P7, 13.4.2021

OPAKOVÁNÍ

Věta (Riesz–Fréchet) [Lukeš 2.9]

Buď H Hilbertův, $(\cdot,\cdot)_H$ skal. součin

$\forall\, T \in H' \ \exists!\, f \in H$, že

a) $T(x) = (x, f)_H \quad \forall x \in H$

b) $\|T\|_{H'} = \|f\|_H$

Potom ztotožňujeme $H' \cong H$

$T \cong f$

Pro X, Y Banachovy máme:

$$\underbrace{X \subset Y}_{\text{STEJNÉ NORMY}} \implies \underbrace{Y' \subset X'}_{\text{POZOR!}}$$

STEJNÉ NORMY

POZOR!
NE MNOŽINOVĚ,
ALE VE SMYSLU
ZÚŽENÍ ZOBR.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$

$\|$

$$\Downarrow$$

$$(\mathbb{R}^2)' \subset (\mathbb{R})' \Longleftarrow$$

$$\text{(1)} \quad \| \qquad \Downarrow \qquad \|$$

$$\underbrace{\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}} \quad ↯$$

Pozn:

(1) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lin, spoj.

$$\Downarrow$$

$$T(x,y) = \underbrace{\alpha x + \beta y}$$

$$T \equiv (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

(2) $T \in (\mathbb{R}^2)' \rightsquigarrow (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

ad $\Longleftarrow$ „$\subset$" je jako přirozené vnoření

tj. $T \in (\mathbb{R}^2)' \subset (\mathbb{R})'$

T pracuje na $\mathbb{R}^2$ lin. a spoj. / zúžit T pracuje na $\mathbb{R}$ lin + spoj.

$$\Rightarrow (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$\vdots$$

$$(\alpha, 0) \approx (\alpha,\beta)/_{\mathbb{R}}$$

$x \in \mathbb{R}$: $T(x) = \alpha x + \underbrace{0 \cdot 2}_{\beta}$

KONEC OPAK.

Pozn.: „Duálnost" v sobě skrývá i jakousi „symetrii" v normách prostorů X a X'.

Víme:

$$\boxed{\|T\|_{X'} = \sup_{\|x\|_X \le 1} |T(x)|}$$

Dále víme:

$$|T(x)| \le \|T\| \cdot \|x\|$$

Uvažujme jenom $\|T\| \le 1$:

$$|T(x)| \le \|x\| \quad \forall \|T\| \le 1 \quad \Big/ \sup_{\|T\| \le 1}$$

$$\sup_{\|T\| \le 1} |T(x)| \le \|x\|$$

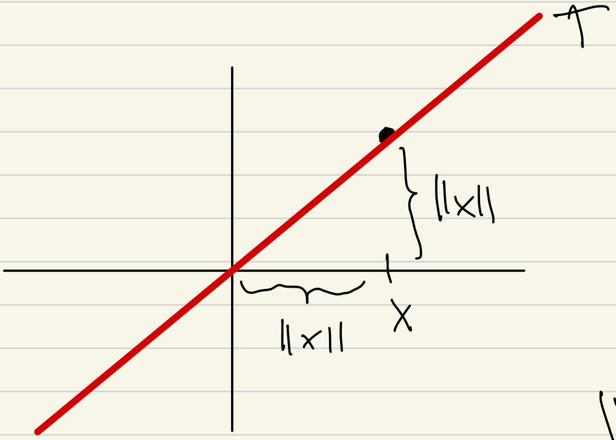
ROVNOST ??.

Intermezzo: HAHN-BANACHOVA věta

[Taylor: FA, str. 181]

X Banach, $0 \neq x \in X$

$\Rightarrow \exists T \in X'$, $\|T\| = 1$, $T(x) = \|x\|$



$$\boxed{\|x\|_X = \sup_{\|T\|_{X'} \le 1} |T(x)|}$$

4.2. Duální zobrazení, duální operátor

<u>Def:</u> X, Y Banachovy, X', Y' jejich duály. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Řekneme, že T' je duální k T, pokud

a) $T' : Y' \longrightarrow X'$

b) $\underbrace{T' \circ y'}_{\in X'} = y' \circ T \quad \underbrace{\forall y' \in Y'}$

$x \in X$

$y' \in Y'$, $x \in X$

číslo

$$(T'y')(x) = y'(Tx) \quad \forall y' \in Y' \ \forall x \in X$$

$$\underbrace{\langle T'y', x\rangle}_{\text{zobrazení na } X' \times X} = \underbrace{\langle y', Tx\rangle}_{\text{zobrazení na } Y' \times Y} \quad \forall y' \in Y' \ \forall x \in X$$

SYMBOL DUALITY

<u>Vlastnosti</u>:
- $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ automaticky
- $T \in \mathcal{C}(X, Y) \Rightarrow T' \in \mathcal{C}(Y', X')$
- $\|T\| = \|T'\|$

OTÁZKA
- ZA JAKÝCH PODMÍNEK (KDY) $\exists\, T'$?
- LZE NĚKDY $T \equiv T'$?

Předběžná úvaha:

Pokud chceme
$$\begin{array}{ccccc} T & : & X & \longrightarrow & Y \\ \rotatebox{90}{$\equiv$} & \Rightarrow & \rotatebox{90}{$\equiv$} & & \rotatebox{90}{$\equiv$} \\ T' & : & Y' & \longrightarrow & X' \end{array}$$

$\Rightarrow$ nutně $X \equiv Y'$ $\qquad Y = X'$

$$\underline{Y \equiv X' \equiv Y''} \qquad \underline{X = Y' = X''}$$

Nutné podmínky $\Leftarrow T \equiv T'$ jen $\underbrace{x = x'' , y = y''}$

ale víme $\underbrace{H \cong H' \cong H''}$

$\boxed{\text{Věta}}$ (duální zobrazení mezi Hilbert. prostory)

Buďte H_1, H_2 Hilbertovy prostory, $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$.

Potom $\exists!\ T' : H_2 \to H_1$, že

$$(Tx, y)_{H_2} = (x, T'y)_{H_1} \quad \forall x \in H_1, \forall y \in H_2$$

Pro toto zobrazení potom platí:

a) $T' \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$

b) $\|T\| = \|T'\|$

Pozn: V obecné definici (X, Y Banachovy):

$$\underbrace{\langle Ty', x\rangle = \langle y', Tx\rangle}$$

V této notě:

dtto

$$(Tx, y)_{H_2} = (x, T'y)_{H_1} \quad \Big/ \ \overline{}\ \text{cplx. sdr.}$$

$$\underbrace{(y, Tx) = (T'y, x)}$$

(2) Věty $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$

Vezmeme: $y \in H_2$ pevné; definujeme

$L_y : \underset{\overset{\uparrow}{H_1}}{x} \longmapsto (Tx, y)$ je L_y lin + spojité na H_1 ✓

$\Rightarrow L_y \in H_1' \cong H_1$

$\exists! \, z \in H_1$ $\quad L_y(x) = (x, z)_{H_1}$

$\quad (Tx, y) = (x, z)_{H_1} \quad \forall x \in H_1$ pevné ✓

& $\quad \|L_y\| = \|z\|$

Bylo pevné $y \in H_2 \longrightarrow \exists! \, z \in H_1$

Def: $T' : y \longmapsto z$

Potom $\quad (Tx, y) = (x, T'y) \quad \forall x \in H_1 \; \forall y \in H_2$

Musíme ukázat

a) linearitu:

ekv. ozn. $\quad (T'y, x) = (y, Tx)$ ✓

$$(T'(\alpha y_1 + \beta y_2), x) = (\alpha y_1 + \beta y_2, Tx) =$$

$$= \alpha(y_1, Tx) + \beta(y_2, Tx) =$$

$$= \alpha(T'y_1, x) + \beta(T'y_2, x) =$$

$$= (\alpha T'y_1 + \beta T'y_2, x) \qquad \forall x \in H_1$$

$$\Rightarrow T'(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T'y_1 + \beta T'y_2 \quad \text{cbd.}$$

Zbývá: omezenost normy T'

$$\|T'y\| = \|z\| = \|L_y\|$$

Spočteme: $\|L_y x\| = |(Tx, y)| \leq \|Tx\| \cdot \|y\|$

$$\leq \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

Tedy

$$\|L_y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|L_y x\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$$

$$\|T'\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \underbrace{\|T'y\|}_{\|L_y\|} \leq \sup_{\|y\| \leq 1} \|T\| \cdot \|y\| = \|T\|$$

$$\Rightarrow \boxed{\|T'\| \leq \|T\|} < \infty$$

$$T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$$

$$\Downarrow$$

$$T' \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$$

Zbývá jen ukázat $\|T\| \leq \|T'\|$ ②

Trik: $T : H_1 \to H_2 \in \underline{\mathcal{L}(H_1, H_2)}$
$\Downarrow$
$T' : H_2 \to H_1 \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ $\Big\}\ \|T'\| \leq \|T\|$
$\Downarrow$
$(T')' : H_1 \to H_2 \in \underline{\mathcal{L}(H_1, H_2)}$ $\Big\}\ \|T''\| \leq \|T'\|$

Pokud ukážeme, že $T'' = T$, budeme vědět
$$\|T\| = \|T'\|$$

Ale my víme:

$$\underline{(T''x, y)} = (x, T'y) \qquad \forall x \in H_1, \forall y \in H_2$$
$$\underline{= (Tx, y)} \qquad \text{pevné } x \ \forall y \in H_2$$
$$\Downarrow$$
$$T''x = Tx \qquad \forall x \in H_1$$
$$\Downarrow$$
$$T'' = T \ \checkmark$$

$\boxed{\times}$

Opak.: $\forall T \in \mathcal{L}(H_1, H_2) \implies \exists!\ T' \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$

Def.: Takové T' nazveme <u>hermitovsky sdružené</u> k T, nebo též adjungované k T

Def: Buď H Hilbertův, $T \in \mathcal{L}(H)$, potom $\exists!\ T^* \in \mathcal{L}(H)$. Pokud $T = T^*$, pak takové T nazvu samoadjungovaným (nebo též hermitovským).

Pozn:

$$\boxed{(Tx, y) = (x, Ty)}$$

$T : H \to H$