6 Věty Gauss-Ostrogradského, Greenova a Stokesova věta

6.1 Úvod

Definice (zobecněná plocha)**.** Řekneme, že $S \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) je **zobecněná** $(n-1)$**-plocha**, pokud S je konečným sjednocením hladkých $(n-1)$-ploch, $(n-2)$-ploch,..., 2-ploch, hladkých křivek a bodů. Jsou-li S_j, $j = 1, \ldots, k$ všechny hladké $(n-1)$-plochy z tohoto sjednocení, definujeme plošné integrály 1. resp. 2. druhu z funkce f resp. pole $\vec{T}$ jako

$$\int_S f \,\mathrm{d}S = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} f \,\mathrm{d}S\,, \quad \text{resp.} \quad \int_S \vec{T}\,\mathrm{d}\vec{S} = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} \vec{T}\,\mathrm{d}\vec{S}\,,$$

mají-li výrazy na pravě straně smysl.

Poznámka (zobecněná křivka). V případě, že $n = 2$, zahrnuje předchozí definice i křivkový integrál. V tomto případě tedy chápeme křivku jako "1-plochu" ($\vec{\varphi} \equiv S$) a křivkový integrál přes jako "plošný integrál přes 1-plochu". Tato dohoda nám umožní formulovat následující věty v jednotném tvaru. Pod zápisem

$$\int_S f \,\mathrm{d}S \quad \text{resp.} \quad \int_S \vec{T}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

pak rozumíme

$$\int_\varphi f \,\mathrm{d}s \quad \text{resp.} \quad \int_\varphi \vec{T}\,\mathrm{d}\vec{\varphi}\,.$$

6.2 Gauss-Greenovy-Ostrogradského vzorce

Úmluva

V následujících větách budeme předpokládat:

- Ω je omezená souvislá otevřená množina v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, její hranice $\partial\Omega$ je **zobecněná** $(n-1)$**-plocha** ve smyslu předchozí definice a poznámky.
- Všechny integrované (skalární či vektorové) funkce jsou (pro jednoduchost) spojité spolu se všemi potřebnými derivacemi na $\overline{\Omega}$.
- Symbolem $\vec{\nu}$ označujeme jednotkový vektor **vnější normály** k Ω, v bodech $\partial\Omega$, ve kterých existuje.

Věta 6.1. *Pro $f : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, resp. $\vec{T} : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ platí (za předpokladů předchozí úmluvy):*

***Gauss-Green-Ostrogradský**, pro $k \in \{1, \ldots, n\}$:*

$$\boxed{\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k}\, dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_k \, dS\,.} \tag{1}$$

Věta o divergenci:

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div} \vec{T}\, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{T} \cdot \vec{\nu}\, dS\,.} \tag{2}$$

Věta 6.2. *Pro $u, v : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí (za předpokladů předchozí úmluvy):*

***Integrace per partes (po složkách)**, pro $k \in \{1, \ldots, n\}$:*

$$\boxed{\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k}\, dx = \int_{\partial\Omega} u\, v\, \nu_k \, dS - \int_\Omega v\, \frac{\partial u}{\partial x_k}\, dx\,.} \tag{3}$$

Integrace per partes (vektorově):

$$\boxed{\int_\Omega u\,\nabla v\,dx = \int_{\partial\Omega} u\,v\,\vec{\nu}\,dS - \int_\Omega v\,\nabla u\,dx.} \tag{4}$$

Věta 6.3. *Pro $u, v : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí (za předpokladů předchozí úmluvy):*

***1. Greenova formule**:*

$$\boxed{\int_\Omega \nabla u\,\nabla v\,dx = \int_{\partial\Omega} v\,\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\,dS - \int_\Omega v\,\Delta u\,dx\,,} \tag{5}$$

kde $\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}} := \nabla u \cdot \vec{\nu}$ je derivace ve směru vektoru $\vec{\nu}$.

***2. Greenova formule**:*

$$\boxed{\int_\Omega \big(u\,\Delta v - v\,\Delta u\big)\,dx = \int_{\partial\Omega} \Big(u\,\frac{\partial v}{\partial\vec{\nu}} - v\,\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\Big)\,dS\,.} \tag{6}$$

Důsledek 6.4. *Pro $u : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí (za předpokladů předchozí úmluvy):*

$$\boxed{\int_\Omega \Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\,dS\,.} \tag{7}$$

*Dále platí (je-li $\vec{\nu}$ jednotkový vektor **vnější normály** k Ω):*

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} \vec{\nu}\,dS = 0\,.} \tag{8}$$

Poznámky k důkazům vzorců (1)–(8):

- Vzorec (1) považujeme za základní. Všimněte si jeho analogie se známým Newton-Leibnizovým vztahem v 1D, platným např. pro $f \in \mathcal{C}^1(\langle a, b\rangle)$,

$$\int_a^b f'\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)\,. \tag{9}$$

  Interval (a, b) v (9) hraje roli množiny Ω ve vztahu (1), jeho hranicí jsou dva body a a b. Hodnoty v hraničních bodech $f(b)$ a $f(a)$ na pravé straně (9) jsou násobeny hodnotami 1 a -1, které lze chápat jako hodnoty "vnější jednotkové normály k intervalu (a, b)", v bodech a a b. S využitím této úvahy a Fubiniovy věty není těžké vzorec (1) v případě jednoduchých oblastí odvodit.

- Vztah (2) plyne z (1): dosaďte $f := T_k$ v (1) a sečtěte přes k.
- Vztah (3) plyne z (1): dosaďte $f := uv$ v (1) a derivujte součin na levé straně.
- Vztah (4) je jen vektorovým zápisem vztahu (3).
- Vztah (5) plyne z (3): místo u dosaďte $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ a takto vzniklé rovnosti sečtěte přes k.
- Vztah (6) plyne z (5): napište si modifikaci vztahu (5), tak, že prohodíte roli u a v. Potom odečtěte (5) a tento modifikovaný vztah.
- Vztah (7): položte $v = 1$ v (5).
- Vztah (8): položte $u = v = 1$ v (4).

6.3 Greenova a Stokesova věta

Věta 6.5 (Green)**.** *Buď* $\boxed{n=2}$*. Pro* $\vec{T} : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *platí (za předpokladů předchozí úmluvy, tj. speciálně* $\partial\Omega$ *je sjednocení konečného počtu hladkých křivek a bodů):*

$$\boxed{\int_\Omega \left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2}\right) dx = \int_{\partial\Omega} \vec{T} \cdot \vec{\nu}\, d\varphi\,,} \tag{10}$$

$$\boxed{\int_\Omega \left(\frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\right) dx = \int_{\partial\Omega} \vec{T} \cdot \vec{\tau}\, d\varphi\,,} \tag{11}$$

kde $\vec{\nu}$ *je vnější normálový vektor (k* Ω*) a* $\vec{\tau}$ *tečný vektor ke křivce* $\partial\Omega$*, která "obíhá"* Ω *tak, že má* Ω *"po levé ruce".*

Poznámka. Jiný zápis předchozích dvou vztahů (10), (11) (stále jsme v $\mathbb{R}^n$ pro $n = 2$) je

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div} \vec{T}\, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \vec{T} \cdot \vec{\nu}\, d\varphi\,,} \tag{12}$$

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{rot} \vec{T}\, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \vec{T} \cdot \vec{\tau}\, d\varphi\,,} \tag{13}$$

kde $\operatorname{rot} \vec{T} = \frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}$ je "dvourozměrná rotace dvourozměrného pole $\vec{T} = (T_1, T_2)$" (třetí souřadnice třírozměrné rotace pole $\vec{T} = (T_1, T_2, 0)$). Zobecněním vztahu (13) do tří dimenzí je tzv. Stokesova věta.

Věta 6.6 (Stokes)**.** *Buď* $(S, \vec{\nu}) \subset \mathbb{R}^3$ *hladká orientovaná 2-plocha taková, že* $\partial S = \langle\vec{\varphi}\rangle$*, kde* $\vec{\varphi}$ *je Jordanova křivka, obíhající* $(S, \vec{\nu})$ *v* ***kladném smyslu****, tj.* ***v souladu "s pravidlem palce pravé ruky"****. Potom (platí-li stále úmluva z počátku této kapitoly)*

$$\boxed{\int_{(S,\vec{\nu})} \operatorname{rot} \vec{T} \cdot \vec{\nu}\, dS = \int_\varphi \vec{T} \cdot \vec{\tau}\, d\varphi = \int_\varphi \vec{T}\, d\vec{\varphi}\,.} \tag{14}$$

Poznámka (integrální reprezentace divergence). Nechť $K_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ je koule o středu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r \in (0, R)$, a $\vec{T} \in \mathcal{C}^1(K_R(x_0))$, pak

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{T}(x_0) = \lim_{r\to 0+} \frac{1}{\lambda_n(K_r(x_0))} \int_{\partial K_r(x_0)} \vec{T} \cdot \vec{\nu}\, \mathrm{d}S\,.} \tag{15}$$

Poznámka (integrální reprezentace rotace). Nechť $(S, \vec{\nu}) \equiv S_r(x_0) \subset \mathbb{R}^3$ je dvourozměrný orientovaný kruh o středu $x_0 \in \mathbb{R}^3$ a poloměru $r \in (0, R)$, který leží v rovině rovnoběžné z některou dvojicí souřadných rovin (xy, xz nebo yz), s hranicí $\partial S = \langle\vec{\varphi}\rangle$, orientovanou v souladu se Stokesovou větou. Nechť dále $\vec{T} \in \mathcal{C}^1(K_R(x_0))$. Pak

$$\boxed{\left(\operatorname{rot} \vec{T} \cdot \vec{\nu}\right)(x_0) = \lim_{r\to 0+} \frac{1}{\lambda_2(S_r(x_0))} \int_\varphi \vec{T} \cdot \vec{\tau}\, d\varphi\,.} \tag{16}$$

. . . a to je vše v ZS 2019/20