5 Plošný integrál

5.1 Plošný integrál 1. druhu v $\mathbb{R}^3$

Definice. Řekneme, že $S \subset \mathbb{R}^3$ je hladká 2-plocha (hladká dvoudimenzionální plocha), pokud existuje zobrazení

$$\vec{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \Omega \text{ otevřená}, \qquad \vec{\varphi}(\Omega) = S,$$
$$\vec{\varphi} : \begin{cases} x = \varphi_1(u,v)\,, \\ y = \varphi_2(u,v)\,, \\ z = \varphi_3(u,v)\,, \end{cases} \tag{1}$$

přičemž $\vec{\varphi} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\vec{\varphi}$ je prosté na Ω, a

$$\text{hodnost matice } \left(\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{D(u,v)}\right) = 2 \quad \forall\,(u,v) \in \Omega\,. \tag{2}$$

Poznámka.

- Budeme psát $\vec{\varphi}_u \equiv \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\right)$ apod.
- Podmínka (2) říká, že ($\forall (u,v) \in \Omega$) jsou vektory $\vec{\varphi}_u$ a $\vec{\varphi}_v$, které mají geometrický význam tečných vektorů k ploše S v bodě $\vec{\varphi}(u,v)$, lineárně nezávislé, a tvoří tedy bázi dvojrozměrného tečného prostoru k S v bodě $\vec{\varphi}(u,v)$.
- Vektorový součin $\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v$ je pak **nenulový** a má směr normálového vektoru k ploše S; jeho velikost $\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|$ je číselně rovna plošnému obsahu rovnoběžníka se stranami $\vec{\varphi}_u$ a $\vec{\varphi}_v$. Plocha S je tak **orientována** polem jednotkových normálových vektorů $\vec{\nu}(\vec{\varphi}(u,v)) := \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|}$. V situaci, kdy plocha S je orientována normálami $\vec{\nu}$, píšeme $S = (S, \vec{\nu})$.

Definice. Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ hladká 2-plocha parametrizovaná zobrazením $\vec{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Buď f definovaná na S, taková, že $f(\vec{\varphi}(u,v))$ má smysl alespoň pro s.v. hodnoty $(u,v) \in \Omega$. Definujeme **plošný integrál 1. druhu z** f **přes plochu** S jako

$$\int_S f\,dS := \int_\Omega f(\vec{\varphi}(u,v))\,\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|(u,v)\,du\,dv\,, \tag{3}$$

pokud existuje integrál na pravé straně (například v Lebesgueově smyslu).

Tvrzení 5.1 (nezávislost na parametrizaci)**.** *Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ hladká 2-plocha parametrizovaná dvěma různými zobrazeními:*

- $\vec{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *$\Omega$ otevřená,* $\vec{\varphi}(\Omega) = S$, $(\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v)(u,v) \neq 0\ \forall (u,v) \in \Omega$*;*
- $\vec{\psi} : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *$G$ otevřená,* $\vec{\psi}(G) = S$, $(\vec{\psi}_s \times \vec{\psi}_t)(s,t) \neq 0\ \forall (s,t) \in G$*;*

Buď f definovaná na S, taková, že $f(\vec{\varphi}(u,v))$ má smysl alespoň pro s.v. hodnoty $(u,v) \in S$ a $f(\vec{\psi}(s,t))$ má smysl alespoň pro s.v. hodnoty $(s,t) \in G$. Potom

$$\int_S f\,dS = \int_G f\,dS\,, \tag{4}$$

pokud existuje alespoň jeden z obou integrálů.

Cvičení (Grammův determinant)**.** Jiný způsob výpočtu tzv. "metrického členu" $\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|$ se opírá o následující identitu (determinant vpravo se nazývá *Grammův*):

$$\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|^2 = \begin{vmatrix} \vec{\varphi}_u \cdot \vec{\varphi}_u & \vec{\varphi}_u \cdot \vec{\varphi}_v \\ \vec{\varphi}_v \cdot \vec{\varphi}_u & \vec{\varphi}_v \cdot \vec{\varphi}_v \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Dokažte tuto identitu.

Cvičení. • Spočtěte povrch plochy, která je popsána parametrizací:

$$\vec{\varphi}: \begin{cases} x = (R + r\cos u)\cos v\,, \\ y = (R + r\cos u)\sin v\,, \\ z = r\sin u\,, \end{cases} \tag{6}$$

$u, v \in (0, 2\pi)$, $0 < r < R$. O jakou jde plochu?

[**Řešení:** Jde o torus (pneumatiku, anuloid, ...) a povrch by vám měl vyjít $4\pi^2 rR = 2\pi r \cdot 2\pi R$.]

- Parametrizujte kouli v $\mathbb{R}^3$ a spočtěte její povrch.

Cvičení. Ukažte: je-li plocha S zadána explicitně, jako graf hladké funkce $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to S$, tedy pokud je $S := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3\,;\ z = \psi(x, y)\,;\ (x, y) \in \Omega\}$, platí

$$\int_S f\, dS = \int_\Omega f(x, y, \psi(x, y))\, \sqrt{1 + |\nabla\psi|^2}\, dx\, dy\,. \tag{7}$$

[**Návod:** Z explicitního zadání plochy pomocí $z = \psi(x, y)$ lze vyrobit parametrizaci $\vec{\varphi}$: $(x = x, y = y, z = \psi(x, y))$, $(x, y) \in \Omega$. Zbytek plyne přímým výpočtem.]

5.2 Plošný integrál 2. druhu v $\mathbb{R}^3$

Definice. Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ hladká 2-plocha parametrizovaná zobrazením $\vec{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ **a orientovaná** polem jednotkových normálových vektorů $\vec{\nu}(\vec{\varphi}(u, v)) := \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|}$. Buď $\vec{T}$ vektorové pole definované na S, takové, že $\vec{T}(\vec{\varphi}(u, v))$ má smysl alespoň pro s.v. hodnoty $(u, v) \in S$. Definujeme **plošný integrál 2. druhu z $\vec{T}$ přes (orientovanou) plochu** $(S, \vec{\nu})$ jako

$$\int_{(S,\vec{\nu})} \vec{T}\, d\vec{S} := \int_\Omega \vec{T}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot (\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v)\,(u, v)\, du\, dv\,, \tag{8}$$

pokud existuje integrál na pravé straně (například v Lebesgueově smyslu).

Definice (souhlasná a nesouhlasná orientace)**.** Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ hladká 2-plocha parametrizovaná dvěma různými zobrazeními:

- $\vec{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, Ω otevřená, $\vec{\varphi}(\Omega) = S$, $(\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v)(u, v) \neq 0\ \forall (u, v) \in \Omega$;
- $\vec{\psi} : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, G otevřená, $\vec{\psi}(G) = S$, $(\vec{\psi}_s \times \vec{\psi}_t)(s, t) \neq 0\ \forall (s, t) \in G$.

Položme

$$\vec{\nu}(\vec{\varphi}(u, v)) := \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|}\,, \qquad \vec{\mu}(\vec{\psi}(s, t)) := \frac{\vec{\psi}_s \times \vec{\psi}_t}{\|\vec{\psi}_s \times \vec{\psi}_t\|}\,.$$

Řekneme, že plochy $(S, \vec{\nu})$ a $(S, \vec{\mu})$ jsou **souhlasně resp. nesouhlasně orientované**, pokud je $\vec{\nu} = \vec{\mu}$ resp. $\vec{\nu} = -\vec{\mu}$ (ve všech bodech plochy S).

Tvrzení 5.2 (nezávislost na parametrizaci)**.** *Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ hladká 2-plocha parametrizovaná dvěma různými zobrazeními, $\vec{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a $\vec{\psi} : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (viz značení z předchozí definice). Buď $\vec{T}$ pole definované na S, takové, že $\vec{T}(\vec{\varphi}(u, v))$ má smysl alespoň pro s.v. hodnoty $(u, v) \in S$ a $\vec{T}(\vec{\psi}(s, t))$ má smysl alespoň pro s.v. hodnoty $(s, t) \in G$. Potom (pokud existuje alespoň jeden z obou integrálů)*

$$\int_{(S,\vec{\nu})} \vec{T}\, d\vec{S} = \pm \int_{(S,\vec{\mu})} \vec{T}\, d\vec{S}\,, \tag{9}$$

kde znaménko "plus" resp. "minus" je v případě, že orientace $(S, \vec{\nu})$ a $(S, \vec{\mu})$ je souhlasná resp. nesouhlasná.

Poznámka. Buď' $S = (S, \vec{\nu})$ hladká orientovaná 2-plocha, $\vec{\nu} := \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|}$, $\vec{\varphi}$ je parametrizující zobrazení. Pak platí následující vztahy mezi integrály prvního a druhého druhu:

$$\int_{(S,\vec{\nu})} \vec{T}\, d\vec{S} = \int_S \vec{T} \cdot \vec{\nu}\, dS\,, \qquad \int_S f\, dS = \int_{(S,\vec{\nu})} f\vec{\nu}\, d\vec{S}\,, \tag{10}$$

kde f resp. $\vec{T}$ mají stejný význam jako v definicích příslušných integrálů, (3) resp. (8). Na základě těchto rovností se také někdy formálně píše $d\vec{S} = \vec{\nu}\, dS$, (pak tedy je i $\vec{\nu}\, d\vec{S} = \vec{\nu} \cdot \vec{\nu}\, dS = dS$).

Poznámka. Někdy také píšeme formálně $d\vec{S} = (dy\, dz, dx\, dz, dx\, dy)$. Pak pro $\vec{T} = (P, Q, R)$ lze psát

$$\int_{(S,\vec{\nu})} \vec{T}\, d\vec{S} = \int_S P\, dy\, dz + Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy\,. \tag{11}$$

Např. zápis $\int_S x^2\, dy\, dz + z^2\, dx\, dy$ tedy ukazuje, že jde o plošný integrál 2. druhu $\int_{(S,\vec{\nu})} \vec{T}\, d\vec{S}$, kde $\vec{T} = (x^2, 0, z^2)$.