1 Číselné a mocninné řady

1.1 Základní pojmy

Definice. Nechť $\{a_n\} \in \mathbb{C}$ je posloupnost komplexních čísel. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme m**-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat n**-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada **konverguje**, je-li její součet konečné číslo. V jiném případě řekneme, že řada **diverguje**.

Věta 1.1 (nutná podmínka konvergence řady)**.** *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak* $\lim a_n = 0$.

Poznámka. Právě uvedená nutná podmínka konvergence se používá především ve tvaru "Jestliže $\lim a_n \neq 0$ nebo $\lim a_n$ neexistuje, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje."

Věta 1.2. *(i) Nechť* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ *konverguje. V tom případě platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.$$

(ii) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou konvergentní řady. Potom* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *konverguje, a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,.$$

1.2 Kritéria konvergence

Věta 1.3 (srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Dále nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady splňující* $0 \leq a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

(i) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(ii) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergentní.*

Věta 1.4 (limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a* $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = c \in \mathbb{R}^\star$.

(i) Nechť $c \in (0, \infty)$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když konverguje* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) Nechť $c = 0$. *Pak konverguje-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *konverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(iii) Nechť $c = \infty$. *Pak konverguje-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *konverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 1.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) Existuje-li $q \in (0, 1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \ \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iii) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, *pak neplatí* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

Věta 1.6 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s* ***kladnými*** *členy.*

(i) Existuje-li $q \in (0,1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iii) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *pak neplatí* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

Věta 1.7 (integrální kritérium)**.** *Nechť* f *je nezáporná, nerostoucí a spojitá na* $\langle n_0, +\infty)$, *kde* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Nechť pro posloupnost reálných čísel* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *platí* $a_n = f(n)$ *pro* $n \geq n_0$. *Pak*

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

Věta 1.8. *Nechť* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *konverguje právě tehdy, když* $\alpha > 1$.

Věta 1.9 (Raabeovo kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

(i) Je-li $\lim n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(ii) Je-li $\lim n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

Věta 1.10. *Je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.*

1.3 Neabsolutní konvergence

Věta 1.11 (Abel-Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je omezená monotónní posloupnost. Jestliže je splněna některá z následujících podmínek, pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konvergentní.*

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní,*

(D) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má omezenou posloupnost částečných součtů.*

Věta 1.12 (Leibniz)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost splňující*

- $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n \geq 0$,
- $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n \geq a_{n+1}$,
- $\lim a_n = 0$.

Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *konvergentní.*

1.4 Přerovnávání řad

Definice. Nechť $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. **Přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$.

Věta 1.13. *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolutně konvergentní řada a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ *je její přerovnání. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ *je absolutně konvergentní a má stejný součet jako* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1.5 Součin řad

Definice. Cauchyovým součinem řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ budeme rozumět řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \right).$$

Věta 1.14 (Mertens)**.** *Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konvergují, přičemž **alespoň jedna z nich konverguje absolutně**. Potom*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right).$$

Věta 1.15 (Abel)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, takové, že i jejich Cauchyův součin konverguje. Pak platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right).$$

Shrnutí

Vztah absolutni konvergence a konvergence

$a_n \geq 0$	AK $\iff$ K
$a_n \in \mathbb{C}$	AK $\implies$ K

Aritmetické operace s řadami

operace	stačí, když
násobek konstantou	řada konverguje
asociativita (uzávorkování)	řada konverguje
součet, rozdíl	obě řady konvergují
přerovnání (komutativita)	řada konverguje absolutně
násobení dvou řad	obě řady konvergují, alespoň jedna z nich absolutně

1.6 Mocninné řady

Definice. Mocninnou řadou o středu $z_0 \in \mathbb{C}$ rozumíme řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, kde $z \in \mathbb{C}$ a $a_k \in \mathbb{C}$ pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Věta 1.16. *Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ je mocninná řada. Pak existuje nezáporný prvek $R \in \mathbb{R}^*$ takový, že*

- *pro každé $z \in \mathbb{C}$, $|z - z_0| < R$, uvedená řada konverguje absolutně,*
- *pro každé $z \in \mathbb{C}$, $|z - z_0| > R$, uvedená řada diverguje.*

Platí

$$R = \frac{1}{\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

pokud limita ve jmenovateli zlomku vpravo existuje. Výrazu $1/0$ zde přiřazujeme hodnotu $R = +\infty$ a výrazu $1/\infty$ přiřazujeme hodnotu $R = 0$.

Poznámka. Platí také

$$R = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|},$$

pokud limita ve jmenovateli zlomku vpravo existuje. Výrazu $1/0$ zde opět přiřazujeme hodnotu $R = +\infty$ a výrazu $1/\infty$ přiřazujeme hodnotu $R = 0$.

Definice. Prvek R z předchozí věty nazýváme **poloměrem konvergence** řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$. Kruh v komplexní rovině $K_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C};\, |z - z_0| < R\}$ nazýváme **kruhem konvergence**, a kružnici $K_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C};\, |z - z_0| = R\}$ nazýváme **konvergenční kružnicí** dané řady.

Poznámka.

V dalším textu budeme používat pojem derivace komplexní funkce konplexní proměnné, který je definován formálně zcela stejně jako pojem derivace reálné funkce reálné proměnné.

Tedy, řekneme, že $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má derivaci v bodě $z \in \mathbb{C}$, pokud existuje limita

$$f'(z) := \lim_{w\to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \in \mathbb{C}\,.$$

Na rozdíl od reálných funkcí nedefinujeme v tomto případě pojem nevlastní limity (derivace), ani pojmy jednostranná limita (derivace).

Věta 1.17. *Nechť $R > 0$ je poloměrem konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Definujme*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \qquad |z - z_0| < R.$$

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$ konverguje pro $|z - z_0| < R$ a platí

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}, \qquad |z - z_0| < R.$$

Věta 1.18. *Nechť f je jako ve Větě 1.17. Potom má f derivace všech řádů pro $z \in \mathbb{C}$, $|z - z_0| < R$, a platí:*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n(z - z_0)^{n-k}.$$

Speciálně platí $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$.

Poznámka.

Mocninnou řadu lze tedy uvnitř kruhu konvergence libovolněkrát derivovat (a integrovat) člen po členu, aniž se změní poloměr konvergence. Stejně tak lze provádět uvnitř kruhu konvergence všechny výše sepsané aritmetické operace, včetně přerovnání řady.

Věta 1.19 (Abel)**.** *Nechť f je jako ve Větě 1.17 a nechť **číselná řada** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ **konverguje** pro nějaké $z \in \mathbb{C}$, ležící na konvergenční kružnici, tedy pro $z = z_0 + Re^{i\varphi}$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. Potom existuje vlastní limita $\lim_{r\to R-} f(z_0 + re^{i\varphi})$ a platí:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n e^{in\varphi} = \lim_{r\to R-} f(z_0 + re^{i\varphi})\,.$$

Speciálně, pokud konverguje číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$, je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x\to R-} f(x)$, a podobně je $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n R^n = \lim_{x\to -R+} f(x)$ za předpokladu, že číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n R^n$ konverguje.

Příklady: Některá z použití teorie číselných a mocninných řad:

- Rozvíjení funkcí do Taylorových řad pomocí integrovaní řady ($\ln(1 + x)$, $\operatorname{arctg} x$).
- Sčítání některých číselných (i mocninných) řad ($\ln 2$, $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1$).
- Hledání řešení ODR ve tvaru řady.