3 Obyčejné diferenciální rovnice a jejich soustavy

3.1 Úvod - opakování

Opakování z 1. ročníku

Definice. Rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru

$$y' = g(y) \cdot h(t). \tag{1}$$

Návod k řešení:

- Pokud $g(c) = 0$, je funkce $y(t) = c$ řešením rovnice.
- Na intervalech, kde $g(y) \neq 0$ uvažte $\frac{y'}{g(y)} = h(t)$ s následným $\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)\,\mathrm{d}t$.
- Nutná je diskuse o možnostech navazování řešení předchozích dvou typů!

Definice. Lineární ODR prvního řádu je rovnice tvaru

$$y' + p(t)y = q(t), \tag{2}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$.

Návod k řešení:

- Násobte rovnici výrazem $e^{P(t)}$, kde P je primitivní funkce k p na (a, b).
- Upravte na levé straně do tvaru derivace součinu.
- Integrujte.

Definice. Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty je rovnice tvaru

$$Ay'' + By' + Cy = f(t), \tag{3}$$

kde A, B, $C \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, a funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu (a, b). Pokud je f identicky nulová na (a, b), nazýváme rovnici (3) **homogenní**.

Případ I:

$f \equiv 0$, rovnice: $Ay'' + By' + Cy = 0$, obecné řešení y_h

Pokud **charakteristická** rovnice $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ má:

1. dva různé reálné kořeny $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

2. jeden dvojnásobný reálný kořen λ:

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

3. dva komplexně sdružené kořeny $\alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$:

$$y_h(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

Případ II:

$f \not\equiv 0$, rovnice: $Ay'' + By' + Cy = f(t)$

Pro řešení $y(t)$ platí:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

kde $y_h(t)$ je obecné řešení homogenní rovnice (viz předchozí případ) a $y_p(t)$ je **jedno** (jakékoliv), tzv. **partikulární** řešení rovnice $Ay'' + By' + Cy = f(t)$.

Některá partikulární řešení lze "uhodnout" podle tvaru pravé strany.

- Je-li $f(t) = P(t)e^{\alpha t}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a P je polynom, potom existuje polynom Q, st $Q =$ st P, že
  1. $\alpha \neq \lambda_1, \alpha \neq \lambda_2 \implies y_p(t) = Q(t)e^{\alpha t}$,
  2. $\alpha \neq \lambda_1, \alpha = \lambda_2 \implies y_p(t) = tQ(t)e^{\alpha t}$,
  3. $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \implies y_p(t) = t^2Q(t)e^{\alpha t}$.
- Je-li $f(t) = e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + R(t)\sin\beta t)$, ($P$, R polynomy), existují polynomy Q, S, stupně nejvýše $\max(\text{st } P, \text{st } R)$, takové, že
  1. $\alpha + i\beta \neq \lambda_1, \alpha + i\beta \neq \lambda_2 \implies y_p(t) = e^{\alpha t}(Q(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t)$,
  2. $\alpha + i\beta = \lambda_1, \alpha + i\beta \neq \lambda_2 \implies y_p(t) = te^{\alpha t}(Q(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t)$.

Konec opakování.

3.2 Lineární DR n-tého řádu s (ne)konstantními koeficienty

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t), \tag{4}$$

kde $a_0, \ldots, a_n$ a f jsou funkce spojité na daném intervalu (a, b), $a_n(t) \neq 0$ pro $t \in (a, b)$ (**lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s nekonstantními koeficienty**). Jsou-li **všechny** funkce $a_0, \ldots, a_n$ konstantní na intervalu (a, b), jde o **lineární diferenciální rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty**, ($f(t)$ nemusí být konstantní).

Homogenní rovnicí k rovnici (4) rozumíme rovnici

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \tag{5}$$

Věta 3.1. *Nechť $t_0 \in (a, b)$ a $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice* (4) *resp.* (5)*, které splňuje tzv.* ***počáteční podmínky***

$$y(t_0) = z_0,\ y'(t_0) = z_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu (a, b).

Věta 3.2 (o struktuře všech řešení)**.**

(i) *Maximální řešení rovnice* (5) *jsou definována na celém $\mathbb{R}$ a tvoří vektorový podprostor prostoru $C^n(a, b)$ dimenze n. Jeho jakoukoli bázi nazýváme* ***fundamentálním systémem*** *rovnice* (5).

(ii) *Nechť y_p je maximální řešení rovnice* (4)*. Pak funkce y je jejím maximálním řešením, právě když ji lze zapsat ve tvaru $y = y_p + y_h$, kde y_h je vhodné řešení rovnice* (5).

I. Hledání fundamentálního systému

Pro rovnici (5) s konstantními koeficienty lze použít tzv. **metodu charakteristického polynomu.** Pro rovnici (5), kde alespoň jeden z koeficientů je nekonstatní, nelze obecně explicite najít její fundamentální systém. (V některých speciálních případech to lze, jak uvidíme později) .

Definice. Nechť jsou koeficienty homogenní rovnice (5) konstantní. **Charakteristickým polynomem** rovnice (5) rozumíme polynom

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta 3.3. *Nechť jsou koeficienty homogenní rovnice* (5) *konstantní. Nechť* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu* P*, s násobnostmi* $r_1, \ldots, r_s$*. Nechť* $\alpha_1 + \beta_1 i, \ldots, \alpha_\ell + \beta_\ell i$ *jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu* P*, s kladnou imaginární částí a násobnostmi* $q_1, \ldots, q_\ell$*.*

Pak funkce

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \ldots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & & & \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \ldots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \ldots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \ldots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & & & \\
e^{\alpha_\ell t}\cos\beta_\ell t, & te^{\alpha_\ell t}\cos\beta_\ell t, & \ldots & t^{q_\ell-1}e^{\alpha_\ell t}\cos\beta_\ell t, \\
e^{\alpha_\ell t}\sin\beta_\ell t, & te^{\alpha_\ell t}\sin\beta_\ell t, & \ldots & t^{q_\ell-1}e^{\alpha_\ell t}\sin\beta_\ell t
\end{array}$$

tvoří fundamentální systém homogenní rovnice (5) (s konstantními koeficienty).

II. Hledaní partikulárního řešení

Věta 3.4 (o uhodnutí partikulárního řešení)**.** *Nechť* (4) *je rovnice s* ***konstatními koeficienty****. Nechť*

$$f(t) = e^{\alpha t}\cdot\left(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t\right),$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *a* P, Q *jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice* (4) *ve tvaru*

$$y_p(t) = t^m e^{\alpha t}\cdot\left(R(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t\right),$$

kde R, S *jsou vhodné polynomy stupně ne většího než* $\max\{$*stupeň* P*, stupeň* $Q\}$ *a* $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *udává, jakou násobnost má číslo* $\alpha + i\beta$ *jakožto kořen charakteristického polynomu.*

Následující Lemma je základem tzv. **metody variace konstant** pro hledání partikulárního řešení lineární (nehomohenní) ODR, a to jak s konstantními tak s nekonstantními koeficienty.

Lemma 3.5. *Nechť* $y_1, \ldots, y_n$ *tvoří fundamentální systém homogenní rovnice* (5) *(****s obecně nekonstatními koeficienty****). Potom matice*

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix}
y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\
y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t)
\end{pmatrix}$$

je regulární pro každé $t \in \mathbb{R}$*.*

Věta 3.6 (variace konstant)**.** *Nechť* $y_1, \dots, y_n$ *tvoří fundamentální systém rovnice* (5) ***(s obecně nekonst. koeficienty)****,* $\mathbf{U}(t)$ *buď jako v předchozí větě. Nechť* $c_1(t), \dots, c_n(t)$ *řeší soustavu*

$$\mathbf{U}(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(t) \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t)/a_n \end{pmatrix} .$$

Pak funkce

$$y_p(t) := c_1(t)y_1(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t)$$

je (partikulární) řešení rovnice (4).

3.3 Speciální typy ODR

3.3.1 Bernoulliho rovnice

Definice. Bernoulliovou rovnicí nazýváme ODR tvaru

$$y' + a(t)y = b(t)y^\alpha , \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0, 1 , \tag{6}$$

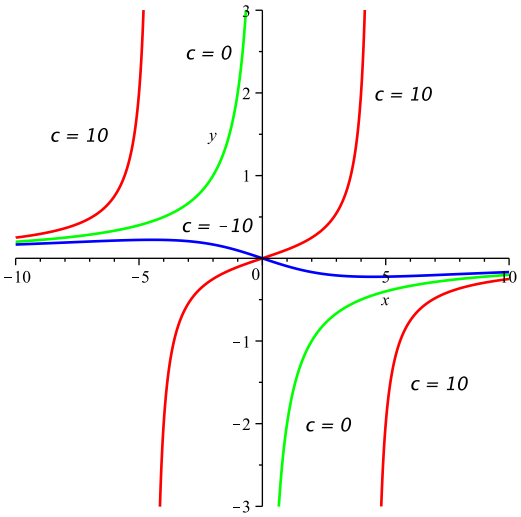
kde $a, b \in \mathcal{C}(J)$, $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval.

Návod k řešení: Pro $\alpha = 0$ nebo $\alpha = 1$ jde o lineární ODR 1. řádu. Pro jiná α zavedeme novou funkci $z = z(t)$ substitucí

$$y(t) = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} ,$$

která převede rovnici (6) na lineární ODR 1. řádu. Pozor, v případě, že α je neceločíselné, je potřeba dát pozor na definiční obor obecné mocniny y^α.

Cvičení. Řešte rovnici $y' = y^2 + \frac{y}{t}$ jako Bernoulliovu. Porovnejte s postupem z přechozího paragrafu. Prohlédněte si grafy řešení, $y(t) = \frac{2t}{2c-t^2}$, pro hodnoty $c = 10, 0, -10$.



3.3.2 Eulerova rovnice

Definice. Eulerovou rovnicí nazýváme **lineární ODR s nekonstantními koeficienty** tvaru

$$a_n t^n y^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} \cdots + a_1 t y' + a_0 y = f(t)\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,, \tag{7}$$

kde $a_0, \dots a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $f \in \mathcal{C}(J)$, $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval neobsahující nulu.

Poznámka. Pro $t = 0$ rovnice (7) **degeneruje**. Rovnici tedy uvažujeme separátně pro $t > 0$ a pro $t < 0$. **V dalších našich úvahách budeme řešit Eulerovu rovnici pouze pro $t > 0$, pro záporná t bychom postupovali obdobně.**

Poznámka. Jde o lineární rovnici (i když s nekonstantními koeficienty), pro její řešení proto platí příslušná teorie. Jde tedy o nalezení n prvkového fundamentálního systému pro homogenní rovnici (s $f = 0$), a poté o nalezení jednoho (partikulárního) řešení rovnice s pravou stranou. Pro nalezení partikulárního řešení lze použít např. metodu variace konstant. Eulerova rovnice tedy bude vyřešena, nalezneme-li její fundamentální systém.

Metoda nalezení FS Eulerovy rovnice

- Použijeme ansatz $y = t^\lambda$, který vede k tzv. charakteristickému polynomu pro Eulerovu ODR.
- Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ kořenem tohoto polynomu násobnosti p, jsou odpovídajícími prvky fundamentálního systému pro $t > 0$ funkce

$$\boxed{t^\lambda \ln^k t,} \qquad k = 0, \dots, p-1.$$

- Je-li $\alpha + i\beta$ ($\beta > 0$) kořenem tohoto polynomu násobnosti p, jsou odpovídajícími prvky fundamentálního systému funkce

$$\boxed{t^\alpha \ln^k t \cdot \cos(\beta \ln t)\,, \quad t^\alpha \ln^k t \cdot \sin(\beta \ln t),} \qquad k = 0, \dots, p-1.$$

Poznámka. Eulerovu rovnici dostaneme např. při hledání sféricky symetrických řešení Laplaceovy rovnice $\Delta u = 0$ v celém $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Je-li u sféricky symetrická, je $u(x) = w(r)$, kde $r = |x| > 0$. Funkce w pak (jak lze ukázat) splňuje Eulerovu rovnici

$$r^2 w''(r) + (n-1) r\, w'(r) = 0\,.$$

Jejím řešením (proveďte) a zpětným dosazením dostaneme ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} n = 2 \quad &\Longrightarrow \quad u(|x|) \;=\; c_1 + c_2 \ln|x|\,, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\,, \\ n > 2 \quad &\Longrightarrow \quad u(|x|) \;=\; c_1 + \frac{c_2}{|x|^{n-2}}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,. \end{aligned}$$

3.4 Řešení ODR pomocí Taylorových řad

Věta 3.7. *Uvažujme lineární rovnici n-tého řádu,*

$$a_n(t) y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t) y' + a_0(t) y = f(t) \tag{8}$$

na intervalu $J \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in J$. Dají-li se koeficienty a pravá strana rovnice (8) *rozložit do Taylorových řad na nějakém okolí $\mathcal{U}^\delta(t_0)$, přičemž $a_n(t_0) \neq 0$, lze každé řešení rovnice* (8) *rozložit na nějakém okolí $\mathcal{U}^\eta(t_0)$ do Taylorovy řady.*

Řešení: Uvážíme ansatz $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^k$, který formálně n-krát proderivujeme člen po členu a dosadíme do rovnice. Jsou-li k (8) zadány počáteční podmínky (v bodě t_0), dosadíme uvedený ansatz i do nich.

Poznámky k řešení:

- Nejsou-li koeficienty a_j a pravá strana f ve tvaru mocninné řady, je potřeba rozložit do řady i je.
- Po formálním provedení všech algebraických operací s řadami porovnáme koeficienty u stejných mocnin t.
- Tím dostaneme soustavu nekonečně mnoha rovnic pro nekonečně mnoho koeficientů a_k, $k = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jejím vyřešením nalezneme hledanou funkci $y(t)$ ve tvaru mocninné řady. Na závěr určíme poloměr konvergence této řady.
- V případě homogenní rovnice ($f \equiv 0$) můžeme různou volbou počátečních podmínek obdržet různá řešení. Jejich lineární (ne)závislost je možno ověřit např. pomocí Wronskiánu.

3.5 Soustavy ODR 1. řádu

Uvažujme soustavu (obecných) diferenciálních rovnic 1. řádu, vyřešených vzhledem k 1. derivaci, ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{9}$$

kde f_j, $j = 1, \ldots, n$, jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Vektorový tvar soustavy (9):

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t)),$$

kde $\vec{x}(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)^T$, $\vec{x}'(t) = \big(x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)\big)^T$, $\vec{f} = \big(f_1, f_2, \ldots, f_n\big)^T$.

Definice.

- **Řešením soustavy** (9) rozumíme vektorovou funkci $\vec{x} = \big(x_1, \ldots, x_n\big)^T$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují vlastní derivace $x_j'(t)$, $j = 1, \ldots, n$, a platí (9).
- **Počáteční úlohou** pro (9) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení $\vec{x}$ soustavy (9) splňující navíc předem zadanou podmínku $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^0$, kde $[t_0, \vec{x}^0]$ je daný bod z G (tzv. **počáteční podmínka**).
- **Maximální řešení** soustavy (9) je takové řešení $\vec{x}$ definované na intervalu J, které již nelze prodloužit, tj. je-li $\vec{y}$ řešení definované na intervalu I, $J \subset I$ a $\vec{y}(t) = \vec{x}(t)$ pro každé $t \in J$, pak $J = I$.

Uvažujme nyní soustavu **lineárních** diferenciálních rovnic 1. řádu ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{aligned} \tag{10}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $b_i : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, jsou spojité funkce.

Vektorový tvar lineární soustavy (10) je:

$$\vec{x}' = \mathbf{A}(t)\vec{x} + \vec{b}(t),$$

kde

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Věta 3.8 (o existenci a jednoznačnosti řešení)**.** *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Nechť $\mathbf{A} : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$, $\vec{b} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení $\vec{x}$ soustavy* (10) *splňující $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^0$. Toto řešení je definováno na celém intervalu (α, β).*

Definice. Homogenní soustavou k soustavě (10) rozumíme soustavu

$$\vec{x}' = \mathbf{A}(t)\vec{x}. \tag{11}$$

Věta 3.9. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$, $\alpha < \beta$, a $\mathbf{A} : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy* (11) *tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$. Dimenze tohoto podprostoru je rovna n. Jakoukoli bázi tohoto podprostoru, (složenou z vektorových funkcí $\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^n$), nazýváme* ***fundamentálním systémem*** *rovnice* (11).

Věta 3.10. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$, $\alpha < \beta$. Nechť $\mathbf{A} : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$, $\vec{b} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Nechť $\vec{x}_P$ je jedno (partikulární) řešení* (10) *na intervalu (α, β). Potom každé řešení $\vec{x}$ soustavy* (10) *na intervalu (α, β) má tvar $\vec{x}_P + \vec{x}_H$, kde $\vec{x}_H$ je řešení homogenní soustavy* (11).

Definice. Nechť vektorové funkce $\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^n$ tvoří fundamentální systém rovnice (11). Označme

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & \dots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & \dots & x_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Matici Φ pak nazýváme **fundamentální maticí soustavy** (11).

Lemma 3.11. *Nechť Φ je fundamentální matice soustavy* (11)*. Pak $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (\alpha, \beta)$.*

Věta 3.12 (variace konstant)**.** *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Pak maximální řešení $\vec{x}$ rovnice* (10) *s počáteční podmínkou $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^0$ má tvar*

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{x}^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\vec{b}(s)\,ds, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

kde Φ je fundamentální matice soustavy (11).

Věta 3.13 (regularita řešení lineární homogenní rovnice s konstantními koeficienty)**.** *Nechť $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}$ a vektorová funkce $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je řešením soustavy $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$. Pak $\vec{x}$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\vec{x}^{(k)}(t) = \mathbf{A}^k\vec{x}(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$.*

- **Vztah mezi soustavou rovnic 1. řádu a jednou rovnicí vyššího řádu**

  Nechť

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{12}$$

je rovnice n-tého řádu a nechť je $y(t)$ její řešení pro $t \in J \subset \mathbb{R}$.

Potom je vektorová funkce $\vec{x}(t) = \big(y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\big)$ řešením soustavy

$$\vec{x}'(t) = \vec{F}(t, \vec{x})\,, \tag{13}$$

na intervalu J, kde $F_j(t, \vec{x}) = x_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n-1$, $F_n(t, \vec{x}) = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

(A) Řešení soustav lineárních rovnic pomocí upravování

Soustavu rovnic upravujeme takovým způsobem, abychom získali jednu rovnici vyššího řádu s jednou neznámou funkcí. Tento způsob je vhodný pro soustavy s nemnoha (např. se dvěma) rovnicemi, nebo tehdy, obsahuje-li matice soustavy rovnic hodně nulových prvků (je tzv. řídká). Uvedeným způsobem je možno řešit i nehomogenní soustavy.

Příklad 1. *Najděte všechna maximální řešení soustavy*

$$\begin{aligned} y' &= 3y - 5z - 3e^t \\ z' &= y - z - e^t \end{aligned}$$

(B) Řešení soustav lineárních rovnic pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů

Věta 3.14. *Nechť matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ má n lineárně nezávislých vlastních vektorů $\vec{q}^1, \ldots \vec{q}^n$, které po řadě přísluší vlastním číslům $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Potom funkce*

$$e^{\lambda_1 t}\vec{q}^1, \ldots, e^{\lambda_n t}\vec{q}^n \tag{14}$$

tvoří fundamentální systém lineární homogenní soustavy (s konstantními koeficienty)

$$\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}.$$

Poznámka. Tvrzení předchozí věty umožní sestavit fundamentalní systém dané lineární homogenní soustavy (s konstantními koeficienty), která je reprezentována **diagonalizovatelnou** maticí $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ mající n vlastních čísel a n-tici jim odpovídajících vlastních vektorů. Případ, kdy matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ není diagonalizovatelná, lze také řešit pomocí tzv. Jordanova kanonického tvaru, kterým jsme se však v kapitole o maticích nezbývali.

Poznámka. Z tvaru řešení, které je uvedeno ve Větě 3.12, a sice, že maximální řešení $\vec{x}$ rovnice (10) s počáteční podmínkou $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^0$ má tvar

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{x}^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

plyne, že

$$\vec{x}_P(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in (\alpha, \beta), \tag{15}$$

je **partikulární řešení** (11), přičemž Φ je fundamentální matice soustavy (10).

Příklad 2. *Najděte oběma metodami (pomocí úprav i pomocí vlastních čísel a vektorů) řešení soustavy*

$$x' = x + 3y + e^t\,, \tag{16}$$
$$y' = 2x + 2y - e^t\,. \tag{17}$$

Sestavte v obou případech fundamentální matici soustavy; porovnejte jejich tvar.

Řešení.

a) Metoda postupných úprav: Pokusíme se převést systém na jednu rovnici druhého řádu pro funkci x. Derivováním rovnice (16) dostaneme $x'' = x' + 3y' + e^t$. Dosazení za y' z (17) by nebylo dobré, protože bychom se tím nezbavili funkce y. Je proto správným krokem nejprve pomocí (16) vyloučit z (17) funkci y: odečtením dvojnásobku (16) od trojnásobku (17) dostaneme $3y' - 2x' = 4x - 5e^t$. Odtud dosadíme za y' do rovnice $x'' = x' + 3y' + e^t$ a dostaneme po úpravě

$$x'' - 3x' - 4x = -4e^t\,. \tag{18}$$

Příslušnou homogenní soustavu vyřešíme metodou charakteristického polynomu, což dá pro x fundamentální systém $\{e^{-t}, e^{4t}\}$.

Partikulární řešení pro x hledáme ve tvaru ce^t, což dá $x_p = \frac{2}{3}e^t$. Z rovnice (16) pak lze vyjádřit y pomocí x a jeho derivace, což umožní y dopočítat. Celkově vyjde

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{4t} + \frac{2}{3}e^t\,, \tag{19}$$

$$y(t) = -\frac{2}{3}c_1e^{-t} + c_2e^{4t} - \frac{1}{3}e^t\,. \tag{20}$$

Fundamentální matice $\Phi(t)$ a vektor partikulárních řešení $(x_p, y_p)^T$ mají tedy tvar

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} & e^{4t} \end{pmatrix}\,, \qquad \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^t \\ -\frac{1}{3}e^t \end{pmatrix}\,, \tag{21}$$

neboť vektorový zápis (19)–(20) je

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} & e^{4t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^t \\ -\frac{1}{3}e^t \end{pmatrix}\,.$$

b) Metoda vlastních čísel a vektorů: Matice soustavy (16)–(17) je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, charakteristický polynom je tedy $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$ (porovnejte s charakterisktickým polynomem v metodě a) — proč musí být stejné?). Pro vlastní číslo $\lambda = -1$ je $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, tedy vlastním vektorem je například $\vec{v}^1 = (-3, 2)^T$. Pro vlastní číslo $\lambda = 4$ je $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, tedy vlastním vektorem je například $\vec{v}^2 = (1, 1)^T$. To dává fundamentální matici

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-t} & e^{4t} \\ 2e^{-t} & e^{4t} \end{pmatrix}\,.$$

Porovnejte tento tvar s tvarem fundamentální matice, který jsme obdrželi při aplikaci předchozí metody výpočtu. Obě matice se liší pouze konstantou, kterou je vynásoben první sloupec. To však koresponduje s našimi znalostmi: sloupce konstant ve fundamentální matici jsou (v případě různých vlastních čísel) tvořeny vlastními vektory matice $\mathbf{A}$, a ty jsou skutečně určeny až na multiplikativní konstantu.

Vektor partikulárních řešení můžeme spočíst například pomocí (15). Postupně dostáváme (počítejte podrobně)

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -e^t & e^t \\ 2e^{-4t} & 3e^{-4t} \end{pmatrix}\,,$$

tedy pro $\vec{b}(t) = (e^t, -e^t)^T$ je $\Phi^{-1}(t)\vec{b}(t) = \frac{1}{5}(-2e^{2t}, -e^{-3t})$.

Zvolíme $t_0 = 0$ a dostaneme

$$\int_0^t \Phi^{-1}(s)\vec{b}(s)\,ds = \Big(\frac{1}{5}(1 - e^{2t}), \frac{1}{15}(e^{-3t} - 1)\Big).$$

Konečně,

$$\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)\vec{b}(s)\,ds = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^t - 3e^{-t} - \frac{1}{15}e^{4t} \\ -\frac{1}{3}e^t + 2e^{-t} - \frac{1}{15}e^{4t} \end{pmatrix} .$$

Vektor na pravé straně je vektorem (nějakých) partikulárních řešení. Části, obsahující e^{-t} a e^{4t} jsou však prvky fundamentálního systému (odůvodněte), tedy je v případě hledání partikulárního řešení není nutno uvažovat. Proto je jednodušším vektorem partikulárních řešení vektor (srovnejte s (21))

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^t \\ -\frac{1}{3}e^t \end{pmatrix} .$$