forall k>n$. Navíc jelikož $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)$, dostaneme pro $\alpha=-n$ ekvivalenci

$$ (\alpha)_k = 0 \ \Leftrightarrow\ k>n \text{ pro } n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\,. $$

Definice 6.11 (Laguerrův polynom) Laguerrův polynom řádu s a stupně n je polynom, definovaný pro $x, s \in \mathbb{R}$, $s > -1$, jako

$$\boxed{L_n^s(x) := \frac{(s+1)_n}{n!} {}_1F_1[-n; s+1](x) = \frac{(s+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{(s+1)_k} \frac{x^k}{k!}\,.}$$

Poznámka

– $L_n^s(x)$ řeší GRR $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pokud v ní položíme $\alpha = -n$.

– S odvoláním na tvar rovnice 6.13 provedeme následující restrikce:

- Uvažujeme $x > 0$, tj. $x \in (0, \infty)$
- Uvažujeme $s \in \mathbb{R}$, $s > -1$, $\rho(x) = x^s e^{-x}$. Pak $\rho > 0$ na $(0, \infty)$, $\rho \in \mathcal{C}(0, \infty) \cap L^1(0, \infty)$, což ukazuje na oprávněnost volby ρ, jakožto váhy.
- Uvažujeme tedy Hilbertův prostor $L^2_{x^s e^{-x}}(0, \infty)$.
- $\alpha = -n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ukázali jsme, že GRR lze psát v samoadjungovaném tvaru (rovnice 6.13)

$$\boldsymbol{T} y = \eta \rho y\,,$$

kde $\boldsymbol{T} y = -(py')'$, $p(x) = x^{s+1} e^{-x}$.

Potom $n = 0, 1, 2, \ldots$ jsou vlastní čísla $\boldsymbol{T}$ s vahou ρ (na $L^2_\rho(0, \infty)$) a jim odpovídající vlastní funkce jsou Laguerrovy polynomy L_n^s.

Podle výpočtu provedeného dříve (viz úvahy za rovnicí 6.5) tvoří Laguerrovy polynomy (pro pevní $s > -1$ a pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) OG systém polynomů v $L^2_{x^s e^{-x}}(0, \infty)$. Existuje tedy rekurentní vzorec pro jejich vygenerování (odvodíme dále).

Laguerrovy polynomy jsou navíc úplným systémem, tj. každou funkci z $L^2_{x^s e^{-x}}(0, \infty)$ lze napsat ve tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^s(x)$. Důkaz je nad rámec těchto skript a lze nalézt např. v Čihák a kol: MA pro fyziky V. (Věta 31, str 196).

6.4 Některé důležité vlastnosti Laguerrových polynomů

Explicitní vyjádření

Platí

$$\boxed{L_n^s(x) = \frac{1}{n!} x^{-s} e^x \left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)}} \tag{6.15}$$

Z toho plyne, že

$$L_0^s(x) = x^{-s} e^x x^s e^x = 1$$
$$L_1^s(x) = x^{-s} e^x (x^{s+1} e^{-x})' = x^{-s} e^x (s+1) x^s e^{-x} + x^{-s} e^x x^{s+1} (-e^{-x}) = (s+1) - x \text{ atd.}$$

Další využití explicitního vyjádření 6.15 se nabízí při výpočtech integrálů typu $\int\limits_0^\infty L_n^s(x) f(x)\,\mathrm{d}x$, protože umožňuje použití metody per-partes. Takový výpočet později provedeme.

Důkaz. Důkaz vyjádření 6.15 začneme úpravou GRR

$$\begin{aligned} xy'' + (s+1-x)y' - \alpha y &= 0 \\ \left(s^{s+1}e^{-x}y'\right)' &= \alpha x^s e^{-x} y\,,\ \text{označme rovnost jako } \mathrm{GRR}(y, s+1, \alpha)\,. \end{aligned}$$

Derivací dostaneme

$$\begin{aligned} xy''' + y'' + (s+1-x)y'' - y' - \alpha y' &= 0 \\ xy''' + (s+2-x)y'' - (\alpha+1)y' &= 0\,,\ \text{rovnost označme: } \mathrm{GRR}(y', s+2, \alpha+1)\,. \end{aligned}$$

□

$n-1$ derivacemi tak dostaneme

$$\mathrm{GRR}(y^{(n-1)}, s+n, \alpha+n-1) \equiv (\underbrace{x^{s+n}e^{-x}y^{(n)}}_{=:V_n})' = (\alpha+n-1)\underbrace{x^{s+n-1}e^{-x}y^{(n-1)}}_{V_{n-1}}\,,$$

tedy $V_n' = (\alpha+n-1)V_{n-1}$ a dalším derivováním máme

$$V_n'' = (\alpha+n-1)V_{n-1}' = (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)V_{n-2}.$$

Postupně pak máme

$$V_n^{(n)} = (\alpha)_n V_0 = (\alpha)_n x^s e^{-x} y\,,$$

z čehož máme

$$\left(x^{s+n}e^{-x}y^{(n)}\right)^{(n)} = (\alpha)_n x^s e^{-x} y$$

a dosazením $\alpha \coloneqq -n$ dostaneme

$$y = \frac{1}{(-n)_n} x^{-s} e^{x} \left(x^{s+n}e^{-x}y^{(n)}\right)^{(n)}\,. \tag{6.16}$$

Pokud je $\alpha = -n$, je řešením GRR L_n^s, což je polynom stupně n. Jeho $n-$tá derivace je tedy konstanta, $(L_n^s)^{(n)} = a_n n!$, kde a_n značí koeficient u x^n. Polynom lze zapsat řadou

$$L_n^s(x) = \frac{(s+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{(s+1)_k} \frac{x^k}{k!}\,,$$

tedy $a_n = \frac{(s+1)_n}{n!}\frac{(-n)_n}{(s+1)_n}\frac{1}{n!}$, proto $(L_n^s)^{(n)} = \frac{(-n)_n}{n!}$.

Dosazením do rovnice 6.16 máme

$$L_n^s(x) = \frac{1}{(-n)_n} x^{-s} e^{x} \left(x^{s+n}e^{-x}\frac{(-n)_n}{n!}\right)^{(n)}$$

$$L_n^s(x) = \frac{1}{n!} x^{-s} e^{x} \left(x^{s+n}e^{-x}\right)^{(n)} \tag{6.17}$$

Rekurentní vzorec

Vyjdeme z rovnice 6.17

$$L_n^s(x) = \frac{1}{n!} x^{-s} e^{x} \underbrace{\left(x^{s+n}e^{-x}\right)^{(n)}}_{=:E_n}\,.$$

Pak přímým derivováním dostaneme

$$E_{n+1} = \left(\left(x^{s+n+1}e^{-x}\right)'\right)^{(n)} = (s+n+1)\underbrace{\left(x^{s+n}e^{-x}\right)^{(n)}}_{E_n} - \underbrace{\left(x^{s+n+1}e^{-x}\right)^{(n)}}_{=:I_n}\,. \tag{6.18}$$

Našim cílem je nyní vyjádřit I_n pomocí E_n.

$$I_n = \left(xx^{x+n}e^{-x}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{(k)}(x^{s+n}e^{-x})^{(n-k)} = /\text{je nenulové jen pro } k\in\{0,1\}/$$
$$= x\left(x^{s+n}e^{-x}\right)^{(n)} + n\left(x^{s+n}e^{-x}\right)^{(n-1)} = xE_n + n\underbrace{(x^{s+n}e^{-x})^{(n-1)}}_{I_{n-1}},$$

tj. $I_n = xE_n + nI_{n-1}$.

Vezmeme-li navíc 6.18 pro $n-1$, tedy $E_n = (s+n)E_{n-1} - I_{n-1}$, dostaneme

$$I_n = xE_n + n(s+n)E_{n-1} - nE_n\,.$$

Tuto rovnici dosadíme do 6.18, čímž dostaneme

$$E_{n+1} = (s+n+1)E_n - xE_n - n(x+n)E_{n-1} + nE_n$$
$$xE_n = (s+2n+1)E_n - E_{n+1} - n(s+n)E_{n-1} \quad \Big/\cdot\frac{1}{n!}x^{-s}e^{x}$$
$$\boxed{xL_n^s(x) = (s+2n+1)L_n^s(x) - (n+1)L_{n+1}^s(x) - (s+n)L_{n-1}(x)\,,}$$

což je hledaný rekurentní vzorec. Ze znalosti prvních dvou členů ($L_0^s = 1$, $L_1^s = (s+1)-x$) lze vygenerovat všechna L_n^s.

Normy

Z dřívějška víme

$$\|\varphi_{n+1}\|_{2,\rho}^2 = \frac{B_{n+1}}{A_n}\|\varphi_n\|_{2,\rho}^2\,, \quad n = 1,2,\dots\,,$$

pokud

$$x\varphi_n = A_n\varphi_{n+1} + C_n\varphi_n + B_n\varphi_{n-1}\,.$$

Zde máme $A_n = -(n+1)$, $B_n = -(s+n)$, tedy

$$\|L_{n+1}\|_{2,\rho}^2 = \frac{s+n+1}{n+1}\|L_n^0\|_{2,\rho}^2\,, \quad n = 1,2,3,\dots\,.$$

První dvě normy spočteme přímo: Máme $\|L_0^s\|_{2,\rho}^2 = \int_0^\infty 1\cdot x^s e^{-x} = \Gamma(s+1)$.

$$\|L_1^s\|_{2,\rho}^2 = \int_0^\infty \left((s+1)-x\right)^2 x^s e^{-x} = (s+1)^2\Gamma(s+1) - 2(s+1)\Gamma(s+2) + \Gamma(s+3)$$
$$= (s+1)\Gamma(s+2) - 2(s+1)\Gamma(s+2) + \Gamma(s+3)$$
$$= \Gamma(s+3) - (s+1)\Gamma(s+2)$$
$$= (s+2)\Gamma(s+2) - (s+1)\Gamma(s+2) = \Gamma(s+2)$$

a použitím rekurence dostaneme

$$\|L_n^s\|_{2,\rho}^2 = \frac{s+n}{n}\frac{s+n-1}{n-1}\dots\frac{s+2}{2}\underbrace{\|L_1^s\|_{2,\rho}^2}_{\Gamma(s+2)} = \frac{1}{n!}\Gamma(s+n+1)\ \text{, což platí i pro } n\in\{0,1\}$$

$$\boxed{\|L_n^s\|_{2,\rho}^2 = \frac{1}{n!}\Gamma(s+n+1) \quad \forall n = 0,1,2\dots}$$

Vytvořující funkce

Definice 6.12 (Vytvořující funkce) Vytvořující funkcí pro daný systém $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\varphi = \varphi_n(x)$, nazvu takovou funkci $F = F(x,t)$, která je analytická v okolí $t = 0$ (pro všechna pevná x) a jejíž rozvoj do Taylorovy řady podle t v $\mathcal{U}(0)$ generuje koeficienty $\varphi_n(x)$. Tedy

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) t^n \,.$$

Zde tedy hledáme takovou F, pro kterou $F(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} L_n^s(x) t^n$.

Budeme postupovat tak, že rozvineme vhodnou funkci $f \in L^2_\rho(0,\infty)$ s parametrem t do řady v Laguerrových polynomech. Tím dostaneme řadu typu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) L_n^s(x)$ a budeme směřovat k tomu, aby $c_n \approx t^n$.

Teorie říká, že pokud $f \in L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$ a $L_n^s(x)$ je úplný v $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$, tak z obecné teorie Fourierových řad plyne, že $\exists c_n \in \mathbb{C}$ tvaru

$$c_n = \frac{1}{\|L_n^s\|^2_{2,\rho}} \big(f, L_n^s\big)_{2,\rho} \,, \text{ že } f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^s \,,$$

přičemž rovnost u sumy je myšlena v $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$.

Budeme rozvíjet funkci e^{-ax} (poté budeme hledat $a = a(t)$).

<u>První krok</u> spočívá v nalezení podmínky pro $a \in \mathbb{R}$, kdy je $e^{-ax} \in L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$, tj kdy

$$\int_0^\infty (e^{-ax})^2 x^s e^{-x} \,\mathrm{d}x < \infty$$

$$\int_0^\infty x^s e^{-(2a+1)x} \,\mathrm{d}x < \infty \text{ pro } s > -1, \text{ pokud } 2a+1 > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{2} \,.$$

Pro toto a spočteme

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{\|L_n^s\|^2_{2,\rho}} \int_0^\infty e^{-ax} x^s e^{-x} L_n^s(x) \,\mathrm{d}x = /\text{explicitní vyjádření } L_n^s/ \\
&= \frac{n!}{\Gamma(s+n+1)} \int_0^\infty e^{-ax} x^s e^{-x} \left(\frac{1}{n!} x^{-s} e^x (x^{s+n} e^{-x})^{(n)}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\Gamma(s+n+1)} \int_0^\infty e^{-ax} (x^{s+n} e^{-x})^{(n)} \,\mathrm{d}x = /n \times \text{ per partes, hraniční členy jsou nulové}/ \\
&= \frac{a^n}{\Gamma(s+n+1)} \int_0^\infty \underbrace{e^{-ax} x^{s+n} e^{-x}}_{(a+1)x=y} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{a^n}{\Gamma(s+n+1)} \int_0^\infty e^{-y} \left(\frac{y}{a+1}\right)^{s+n} \frac{1}{a+1} \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{a^n}{\Gamma(s+n+1)} \frac{1}{(a+1)^{s+n+1}} \Gamma(s+n+1) = \frac{1}{(a+1)^{s+1}} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \,.
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\boxed{e^{-ax} \overset{\text{s.v.}}{=} \frac{1}{(a+1)^{s+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n L_n^s(x) \,, \quad a > -\frac{1}{2} \,.} \tag{6.19}$$

Poznámka • Obecně platí rovnost ve smyslu prostoru, ve kterém byla odvozena, tj v $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$, neboli skoro všude (s.v.). Pokud jsou však na obou stranách spojité funkce (např řada vpravo konverguje alespoň lokálně stejnoměrně v $\mathbb{R}$, platí rovnost ve všech $x \in \mathbb{R}$.

- Dosazením $a = 0$ do rovnice 6.19 vypadnou všechny členy pro $n \geq 1$ a dostaneme $1 = L_0^s(x)$.
- Pro $a = 1$ dá rovnice 6.19
$$e^{-x} = \frac{1}{2^{s+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^s(x)}{2^n} \,,$$
speciálně pro $s = 0$ máme
$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^0(x)}{2^{n+1}} \,.$$

Druhý krok je sestavení vytvořující funkce.

Položme $t = \frac{a}{a+1}$ ($\Leftrightarrow a = \frac{t}{1-t}$) v rovnici 6.19. Derivace tohoto výrazu $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}a} = \frac{1}{(a+1)^2} > 0$ a tedy $t(a)$ je prostá. Platí $a > -\frac{1}{2}$ právě pro $t \in (-1, 1)$. Úpravou rovnice 6.19 pak máme

$$(a+1)^{s+1} e^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x) \left(\frac{a}{a+1} \right)^n \quad \Big/ a \to t \tag{6.20}$$

$$\underbrace{\frac{1}{(1-t)^{s+1}} e^{-\frac{tx}{1-t}}}_{\text{vytvoř. fce pro Laguerrovy p.}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x) t^n \,, \quad t \in (-1, 1) \,, \tag{6.21}$$

V tabulce „Ortogonální systémy polynomů“ v dodatku jsou uvedeny Laguerrovy, Hermiteovy, Legendreovy, Čebyševovy a Gegenbauerovy systémy polynomů. Vždy uvádíme generující funkci, vyjádření řadou, explicitní tvar, rekurentní vztah a velikosti norem, vytvořující funkci a zejména prostor, ve kterém tvoří bázi.

Ortogonální systémy polynomů

1 Laguerrovy polynomy, $L_n^s(x)$

Generující rovnice:	$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0$	$\alpha, \gamma \in \mathbb{C}, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ (polynom pro $\alpha = -n$, $\gamma = s+1$)
Vyjádření řadou:	$L_n^s = \frac{(s+1)_n}{n!}\, {}_1F_1(-n; s+1; x)$	Laguerrovy zobecněné pol. (klasické pro $s = 0$)
Explicitní vyjádření:	$L_n^s = \frac{1}{n!}\, x^{-s} e^x \left(x^{s+n} e^{-x}\right)^{(n)}$	
Rekurentní vztah:	$xL_n^s = -(n+1)L_{n+1}^s + (s+2n+1)L_n^s - (s+n)L_{n-1}^s$	
Vytvořující funkce:	$\frac{1}{(1-t)^{s+1}}\, e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x) t^n$	
Báze v prostoru:	$L_\rho^2(0, +\infty)$, kde $\rho = x^s\, e^{-x}$	
Norma:	$\|L_n^s\|_\rho^2 = \Gamma(s+n+1)/n!$	

2 Hermiteovy polynomy, $H_n(x)$

Generující rovnice:	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$
Vyjádření řadou:	$H_{2k} = (-1)^k \frac{(2k)!}{k!}\, {}_1F_1(-k; 1/2; x^2)$
	$H_{2k+1} = (-1)^k \frac{(2k+1)!}{k!} x\, {}_1F_1(-k; 3/2; x^2)$
Explicitní vyjádření:	$H_n = (-1)^n e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$
Rekurentní vztah:	$H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0$
Vytvořující funkce:	$e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$
Báze v prostoru:	$L_\rho^2(-\infty, +\infty)$, kde $\rho = e^{-x^2}$
Norma:	$\|H_n\|_\rho^2 = 2^n\, n! \sqrt{\pi}$

3 Legendreovy polynomy, $P_n(x)$

Generující rovnice:	$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$
Vyjádření řadou:	$P_n = {}_2F_1(-n, n+1; 1; 1/2(1-x))$
Explicitní vyjádření:	$P_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left((1-x^2)^n\right)^{(n)}$
Rekurentní vztah:	$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$
Vytvořující funkce:	$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$
Báze v prostoru:	$L^2(-1, 1)$, tj. $\rho = 1$
Norma:	$\|P_n\|_\rho^2 = 2/(2n+1)$

4 Čebyševovy polynomy 1. druhu, $T_n(x)$

Generující rovnice:	$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$
Vyjádření řadou:	$T_n = {}_2F_1(-n, n; 1/2; 1/2(1-x))$
Explicitní vyjádření:	$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$
Rekurentní vztah:	$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$
Vytvořující funkce:	$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n$
Báze v prostoru:	$L^2_\rho(-1,1)$, kde $\rho = (1-x^2)^{-1/2}$
Norma:	$\|T_n\|^2_\rho = \pi/2$ pro $n > 0$, $= \pi$ pro $n = 0$

5 Gegenbauerovy (=ultrasférické) λ-polynomy, $C_n^{(\lambda)}(x)$

Generující rovnice:	$(1-x^2)y'' - (2\lambda+1)xy' + n(n+2\lambda)y = 0\,, \qquad \lambda > -1/2$
Vyjádření řadou:	$C_n^{(\lambda)} = \binom{n+2\lambda-1}{n} {}_2F_1(-n, n+2\lambda; \lambda+1/2; 1/2(1-x))$
Explicitní vyjádření:	$C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda+1/2)_n} \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x^2)^{1/2-\lambda} \left((1-x^2)^{\lambda+n-1/2}\right)^{(n)}$
Rekurentní vztah:	$(n+1)C_{n+1}^{(\lambda)} = 2(n+\lambda)xC_n^{(\lambda)} - (n+2\lambda-1)C_{n-1}^{(\lambda)}$
Vytvořující funkce:	$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(x) t^n$
Báze v prostoru:	$L^2_\rho(-1,1)$, kde $\rho = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$
Norma:	$\|C_n^\lambda\|^2_\rho = \frac{\lambda\,(2\lambda)_n}{n!(p+n)} \frac{\Gamma(\lambda+1/2)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda+1)}$