P6, 6.4.2021

$$\boxed{\overline{T(\text{omezené mn.})} = \text{kompaktní}}$$

$T \in \mathcal{L}(X,Y)$	$T \in \mathcal{C}(X,Y)$
(a) $x_n \to x \Rightarrow Tx_n \to Tx$ $\Updownarrow$ (b) $\{x_n\}$ omezená $\Rightarrow \{Tx_n\}$ omez.	$\{x_n\}$ omezená $\Downarrow$ $\exists \{x_{n_k}\}\ \exists y \in Y$ $T(x_{n_k}) \to y \in \overline{T(\{x_n\})}$

Lemma

$Id: X \to X$ je kompaktní $\Longleftrightarrow \dim X < \infty$

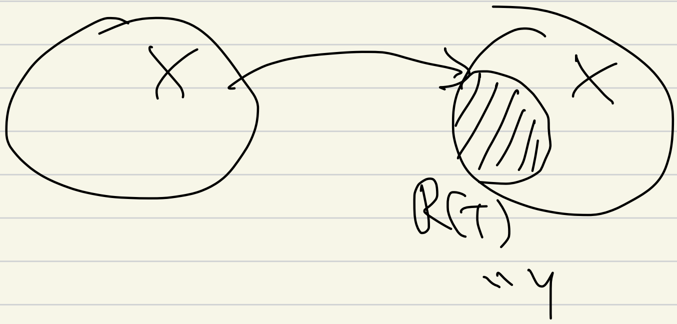
KONEC OPAK.

Vlastnosti komp. operátorů

① $\dim Y < \infty \Rightarrow \mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$

Důsledek:

$$\left.\begin{array}{l} T\in\mathcal{L}(X),\ \dim X=\infty \\ \dim R(T)<\infty \end{array}\right\} \Rightarrow T\in\mathcal{C}(X)$$



2 $S\in\mathcal{L}(X)$, $T\in\mathcal{C}(X)$

$\Downarrow$

a) $S\circ T\in\mathcal{C}(X)$

b) $T\circ S\in\mathcal{C}(X)$

D a) $\{x_n\}$ omezená $\overset{T\in\mathcal{C}}{\Longrightarrow}$ $Tx_{n_k}\longrightarrow\dots$

$\Downarrow$

$S(Tx_{n_k})\longrightarrow$ $(S\in\mathcal{L}(X))$

$\parallel$

$(S\circ T)(x_{n_k})\longrightarrow$ ✓

b) $\{x_n\}$ omezená $\overset{S\in\mathcal{L}(X)}{\Longrightarrow}$ $\{Sx_n\}$ omezená

$\Downarrow$ $T\in\mathcal{C}$

$T(Sx_{n_k})\longrightarrow$

$= (T\circ S)(x_{n_k})$

③ $\left.\begin{array}{l} T \in \mathcal{C}(X) \\ \dim X = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{0 \in \sigma(T)}$

Ⓓ Nechť $0 \notin \sigma(T) \Rightarrow 0$ je regulární

$T - 0 \cdot I = T$ ... prostý, na, $\exists T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$

$$\left.\begin{array}{ccccc} T \circ T^{-1} & = & Id \\ \cap\ \ \ \ \ \cap & & \cap \\ \mathcal{C} \circ \mathcal{L} & \underset{②}{\Rightarrow} & \mathcal{C} \end{array}\right] \Downarrow$$

④ $\left.\begin{array}{l} T \in \mathcal{C}(X) \\ \lambda \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ 1) $R(T - \lambda I)$ je uzavřený !

[Lukeš 5.17]

2) $\underbrace{R(T - \lambda I) = X}_{T_\lambda \text{ je „na"}} \Leftrightarrow T - \lambda I$ prostý

[Lukeš 5.27]

Fredholmova alternativa pro kompaktní operátory.

ad 1) $\lambda \neq 0 \Rightarrow$ nemůže nastat situace, že

$$R(T_\lambda) \neq X \quad \& \quad \overline{R(T_\lambda)} = X$$

$T_\lambda = T - \lambda I$, $\boxed{\lambda \neq 0}$

	$R(T_\lambda) = X$	$R(T_\lambda) \neq X$, $\overline{R(T_\lambda)} = X$	$\overline{R(T_\lambda)} \neq X$
T_λ prostý, T_λ^{-1} spoj.	λ reg	×	× 2)
T_λ prostý, T_λ^{-1} nespoj.	×	× 1)	× 2)
T_λ není prostý	× 2)	× 1)	λ vl. č.

ad 2) T_λ prostý $\iff$ T_λ^* na

SHRNUTÍ

- 0 je vždy ve spektru $T \in \mathcal{C}(X)$. Jediný prvek spektra, který může být v nekonečnu a nemusí …
- $\lambda \neq 0 \implies \lambda$ je buď regulární nebo λ je vl. č. (XOR)

(Všechny nenulové prvky spektra jsou vl. č.)

(5) $\left.\begin{array}{l} T \in \mathcal{C}(X) \\ \lambda \neq 0 \\ \lambda \in \sigma(T) \end{array}\right\} \Rightarrow$

- λ je vl. číslo
- $\dim \operatorname{Ker}(T - \lambda I) < \infty$

$$\underbrace{\dim \operatorname{Ker}(T-\lambda I)}_{=:\, m_\lambda}, \qquad \operatorname{Ker}(T-\lambda I) = \{x;\ T_\lambda x = 0\}, \quad T_\lambda x = 0 \iff Tx = \lambda x$$

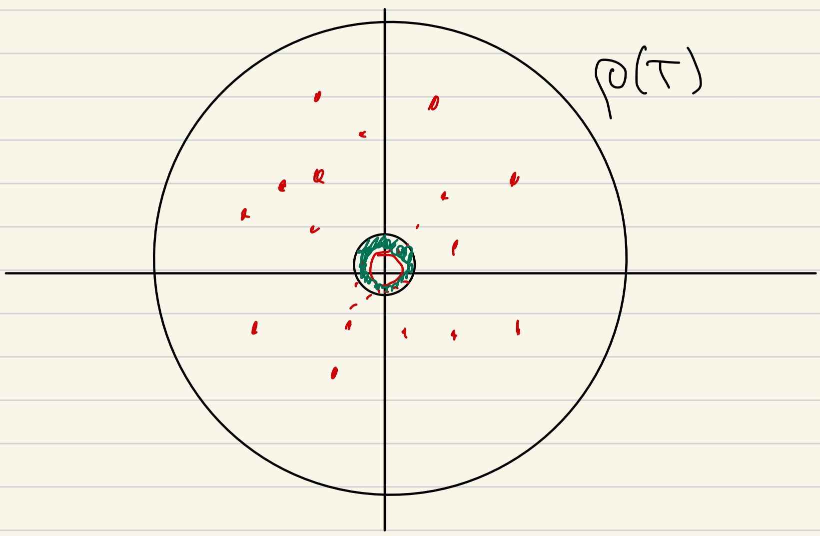
m_λ .... násobnost vl. č. $\in \mathbb{N}$

[Lukeš 5.15]

- $\operatorname{Ker}(T_\lambda) = \overline{\operatorname{Ker}(T_\lambda)}$

(6) $T \in \mathcal{C}(X)$

$\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| > \varepsilon\}$ je konečná $\forall \varepsilon > 0$



$\underbrace{\varepsilon = \frac{1}{n}}$

Důsledek:
- Spektrum komp. oper. je nejvýše spočetná množina
- $0 \in \sigma(T)$ je jediný mož. hrom.

bod spektra T

- $T \in \mathcal{C}(X) \Rightarrow \exists$ nejvýše spočetně mnoho vl. vektorů, přináležejících nenulovým vl. č.

$=$

4. DUÁLNOST

4.1. Duál a dualita

Def: X Banach $\quad \underbrace{X'}_{\text{duál (topologický duál) k } X} := \mathcal{L}(X, \mathbb{C}) \quad \left(\mathcal{L}(X, \mathbb{R})\right)$

Pozn: Vektorový duál (používá se v LP)
$\downarrow$
jen lineární zobr. pracující na X

Pozn: • Myšlenka: $x_n \xrightarrow{X} x \implies Tx_n \to Tx \ (\mathbb{C})$
$(T \in X')$

• Víme: Y Banach $\implies \mathcal{L}(X, Y)$ je Banach
$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$
je jeho normou

V případě $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$
$\mathbb{C} \to$ Banach
$\downarrow$
VŽDY BANACH

Def.: Dualita je zobrazení

$$S : X \times X' \longrightarrow \mathbb{K} \qquad (\mathbb{R} \text{ nebo } \mathbb{C})$$

1) které je – seskvilineární $(\mathbb{K} = \mathbb{C})$
– bilineární $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$

$$\left.\begin{aligned} S(\alpha x + \beta y, z) &= \alpha S(x,z) + \beta S(y,z) \\ S(x, \alpha y + \beta z) &= \bar{\alpha} S(x,y) + \bar{\beta} S(x,z) \end{aligned}\right\}$$

2) spojité

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{X \times X'} (x, y)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{S(x_n, y_n)} \to S(x, y)$$

Označení

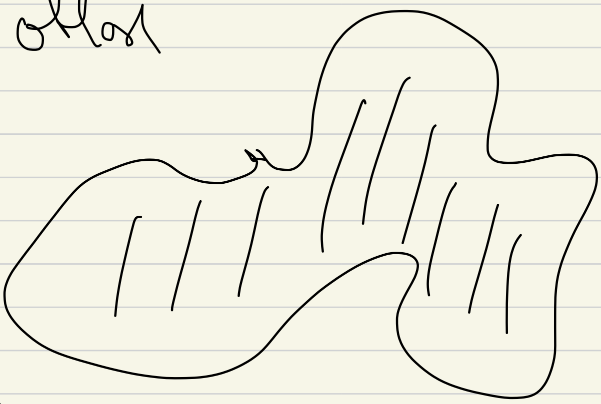
- $S(x, T) \equiv \langle x, T \rangle \in \mathbb{C}$, $x \in X$, $T \in X'$

- ZTOTOŽNĚNÍ: někdy $X' \equiv X$

Př.: skal. součin

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$$

Př. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oblast



$L^p(\Omega) \qquad 1<p<\infty$

$$= \left\{ f:\Omega \to \mathbb{C} \, ; \ \int_\Omega |f|^p =: \|f\|^p_{L^p} < \infty \right\}$$

Platí: $1<p<\infty$, $1<q<\infty$; $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\Rightarrow \quad (L^p(\Omega))' \cong L^q(\Omega)$$

FUNKCE

ZOBRAZENÍ $T: L^p(\Omega) \to \mathbb{C}$

ZTOTOŽNĚNÍ

Věta $\forall\, T \in (L^p(\Omega))' \ \exists!\, g \in L^q(\Omega)$, že

→ reprezentuje T

a) $T(f) = \int_\Omega f \bar{g} \qquad \forall f \in L^p(\Omega)$

b) $\|T\|_{(L^p)'} = \|g\|_{L^q}$

V tomto smyslu ztotožníme $T \equiv g$

$(L^p)' \simeq (L^q)$

$$\underbrace{\begin{matrix}\langle f, T\rangle = \int_\Omega f\bar{g} \\ \| \\ \langle f, g\rangle = \int_\Omega f\bar{g}\end{matrix}}$$

$\forall f \in L^p \quad T \in (L^p)'$

$\rightsquigarrow$

$f \in L^p(\Omega) \quad \forall g \in L^q$

$\simeq$ $\underbrace{\text{isometrický}}_{\text{zachování normy}}$ $\underbrace{\text{izomorfismus}}_{\text{bijekce}}$

Pozn.: • $p = q = 2 \implies \left[L^2(\Omega)\right]' \simeq L^2(\Omega)$

$T \in (L^2)'$ $\rightsquigarrow$ $g \in L^2$

$\langle f, T\rangle = \int_\Omega f\bar{g}$

$\rightsquigarrow$

$\underbrace{\langle f, g\rangle} = \underbrace{\int_\Omega f\bar{g}} \quad \forall f, g \in L^2$

$\rightsquigarrow \quad \| $

$(f, g)_{L^2}$

$p < 2 \quad q > 2$

Je L^2 něco speciálního? Ne:

$\boxed{\text{Věta}}$ (Riesz–Fréchet) [Lukeš 2.9]

Buď H Hilbertův, $(\cdot,\cdot)_H$ skal. součin

$\forall T \in H' \ \exists! f \in H$, že

a) $T(x) = (x,f)_H \quad \forall x \in H$

b) $\|T\|_{H'} = \|f\|_H$

Potom ztotožňujeme $H' \cong H$

$T \cong f$

(Cíl: $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}$)

Pozn: Pro X, Y Banachovy máme:

$$\boxed{X \subset Y \implies Y' \subset X'}$$

restrikce z –

stejná geometrie

$T \in Y' \implies T$ je spojité a lin. na prostoru Y

$\implies T|_X$ je spojité a lin. na prostoru X

$\implies T|_X \in X'$

$\implies T \in X'$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\Downarrow \text{ předch}$$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)' & \subset & (\mathbb{R})' \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{R}^2 & \subset & \mathbb{R} \end{array}$$

KDE JE CHYBA?