P5, 30.3.2021

$T - \lambda I \equiv T_\lambda \qquad \lambda \in \mathbb{C} \qquad T \in \mathcal{L}(X)$

λ parametr : $\lambda \in \sigma_p(T) \approx$ vl. čísla

$\lambda \in \sigma_R(T)$

$\lambda \in \sigma_C(T)$

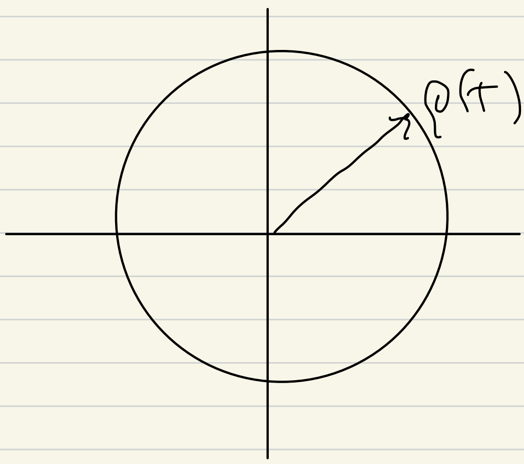
$\sigma(T) := \sigma_p(T) \cup \sigma_R(T) \cup \sigma_C(T)$

$\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow T - \lambda I$ buď není prostý
nebo není na
nebo T_λ^{-1} není spoj.

$\lambda \notin \sigma(T) \Rightarrow \lambda$ regulární T
$T - \lambda I$ je prostý, na
T_λ^{-1} spoj.

$\rho(T) := \sup_\lambda \{ |\lambda| , \lambda \in \sigma(T) \}$

Ukážeme: $\rho(T) < \infty \quad \forall T \in \mathcal{L}(X)$



$\bullet\ \lambda \Rightarrow$ je regul.

Věta X Banachův, $T \in \mathcal{L}(X)$
(tzv. $\|T\| < \infty$)

Potom

$|\lambda| > \|T\| \Rightarrow$ (1) $\lambda \notin \sigma(T)$, tj. λ regulární

(2)

$$T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} \in \mathcal{L}(X)$$

Pozn.: • Z (1) ihned plyne

$$\boxed{\rho(T) \le \|T\|}$$

• Řada v (2) … von Neum. řada
oper. $T - \lambda I$

D) Je-li $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow \lambda \ne 0$

$$A := \frac{1}{\lambda} T$$

$$\underbrace{\|A\| = \frac{1}{|\lambda|}\|T\| < 1 \qquad A \in \mathcal{L}(X)}_{\text{Věta ....}}$$

$\Rightarrow$ $I - A$ prostá a na

$$\underbrace{T - \lambda I}_{\text{prostá a na}} = (-\lambda)(I - A)$$

$\Rightarrow (T - \lambda I)^{-1}$ ex.

$\Rightarrow \lambda$ reg. tj. $\lambda \notin \sigma(T)$

(2) Chceme:

$$T_\lambda^{-1} = (T-\lambda I)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} \in \mathcal{L}(X) \quad ?$$

Věta... $\Rightarrow$

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

$$\left(I - \frac{1}{\lambda}T\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} \quad \Big/ (-1)$$

$$A \circ A = \frac{T}{\lambda} \circ \frac{T}{\lambda} = \frac{T^2}{\lambda^2}$$

$$\left(\frac{1}{\lambda}T - I\right)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} \quad \Big/ \cdot (\lambda^{-1})$$

$$\underbrace{(\lambda^{-1})\left(\frac{1}{\lambda}T - I\right)^{-1}}_{(T-\lambda I)^{-1}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}}$$

$y = 3x \xrightarrow{\text{INV.}} y = \frac{1}{3}x$

$\boxtimes$

Př:

$$\ell_2 := \left\{ \{x_n\}_n^{\infty},\ x_n \in \mathbb{C};\ \|\{x_n\}\|^2 = \sum |x_n|^2 < \infty \right\}$$

$$T: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$$

$$T: (x_1, x_2, \dots) \longmapsto (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$\|Tx\|_{\ell_2} = \|x\|_{\ell_2}$$

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} \underbrace{\|Tx\|}_{\|x\|} = 1 \Rightarrow \rho(T) \le 1$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$|\lambda| > 1$ .... reg.

? $|\lambda| \le 1$?

• $\lambda = 0$: $T - \underset{0}{\underset{\|}{\lambda I}} = T$

VÍME

T je prostá, není na

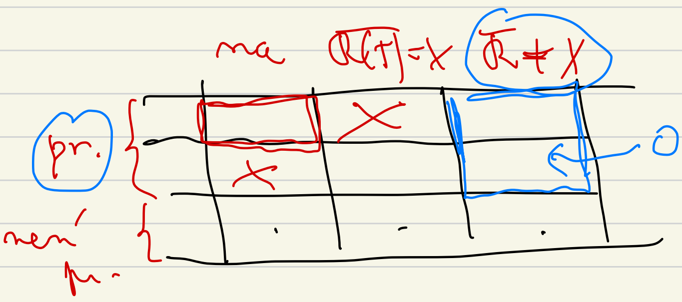
$R(T) \neq X$ jasné

$\overline{R(T)} \neq X$ $\qquad (1,0,0,0,0\dots)$

$x_n \not\to$

$$\boxed{0 \in \sigma_R(T)}$$

• $|\lambda| \le 1$, $0 \neq \lambda$



Ukažme: žádné z těchto λ není vl. č.

$? \; \exists x \neq 0 \qquad Tx = \lambda x$

$$(0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots)$$

$$\Downarrow$$

$$0 = \lambda x_1 \quad \overset{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} \quad x_1 = 0$$

$$\& \qquad x_k = \lambda x_{k+1} \qquad \forall k = 1, 2, \dots$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \dots$$

$$\Rightarrow x = 0 \qquad \text{POUZE } x = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda \text{ není vl. č.}}$$

Ukážeme: $|\lambda| \leq 1$, $\lambda \neq 0$, žádné $x \in \ell_2$ se zobrazením T_λ nezobrazí na $(1, 0, 0, 0, \dots)$
$\;\;$ "$T - \lambda I$

$$? \; T_\lambda x = (1, 0, 0, 0, \dots)$$

$$\parallel$$

$$(T - \lambda I)x = Tx - \lambda x$$

$$(-\lambda x_1, x_1 - \lambda x_2, x_2 - \lambda x_3, \dots) \overset{?}{=} (1, 0, 0, \dots)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} -\lambda x_1 &= 1 \\ x_k - \lambda x_{k+1} &= 0 \qquad \forall k = 1, 2 \end{aligned}$$

$x_1 = -\frac{1}{\lambda}$ & $x_{k+1} = \frac{x_k}{\lambda}$

?

$$\underbrace{x = \left(-\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda^2}, -\frac{1}{\lambda^3}, -\frac{1}{\lambda^4}, \dots\right)}_{x \in \ell_2 \text{ ??}} \qquad |\lambda| \le 1,\ \lambda \neq 0$$

$$\|x\|^2_{\ell_2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{2k}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right)^k}_{\text{geom. ř.}} = +\infty$$

kvocient $\frac{1}{|\lambda|^2}$

ale $|\lambda| \le 1$

$\Rightarrow \frac{1}{|\lambda|} \ge 1$ $\qquad \frac{1}{|\lambda|^2} \ge 1$

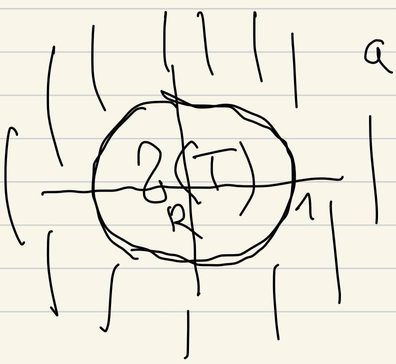
$\underbrace{x \notin \ell_2}$

$\overline{R(T_\lambda)} \neq \ell_2$

nic se pomocí T_λ na $(a, 0, 0, 0, \dots)$

$a \in \mathbb{C}$

$$\left.\begin{array}{l} |\lambda| \le 1 \\ \lambda \neq 0 \end{array}\right\} \lambda \in \sigma_R(T)$$



Cvičení

a) $T : \ell_2 \to \ell_2$

$T : (x_1, x_2, \dots) \longmapsto \left(x_2, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{3}, \frac{x_5}{4}, \dots\right)$

Řešení: • $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$

• $\sigma(T) = \{0\} = \sigma_p(T)$

$\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda$ reg.

b) $T : \ell_2 \to \ell_2$

$T : (x_1, x_2, \dots) \longmapsto \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots\right)$

Řešení: • $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$

• $\sigma(T) = \{0\}$ $\quad \sigma_p = \emptyset$

¿ $0 \in \sigma_c(T)$?

¿ $0 \in \sigma_r(T)$?

Konec kapitoly 2.

$\boxed{\text{3. KOMPAKTNÍ OPERÁTORY}}$

Víme: X, Y Banachovy
$T: X \to Y$
T lineární
$\Big\} \Rightarrow T$ spojitý $\Leftrightarrow T$ omezený

$$\boxed{T(\text{omezené množ.}) = \text{omez. množ.}}$$

<u>Def:</u> X, Y Banachovy, $T: X \to Y$, T lineární se nazývá <u>kompaktní</u>, pokud

$$\boxed{\overline{T(\text{omezené mn.})} = \text{kompaktní}}$$

$$\left(\forall A \subset X \text{ omez. } \overline{T(A)} \subset Y \text{ kompakt.}\right)$$

Píšeme $T \in \mathcal{C}(X, Y)$ srov. $\mathcal{L}(X, Y)$

Úmluva $\mathcal{C}(X) \equiv \mathcal{C}(X, X)$ $\qquad \mathcal{L}(X)$

lin. kompaktní $\qquad$ spoj. lin

<u>Pozn:</u> • $\mathcal{C}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$

(2) $T \in \mathcal{C}(X,Y) \overset{?}{\Rightarrow} T \in \mathcal{L}(X,Y)$

A omez.; $T(A)$ omez.?

$\Downarrow$ víme

$\overline{T(A)}$ je kompaktní • $\Rightarrow$ $\overline{T(A)}$ omezená

$\Downarrow$

$T(A)$ omezená

$[\,T(A) \subseteq \overline{T(A)}\,]$

$\Rightarrow T \in \mathcal{L}(X,Y)$

ad • V lib. prostoru

K kompaktní $\Rightarrow$ K uzavřená, K omezená

$\not\Leftarrow$

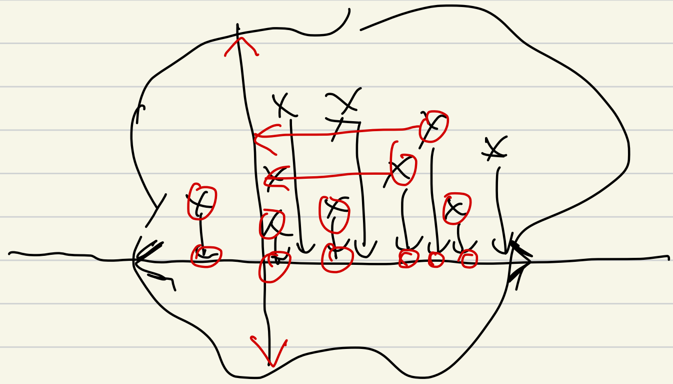
„$\Leftarrow$" platí jen v konečné dimenzi

$T \in \mathcal{L}(X,Y)$	$T \in \mathcal{C}(X,Y)$
(a) $x_n \to x \Rightarrow Tx_n \to Tx$ $\Updownarrow$ (b) $\{x_n\}$ omezená $\Rightarrow \{Tx_n\}$ omez.	$\{x_n\}$ omezená $\Downarrow$ $\exists \{x_{n_k}\}\ \exists y \in Y$ $T(x_{n_k}) \to y \in \overline{T(\{x_n\})}$

Úvaha: Pokud by celý prostor Y měl vlastnost, že z každé omezené posloupnosti v Y vybereme konvergentní podposloupnost, pak by platilo, $\boxed{\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)}$

- $Y = \mathbb{R}$ má tuto vlastnost. (Bolzano–Weierstrass.)

$Y = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^n$ mají tuto vlastnost.



Hypotéza: Takové Y bude muset mít: $\dim Y < \infty$

Často: : Y má B–W vlastnost.

- Stačí $\mathcal{L}(X,Y) \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$

$T \in \mathcal{L}(X,Y)$

$\{x_n\}$ omez. v X $\Rightarrow$ $\{Tx_n\}$ omezená $\subset Y$

$\Downarrow$ B–W

$\exists\ Tx_{n_k} \to y \in Y \Rightarrow T \in \mathcal{C}(X,Y)$

Lemma Y Banachův:

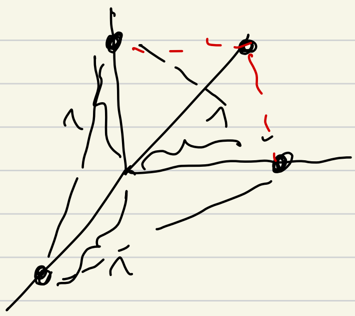
Y má B-W vlastnost $\iff \dim Y < \infty$

(D) „$\Leftarrow$" $\dim Y < \infty$ $\quad \dim Y = n$

$$Y \cong \mathbb{R}^n$$

„$\Rightarrow$"

$\underline{\dim Y = \infty \Rightarrow \text{nemá B-W vl.}}$ ✓



každý od každého je „daleko"

$\boxtimes$

Lemma

$Id: X \to X$ je kompaktní $\iff \dim X < \infty$

Důsl.: $\dim X = \infty \Rightarrow Id$ není kompaktní

(D) $Id: X \to X$ je kompaktní $\iff \{x_n\} \xrightarrow{Id} \{x_n\}$ omez. $\underbrace{\Rightarrow \exists x_{n_k} \to}$

$\dim X < \infty \qquad \iff X$ má B-W

$\boxtimes$