P 11, 11.5.2021

6. LIN. DIFER. OPERÁTORY

6.1. Výrazy v samoadj. tvaru

Mějme

$$l(y) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, y^{(k)}, \quad y \in C^{(n)}(a,b)$$

$y = y(x)$

$-\infty \leq a < b \leq +\infty$

$p_k \in C(a,b)$

$p_n \not\equiv 0$ na (a,b)

- To bude LDV (lin. dif. výraz) n-tého řádu.

- y, p_k cplx. fce

- Lin. diferenciální operátor (LDO)
  $\Updownarrow$
  LDV & def. obor: $D(L) = \{ y \in C^{(n)}(a,b)$
  něco $\}$

Typicky $\mathcal{D}(L) = C^{(n)}(a,b) \cap$ okr. podm. na (a,b)

OKR. PODM. – hodnoty
– hodnoty der.
– limita
– rychlost poklesu

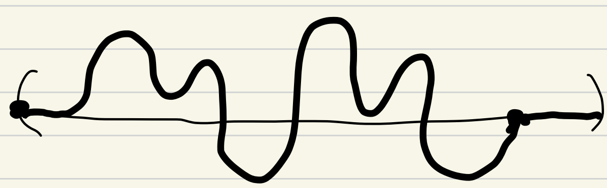
Pozn.

LDO:

$$L = \ell\big|_{\mathcal{D}(L)}$$

———.

$$\underbrace{C^{\infty}_{cpt}(a,b) \qquad C^{\infty}_{K}(a,b)}_{\{f \in C^{\infty}(a,b),\ \exists K \subset (a,b),\ f = 0 \text{ na } (a,b) \setminus K\}}$$



použití: ~ per partes

Def: Definujeme ke $l(y)$ tzv. adjungovaný LDV (ke $l(y)$)

$$l^*(y) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\overline{p_k(x)}\, y\right)^{(k)}$$

Lemma: K danému LDV $l(y)$ je výše definovaný LDV $l^*(y)$ jediným LDV, pro který

$$(l(y), z) = (y, l^*(z))$$

$$\forall y, z \in C_k^\infty(a,b)$$

kde $(\cdot,\cdot)$ je sk. součin v $L^2(a,b)$

Pozn.: $C_k^\infty(a,b) \subset \mathcal{D}(L) = C^{(n)}(a,b) + \text{O.P.}$

D) Rovnost = per partes:

$$(l(y), z) = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_k(x)\, y^{(k)}\, \overline{z(x)}\, dx =$$

$$\overset{\text{p.p.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1) \int_a^b \left(p_k(x)\, \overline{z(x)}\right)'\, y^{(k-1)}\, dx =$$

k-krát p.p.

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \int_a^b \underbrace{\left(p_k(x)\overline{z(x)}\right)^{(k)}}_{\overline{\left(\overline{p_k(x)}\, z\right)^{(k)}}} y(x)$$

$$= \Big(y, \underbrace{\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \left(\overline{p_k(x)}\, z\right)^{(k)}}_{\ell^*(z)} \Big)$$

Jednoznačnost: nechť jsou dvě takové:

$$(\ell(y), z) = \underbrace{(y, \ell^*(z)) = (y, \tilde{\ell}(z))}_{\forall y, z \in C_k^\infty}$$

$\forall y \in C_k^\infty(a,b)$ (pevné z)

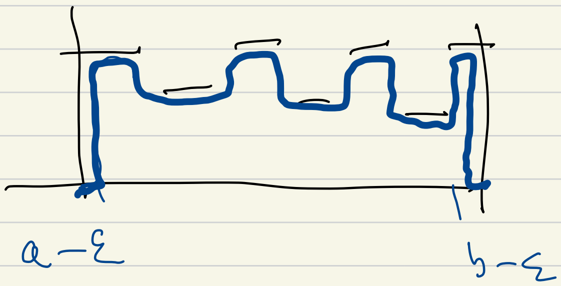
$\cap$ ... husté

$L^2(a,b)$

$$\underbrace{\ell^*(z) = \tilde{\ell}(z)}_{\forall z \in C_k^\infty}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\ell^* = \tilde{\ell}}_{\text{CBD}}$$



$\boxtimes$

- Další nutná podmínka samoadjungovanosti:

$$\ell = \ell^*$$

$$(+)\quad \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} p_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\overline{p_k} y\right)^{(k)} \\ \qquad = \underline{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \overline{p_k}^{(k-j)} y^{(j)}} \end{cases}$$

viz $\quad (f\cdot g)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(k-j)} g^{(j)}$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(fg)'' = f''g + \underbrace{f'g' + f'g'}_{} + fg''$$

$$= f''g + 2f'g' + fg''$$

Srov. koef u $y^{(n)}$ ve $(+)$:

$$p_n(x) = (-1)^n \binom{n}{n} \overline{p_n}(x)$$

$$\underline{p_n = (-1)^n \overline{p_n}}$$

n sudé: $\quad p_n = \overline{p_n} \quad \Leftrightarrow \quad p_n$ je reálné

n liché: $\quad p_n = -\overline{p_n}$

$$\underbrace{p_n + \overline{p_n}}_{} = 0$$

$$2\,\mathrm{Re}\, p_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\, p_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad p_n = i q_n$$

q_n reálné

Srov. koef. u $y^{(n-1)}, \dots, y^{(1)}, y$

Čihák & kol.: MA V, str. 210

Věta $\quad l(y) = l^*(y) \quad \forall y \in C^\infty_k(a,b)$

$$\Updownarrow$$

l je konečnou lin. kombinací tzv. elementárních dif. výrazů, které jsou tvaru

$$E_{2k} = (-1)^k \left(p y^{(k)}\right)^{(k)}$$

$$E_{2k-1} = \frac{i}{2}\left\{\left(p y^{(k-1)}\right)^{(k)} + \left(p y^{(k)}\right)^{(k-1)}\right\}$$

kde p … reálné fce

Ot: E_1, E_2

$$E_1 = \frac{i}{2}\left((py)' + py'\right) = \frac{i}{2}\left(p'y + 2py'\right)$$

$$= ipy' + \frac{i}{2}p'y \qquad \left(\text{např. } p = 1 \quad E_1 = iy'\right)$$

$$\underbrace{E_2 = -(py')'}$$

dif. výraz 2. řádu v samoadj. tvaru

$$\Rightarrow \quad (\ell(y), z) = (y, \ell(z)) \quad \forall y, z \in C_k^\infty(a,b)$$

$$\Uparrow$$

$$\underbrace{\ell = \sum \alpha_k E_k}_{\text{„v samoadj. tvaru"}}$$

POZN: v 1D $E_2 = -(py')'$

v nD $E_2 = -\operatorname{div}(p \cdot \nabla y)$

$\boxed{6.2}$ Ortogonálne bázy v L^2_ρ, zložené z polynómov

$$H = L^2_\rho(a,b) := \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{C};\ \int_a^b |f|^2 \rho < \infty, \right.$$

kde $\rho : (a,b) \to \mathbb{R}$ je tzv. váha (hustota) spĺňajúca $\rho > 0$, $\rho \in L^1$, $(\rho \in C)$ $\Big\}$

Pre urč. $L^2_\rho(a,b)$ je Hilbertov

$$(f, g)_{2,\rho} = \int_a^b \rho f \bar{g} \quad \Rightarrow \quad \|f\|^2_{2,\rho} = \int_a^b \rho |f|^2$$

Pozn.: Prečo L^2_ρ?

Chceme-li, aby $P \in L^2_\rho(a,b)$ pre P ... polynom.

a pritom pripustíme, že $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

$L^2(-\infty, \infty)$ alebo $L^2(0, \infty)$ neobsahujú žiadny polynom

naopak

$$P \in L^2_{e^{-x^2}}(-\infty, \infty) \quad \forall P \text{ polynom.}$$

nebo$\check{t}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} |P|^2 < \infty \quad \forall P \text{ polynom}$

Pozn.: „Pozor na dvojí vnesení váhy do prostoru":

Def.: $T : D(T) \subsetneq L^2_\rho(a,b) \to L^2_\rho(a,b)$, hustě def.

$$\overline{D(T)} = L^2_\rho(a,b)$$

$$C^{(n)} \subset D(T)$$

T symetrický

Def. vl. číslo a vl. fce oper. T s vahou

takové $\lambda \in \mathbb{C}$, že $\exists\, y \neq 0$, $y \in L^2_\rho$

$$\boxed{Ty = \lambda \rho y}$$

$$(Ty, z)_2$$

bez váhy

Tvrz.: $y \dots$ vl. fce T s vahou ρ

$$(Ty,y)_2 = (\lambda\rho y, y)_2 = \lambda(\rho y, y) = \lambda \int_a^b \rho |y|^2 = \lambda \underbrace{\|y\|^2_{2,\rho}}_{\neq 0}$$

$$\|$$

$$(y,Ty)_2 = (y, \lambda\rho y)_2 = \bar\lambda \int_a^b \rho|y|^2 = \bar\lambda \underbrace{\|y\|^2_{2,\rho}}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow \lambda = \bar\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda \in \mathbb{R}} \qquad / : \|y\|^2_{2,\rho}$$

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vl. č. T s vahou

$$T y_1 = \lambda_1 \rho y_1 \qquad T y_2 = \lambda_2 \rho y_2$$

$$\lambda_1 (y_1, y_2)_{2,\rho} = \lambda_1 (\rho y_1, y_2)_2 = (\underbrace{\lambda_1 \rho y_1}_{T y_1}, y_2)_2$$

$$= (T y_1, y_2)_2 = (y_1, T y_2)_2 =$$

$$= \dots = \lambda_2 (y_1, y_2)_{2,\rho}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (y_1, y_2)_{2,\rho} = 0$$

$\Rightarrow$ kolmost vl. vektorů ve sk. souč. <u>s vahou</u> (pro různá vl. č.)

$\Rightarrow$ v $L^2_\rho(a,b)$ tvoří vl. vektory „s vahou" ($Ty = \lambda \rho y$)

OG množinu $\underbrace{\text{v } L^2_\rho(a,b)}_{\text{pomocí } (\cdot,\cdot)_{2,\rho}}$