2 Maticový a vektorový počet II

2.1 Úvod

Opakování z 1. ročníku

Označení. Množinu všech reálných resp. komplexních matic rozměru $m \times n$ budeme značit $\mathcal{M}^{m\times n}(\mathbb{R})$ resp. $\mathcal{M}^{m\times n}(\mathbb{C})$. Někdy budeme též používat značení $\mathcal{M}^{m\times n}(\mathbb{K})$, kde $\mathbb{K}$ bude značit buď $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Poznámka. Pro násobení matic (pokud je definováno, tj. souhlasí rozměry matic) platí:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}\,,$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \qquad \text{(obecně)}\,.$$

Pokud je $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, říkáme, že matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ **komutují**.

Poznámka. Pro sčítání a násobení matic a násobení matic skalárem $\lambda \in \mathbb{K}$ platí:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\,,$$
$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\,,$$
$$\lambda\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda\,\mathbf{A} + \lambda\,\mathbf{B}\,,$$
$$\lambda\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\lambda\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}\,,$$

pokud jsou všechny aritmetické operace definovány (tj. zejména souhlasí rozměry matic).

Poznámka.
- Připomeňte si některé základní termíny: jednotková matice $\mathbf{I}$, diagonální matice, inverzní matice ($\mathbf{A}^{-1}$), regulární matice, singulární matice, transponovaná matice ($\mathbf{A}^T$).
- ...i některé další základní termíny:
  - symetrická matice: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$
  - ortogonální matice: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$
  - hermitovsky sdružená matice: $\mathbf{A}^H := \overline{\mathbf{A}}^T$
  - hermitovská matice: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$
  - unitární matice: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$

Cvičení. Ukažte, že platí následující identity (vždy, když je násobení matic definováno alespoň na jedné straně uvažovaných rovností):

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T\,,$$
$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^H = \mathbf{B}^H\cdot\mathbf{A}^H\,,$$

a pro regulární matice $\mathbf{A},\mathbf{B}$:

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}\,.$$

Tvrzení 2.1. *Buď* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ *čtvercová matice. Potom*

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\ \textit{je regulární} &\iff \textit{sloupce } \mathbf{A} \textit{ jsou LN} \iff\\ &\iff \textit{řádky } \mathbf{A} \textit{ jsou LN} \iff\\ &\iff \mathrm{h}(\mathbf{A}) = n \iff \dim N_{\mathbf{A}} = 0 \iff\\ &\iff \det\mathbf{A} \neq 0.\end{aligned}$$

Zde $N_{\mathbf{A}} := \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n;\, \mathbf{A}\vec{x} = 0\}$, *a* $\mathrm{h}(\mathbf{A})$ *označuje hodnost matice* $\mathbf{A}$.

Pozn. Obecně pro $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ platí

$$\dim N_{\mathbf{A}} + \mathrm{h}(\mathbf{A}) = n\,.$$

Začátek 2. ročníku

Definice (Norma matice)**.** Buď $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ čtvercová matice. Pro jakoukoli normu vektoru $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ definujeme odpovídající normu matice $\mathbf{A}$ takto:

$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{\substack{\vec{x}\in\mathbb{K}^n \\ \vec{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbf{A}\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}\,. \tag{1}$$

Pozn. Zvolíme-li například eukleidovskou normu $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{j=1}^n |x_j|^2$, potom

$$\|\mathbf{A}\|^2 \le \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2.$$

Pozn. Přímo z definice normy matice plyne, že

$$\|\mathbf{A}\vec{x}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\vec{x}\| \qquad \text{pro každé} \quad \vec{x}\in\mathbb{K}^n\,.$$

Proto je

$$\|\mathbf{AB}\vec{x}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\vec{x}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\,\|\vec{x}\| \qquad \text{pro každé} \quad \vec{x}\in\mathbb{K}^n\,,$$

a tedy

$$\|\mathbf{AB}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\,.$$

Speciálně

$$\|\mathbf{A}^2\| \le \|\mathbf{A}\|^2 \quad \text{odkud plyne} \quad \|\mathbf{A}^n\| \le \|\mathbf{A}\|^n \ \forall n\in\mathbb{N}\,.$$

Věta 2.2 (O maticových řadách)**.** *Nechť mocninná řada $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ má poloměr konvergence $R>0$. Buď dále $\mathbf{A}\in\mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ matice, pro jejíž normu platí $\|\mathbf{A}\|<R$. Potom*

$$f(\mathbf{A}) := \sum_{k=0}^\infty a_k \mathbf{A}^k$$

konverguje, $f(\mathbf{A})\in\mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$. Navíc platí

$$\|f(\mathbf{A})\| \le \sum_{k=0}^\infty |a_k|\,\|\mathbf{A}\|^k\,,$$

kde číselná řada napravo konverguje.

Příklad 1.

- ***Exponenciála matice*** *je definována řadou*

$$e^{\mathbf{A}} = \exp(\mathbf{A}) := \sum_{k=0}^\infty \frac{\mathbf{A}^k}{k!}\,, \tag{2}$$

  která konverguje ***pro každou matici*** $\mathbf{A}\in\mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$.

- *Pokud matice $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$* ***komutují****, platí*

$$e^{\mathbf{A}}\cdot e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}\,.$$

- *Speciálně tedy vždy platí $e^{\mathbf{A}}\cdot e^{-\mathbf{A}} = e^{-\mathbf{A}+\mathbf{A}} = \mathbf{I}$, neboli: každá matice tvaru $e^{\mathbf{A}}$ je* ***regulární*** *(ať byla $\mathbf{A}$ jakákoli čtvercová matice), a $e^{-\mathbf{A}}$ je matice k ní inverzní.*

Příklad 2. *Ukažte: je-li $\mathbf{A}$ diagonální matice, která má na diagonále prvky $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, je $\exp(\mathbf{A})$ také diagonální matice, mající na diagonále prvky $e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_n}$.*

2.2 Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice. Řekneme, že číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastním číslem** matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$, pokud existuje **nenulový vektor** $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ takový, že

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}\,.$$

Vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ pak nazýváme **vlastním vektorem** matice $\mathbf{A}$, odpovídajícím vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{C}$.

Věta 2.3. *Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastním číslem** matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ **právě tehdy, když** je kořenem tzv. **charakteristického polynomu** matice $\mathbf{A}$,*

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,, \tag{3}$$

tj. řeší rovnici $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

(K důkazu: z tvrzení 2.1 plyne, že $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \neq 0 \iff$ rovnice $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{x} = 0$ má pouze nulové řešení.)

Poznámka.

- Každá matice má alespoň jedno vlastní číslo (důsledek základní věty algebry).
- Různé matice mohou mít stejná vlastní čísla.
- Pro pevné vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ platí: Každý násobek jeho vlastního vektoru je opět jeho vlastním vektorem. Součet dvou jeho vlastních vektorů je opět jeho vlastním vektorem.
- $\ldots \implies$ pro pevné vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je

  $$N_\lambda := \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n\,;\ \mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}\} \quad (= N_{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}})$$

  lineární podprostor $\mathbb{C}^n$. Nazýváme jej **vlastním podprostorem** matice $\mathbf{A}$, příslušným číslu λ.

Věta 2.4. *Buď $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo matice $\mathbf{A}$. Potom*

$$1 \leq \dim N_\lambda \leq m(\lambda)\,,$$

kde $m(\lambda)$ je násobnost (multiplicita) čísla λ jakožto kořene charakteristického polynomu.

Cvičení. Buď $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ reálná symetrická matice a $Q(\vec{x}) := (\mathbf{A}\vec{x}, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, odpovídající kvadratická forma. Najděte nejmenší a největší hodnotu této kvadratické formy na jednotkové sféře v $\mathbb{R}^n$. Pro jaké vektory se tyto hodnoty nabývají?

Řešení.
Jde o nalezení globálních extrémů funkce $Q(\vec{x})$ na kompaktní množině $\mathbb{S}^n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\vec{x}\|^2 = 1\}$. Použitím metody Lagrangeových multiplikátorů zjistíme, že hledáme ty hodnoty $\vec{x} \in \mathbb{S}^n$, pro které je

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\mathbf{A}\vec{x}, \vec{x}) - \lambda\frac{\partial}{\partial x_k}(\|\vec{x}\|^2 - 1) = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Tento systém rovnic je ekvivalentní vektorové rovnici $\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ (ukažte to podrobně). Hodnota $Q(\vec{x})$ v takových vektorech je pak $Q(\vec{x}) = (\mathbf{A}\vec{x}, \vec{x}) = (\lambda\vec{x}, \vec{x}) = \lambda\|\vec{x}\|^2 = \lambda$.

Rozmyslete si, že tedy platí:

- Reálná symetrická matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ má pouze reálná vlastní čísla.
- Kvadratická forma $Q(\vec{x}) := (\mathbf{A}\vec{x}, \vec{x})$ nabývá na jednotkové sféře **největší** hodnoty $\lambda_{\max}$, rovné **největšímu** vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$, a to ve vlastním vektoru, který tomuto vlastnímu číslu odpovídá.

- Kvadratická forma $Q(\vec{x})$ nabývá na jednotkové sféře **nejmenší** hodnoty $\lambda_{\min}$, rovné **nejmenšímu** vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$, a to ve vlastním vektoru, který tomuto vlastnímu číslu odpovídá.

Definice. Řekneme, že čtvercové matice stejného stupně $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ jsou si **podobné** (píšeme $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$), pokud existuje regulární matice $\mathbf{P} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ taková, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\,.$$

Poznámka.
- $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \approx \mathbf{B} \implies \mathbf{B} \approx \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}, \mathbf{B} \approx \mathbf{C} \implies \mathbf{A} \approx \mathbf{C}$

Tvrzení 2.5. *Buď $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ podobná diagonální matici, tj. nechť existují diagonální matice $\mathbf{D} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ a regulární matice $\mathbf{P} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ takové, že*

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\,.$$

Potom:

- *Diagonála matice $\mathbf{D}$ je tvořena vlastními čísly matice $\mathbf{A}$, a tedy matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{D}$ mají stejná vlastní čísla i stejný charakteristický polynom.*
- *Sloupce matice $\mathbf{P}$ jsou tvořeny vlastními vektory matice $\mathbf{A}$, uspořádanými ve stejném pořadí jako odpovídající vlastní čísla na diagonále matice $\mathbf{D}$.*

Poznámka. Pozor, první z výše uvedených tvrzení neplatí obráceně: matice, mající stejné charakteristické polynomy ještě nemusí být podobné. Například

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Ukažte to).

Tvrzení 2.6. *Vlastní vektory matice $\mathbf{A}$, které odpovídají **různým** vlastním číslům, jsou lineárně nezávislé.*

Věta 2.7. *Nechť $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ je matice stupně n. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:*

1. *$\mathbf{A}$ je podobná nějaké diagonální matici.*
2. *V $\mathbb{C}^n$ existuje báze složená pouze z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$.*
3. *Pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbf{A}$ je $\dim N_\lambda = m(\lambda)$.*

Definice. Řekneme, že $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ je **diagonalizovatelná**, pokud je podobná nějaké diagonální matici.