Věta (Hilbert – Schmidt)

H Hilbertův, $T \in \mathcal{C}(H)$, $T = T^*$.

$\Lambda :=$ uzavřený lin. podprostor H, generovaný všemi vl. vektory T, které přísluší nenulovým vl. číslům

Potom:

$$\boxed{H = \Lambda \oplus \operatorname{Ker} T}$$

• kde $\operatorname{Ker} T = \{x \in H, \ Tx = \underset{\substack{\| \\ 0 \cdot x}}{0}\}$

D • $T\Lambda \subset \Lambda$

• $T\Lambda^\perp \subset \Lambda^\perp$ dokonce • $T\Lambda^\perp = \{0\}$

$\Downarrow$

• $\Lambda^\perp \subset \operatorname{Ker}(T)$

vím • $\Lambda \oplus \Lambda^\perp = H$

tj • $\Lambda + \operatorname{Ker} T = H$

• $\Lambda \cap \operatorname{Ker} T = \{0\} \Rightarrow \Lambda \oplus \operatorname{Ker} T = H$

Pozn.: • $\mathrm{Ker}\,T = \{0\} \Rightarrow H = \Lambda$

spec.: H separabilní

• V důkazu: $\Lambda^\perp \subset \mathrm{Ker}\,T$

Platí dokonce $\underbrace{\Lambda^\perp = \mathrm{Ker}\,T}$

(D) Stačí $\underbrace{\mathrm{Ker}\,T \subset \Lambda^\perp}$

• Vol $z \in \mathrm{Ker}\,T \Rightarrow Tz = 0 \quad / \, (\cdot, e_n)$ $\uparrow \Lambda$

$$0 = (Tz, e_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{samoadj}}}{=} (z, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vl. v.} \approx \lambda_n}}{Te_n}) = (z, \underset{\substack{\nwarrow \\ \lambda_n \in \mathbb{R}}}{\lambda_n e_n})$$

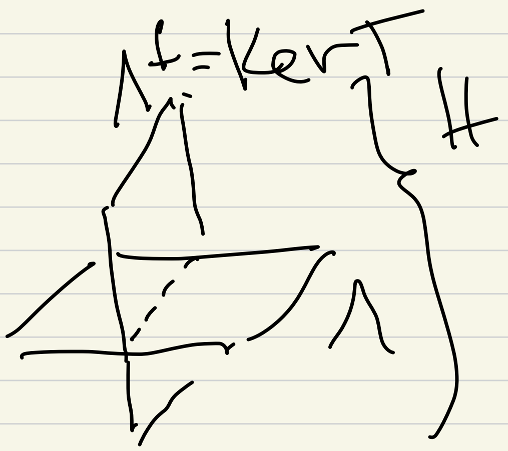
$$= \underset{\substack{\neq \\ 0}}{\lambda_n} (z, e_n) \Rightarrow \underbrace{(z, e_n) = 0} \quad \forall n$$

• Vol $x \in \Lambda \Rightarrow x = \sum \alpha_n e_n$

$$(z, x) = (z, \underbrace{\sum \alpha_n e_n}_{\text{konv}}) = \sum \alpha_n \underbrace{(z, e_n)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow (z, x) = 0 \quad \forall x \in \Lambda \Rightarrow \underbrace{z \in \Lambda^\perp}$$

$\boxtimes$



Důsledky:

$$\left.\begin{array}{l} T \in \mathcal{C}(H),\ T = T^{*} \\ \{e_n\} \simeq \text{báze } \Lambda \end{array}\right\} \quad H = \Lambda \oplus \operatorname{Ker} T$$

$\forall x \in H$
$\exists \alpha_n \in \mathbb{C}\ \exists z \in \operatorname{Ker} T$

$$\boxed{x = \sum \alpha_n e_n + z} \qquad (*)$$

$\Big|\, T$

$$Tx = \sum \alpha_n \underbrace{T e_n}_{\lambda_n e_n} + 0$$

$$\boxed{Tx = \sum \alpha_n \lambda_n e_n} \qquad (T(H) \subset \Lambda)$$

Násob $(*)$ $(\cdot, e_k)$

$$(x, e_k) = \sum \alpha_n \overbrace{(e_n, e_k)}^{\|e_n\|^2 \delta_{nk}} + \overbrace{(z, e_k)}^{=0}$$

$$(x, e_k) = \alpha_k \|e_k\|^2$$

$$\alpha_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2} \quad \text{(koef. F. ř. } \Lambda\text{)}$$

$(*) \Rightarrow$

$\forall x \in H \ \exists z \in \operatorname{Ker} T$

$$\boxed{x = \sum \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2} e_k + z} \qquad (*)'$$

a

$$\boxed{Tx = \sum \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2} \lambda_k e_k}$$

<u>Pozn.</u>

Věta Buď $\{e_n\}$ <u>úplná</u> ON báze v separabilním Hilbertově prostoru.

- Nechť $\alpha_n \in \mathbb{C}$, taková, že
$$M := \sup \{|\alpha_n|\} < \infty$$

- Definujme

$$\boxed{Tx = \sum \alpha_n (x, e_n) e_n} \qquad (+)$$

Pozn.: 1) Suma v $\oplus$ vpravo vždy konverguje

a $T \in \mathcal{L}(H)$, $\|T\| = M$

2) T samoadjungovaný $\Leftrightarrow \alpha_n \in \mathbb{R} \; \forall n$

3) $T \in \mathcal{C}(H) \Leftrightarrow \exists$ přerovnání α_n $\lim \alpha_n = 0$

Pozn.:

- $\alpha_n = 1 \quad \forall n$

$\Rightarrow$ T samoadj. (dle 2)

$T \notin \mathcal{C}(H)$ (dle 3)

$\oplus \Rightarrow \quad Tx = \sum (x, e_n) e_n = x$

$\{e_n\}$ úplná

$Tx = x$

$\Rightarrow \underline{T = Id}$

- $\alpha_n = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow$ samoadj. + $\mathcal{C}(H)$

=

End of Chapter 4

5. NEOMEZENÉ OPERÁTORY

Stále máme: T lineární,

ale <u>neomezené</u>, tedy <u>nespojité</u>

Tedy pojem <u>kompaktnosti</u> nemá smysl.

⇓

(spojitost)

Cíl: samoadj. → bude
+
kompaktnost → něčím nahradit.
(<u>uzavřenost</u>)

Př: neomezený lin.: $Tf = f'$ $\quad f \in C^1([a,b])$

$(\ (\sin nx)' = \underline{\underline{n}} \cos nx \ )$

Zajímavost: lin. neomezený operátor nelze moci být definován na celém Hilbertově prostoru

Typická situace:

$D(T) \subset H$; $D(T)$ lin. podprostor H

$T: D(T) \to H$ lin., neomezený

<u>Pozn</u>: Místo T' v této kapitole budeme psát T^*.
(Přijde čárka o funkce ~~$y' \in \mathcal{D}(T')$~~ $y^* \in \mathcal{D}(T^*)$)

<u>Def</u>: Mějme $T: \mathcal{D}(T) \subset H \longrightarrow H$, lin., neom.

1) $\mathcal{D}(T^*) := \{ y \in H, \exists!\, h^* \in H,$
$$(Tx, y) = (x, h^*) \quad \forall x \in \mathcal{D}(T) \}$$

2) Je-li $\mathcal{D}(T^*) \neq \emptyset$, tak definujeme <u>adjungovaný operátor</u> T^*,
$$T^*: \mathcal{D}(T^*) \longrightarrow H$$
$$T^*: y \longmapsto h^*$$

Pozorování: Pokud $\mathcal{D}(T^*) \neq \emptyset$, potom
$$\boxed{(Tx, y) = (x, T^* y)} \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)\ \forall y \in \mathcal{D}(T^*)$$

<u>Def</u>: T (viz výše) nazveme <u>samoadjungovaným</u>, pokud

1) $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$ (!)

2) $T = T^*$ (na $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$)

$\boxed{\text{Lemma}}$ $D(T^*) \neq \emptyset \Rightarrow T^*$ je lineární

(Němec triviální)

OTÁZKA Č. 1: KDY JE $D(T^*) \neq \emptyset$?

$\boxed{\text{Věta}}$ $D(T^*) \neq \emptyset \Leftrightarrow \overline{D(T)} = H$

D Lukeš 11.6.

OTÁZKA Č. 2: MŮŽE BÝT $D(T) = H$?

(NE)

Def: $T: D(T) \to H$, T lineární, nezjištěný. Říkáme, že T je symetrický, pokud:

$$\underbrace{(Tx, y) = (x, Ty)} \quad \forall x, y \in D(T)$$

není to totéž, co samoadjungovanost:

$\boxed{\text{Lemma}}$

$$T \text{ symetrický} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \ D(T) \subseteq D(T^*) \\ 2) \ T = T^* \text{ na } D(T) \end{cases}$$

Odtud: T samoadjungovaný $\Rightarrow$ T symetrický

$$((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A))$$

Použití:

T není symetrický $\Rightarrow$ T není samoadj.

$\boxed{\text{Věta}}$ $\left.\begin{array}{l} D(T) = H \\ T \text{ lineár.} \\ T \text{ symetrický} \end{array}\right\} \Rightarrow T$ spojitý (omezený)

Lukeš 11-10

Odtud: T samoadj.; lin. $\Rightarrow$ T symetrický
$\underbrace{D(T) = H \qquad\qquad}_{\Downarrow}$ T omezený ✗

$\Rightarrow$ Chceme-li zkoumat neomezené samoadj. operátory, tak $D(T) \neq H$

Typická (a jediná možná) pro samoadj. neomezené operátory:

H Hilbert
$D(T) \neq H$, $\overline{D(T)} = H$
$D(T)$ lin. podprostor

$\Rightarrow$ T hustě definován na H

Terminologie

Lukeš, Formánek	Černý + Pokorný Čížek (MA pro F I)
samoadjungovaný.	samoadj.
symetrický	hermitovský

- různé pro neom. oper.
- stejné pro omez.