# Aplikovaná matematika III (NMAF073)

**Mirko Rokyta (KMA MFF UK)**

# ZS 2019/20

**1 Číselné a mocninné řady** **1**
1.1 Základní pojmy 1
1.2 Kritéria konvergence 1
1.3 Neabsolutní konvergence 2
1.4 Přerovnávání řad 2
1.5 Součin řad 3
1.6 Mocninné řady 3

**2 Maticový a vektorový počet II** **5**
2.1 Úvod 5
2.2 Vlastní čísla a vlastní vektory 7

**3 Obyčejné diferenciální rovnice a jejich soustavy** **9**
3.1 Úvod - opakování 9
3.2 Lineární DR *n*-tého řádu s (ne)konstantními koeficienty 9
3.3 Speciální typy ODR 12
3.3.1 Bernoulliho rovnice 12
3.3.2 Eulerova rovnice 13
3.4 Řešení ODR pomocí Taylorových řad 13
3.5 Soustavy ODR 1. řádu 14

**4 Křivkový integrál** **19**
4.1 Křivky a jejich parametrizace 19
4.2 Křivkový integrál 1. a 2. druhu 20
4.3 Křivkový integrál a potenciál vektorového pole 21

**5 Plošný integrál** **23**
5.1 Plošný integrál 1. druhu v $\mathbf{R}^3$ 23
5.2 Plošný integrál 2. druhu v $\mathbf{R}^3$ 24

**6 Věty Gauss-Ostrogradského, Greenova a Stokesova věta** **26**
6.1 Úvod 26
6.2 Gauss-Greenovy-Ostrogradského vzorce 26
6.3 Greenova a Stokesova věta 28

Tento učební text vznikl jako doplněk k přednášce Aplikovaná matematika III (NMAF073), kterou jsem v zimním semestru akademického roku 2019/20 vedl na MFF UK a je rozšířením a úpravou textu, který vznikl v letech 2010/11, 2013/14 a 2017/2018, kdy jsem tuto přednášku také měl. Text rozhodně **není** úplným záznamem přednášky, obsahuje pouze definice a znění všech vět a tvrzení a některé příklady a poznámky. Neobsahuje komentáře, podrobnější poznámky a příklady a také důkazy vět a tvrzení, apod. Text rovněž neprošel podrobným korekturním čtením, proto je možné, že obsahuje překlepy či chyby. Upozornění na jakýkoli nedostatek bude vítáno na adrese rokyta@karlin.mff.cuni.cz

Text je možno nalézt v elektronické podobně na http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/

©M. Rokyta, 2011-2020

# 1 Číselné a mocninné řady

## 1.1 Základní pojmy

**Definice.** Nechť $\{a_n\} \in \mathbb{C}$ je posloupnost komplexních čísel. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo $s_m$ nazveme $m$**-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek $a_n$ budeme nazývat $n$**-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada **konverguje**, je-li její součet konečné číslo. V jiném případě řekneme, že řada **diverguje**.

**Věta 1.1** (nutná podmínka konvergence řady)**.** *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak* $\lim a_n = 0$.

*Poznámka.* Právě uvedená nutná podmínka konvergence se používá především ve tvaru "Jestliže $\lim a_n \neq 0$ nebo $\lim a_n$ neexistuje, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje."

**Věta 1.2.** *(i) Nechť* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ *konverguje. V tom případě platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.$$

*(ii) Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou konvergentní řady. Potom* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *konverguje, a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,.$$

## 1.2 Kritéria konvergence

**Věta 1.3** (srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Dále nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady splňující* $0 \leq a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

*(i) Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

*(ii) Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergentní.*

**Věta 1.4** (limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a* $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = c \in \mathbb{R}^\star$.

*(i) Nechť* $c \in (0, \infty)$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když konverguje* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

*(ii) Nechť* $c = 0$. *Pak konverguje-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *konverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

*(iii) Nechť* $c = \infty$. *Pak konverguje-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *konverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

**Věta 1.5** (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Potom platí:*

*(i) Existuje-li* $q \in (0, 1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \ \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

*potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

*(ii) Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

*(iii) Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, *pak neplatí* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

**Věta 1.6** (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s* ***kladnými*** *členy.*

*(i) Existuje-li* $q \in (0,1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

*potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

*(ii) Je-li* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

*(iii) Je-li* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *pak neplatí* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

**Věta 1.7** (integrální kritérium)**.** *Nechť* $f$ *je nezáporná, nerostoucí a spojitá na* $\langle n_0, +\infty)$, *kde* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Nechť pro posloupnost reálných čísel* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *platí* $a_n = f(n)$ *pro* $n \geq n_0$. *Pak*

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

**Věta 1.8.** *Nechť* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *konverguje právě tehdy, když* $\alpha > 1$.

**Věta 1.9** (Raabeovo kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

*(i) Je-li* $\lim n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

*(ii) Je-li* $\lim n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

**Definice.** Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

**Věta 1.10.** *Je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.*

## 1.3 Neabsolutní konvergence

**Věta 1.11** (Abel-Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost a* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je omezená monotónní posloupnost. Jestliže je splněna některá z následujících podmínek, pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konvergentní.*

*(A)* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní,*

*(D)* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má omezenou posloupnost částečných součtů.*

**Věta 1.12** (Leibniz)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost splňující*

- $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n \geq 0$,
- $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n \geq a_{n+1}$,
- $\lim a_n = 0$.

*Potom je řada* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *konvergentní.*

## 1.4 Přerovnávání řad

**Definice.** Nechť $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. **Přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$.

**Věta 1.13.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolutně konvergentní řada a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ *je její přerovnání. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ *je absolutně konvergentní a má stejný součet jako* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

## 1.5 Součin řad

**Definice. Cauchyovým součinem** řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ budeme rozumět řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \right).$$

**Věta 1.14** (Mertens)**.** *Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konvergují, přičemž **alespoň jedna z nich konverguje absolutně**. Potom*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \right) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} b_m \right).$$

**Věta 1.15** (Abel)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, takové, že i jejich Cauchyův součin konverguje. Pak platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i \right) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} b_m \right).$$

**Shrnutí**

**Vztah absolutni konvergence a konvergence**

| | |
|---|---|
| $a_n \geq 0$ | AK $\iff$ K |
| $a_n \in \mathbb{C}$ | AK $\implies$ K |

**Aritmetické operace s řadami**

| operace | stačí, když |
|---|---|
| násobek konstantou | řada konverguje |
| asociativita (uzávorkování) | řada konverguje |
| součet, rozdíl | obě řady konvergují |
| přerovnání (komutativita) | řada konverguje absolutně |
| násobení dvou řad | obě řady konvergují, alespoň jedna z nich absolutně |

## 1.6 Mocninné řady

**Definice. Mocninnou řadou o středu** $z_0 \in \mathbb{C}$ rozumíme řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, kde $z \in \mathbb{C}$ a $a_k \in \mathbb{C}$ pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

**Věta 1.16.** *Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ je mocninná řada. Pak existuje nezáporný prvek $R \in \mathbb{R}^*$ takový, že*

- *pro každé $z \in \mathbb{C}$, $|z - z_0| < R$, uvedená řada konverguje absolutně,*
- *pro každé $z \in \mathbb{C}$, $|z - z_0| > R$, uvedená řada diverguje.*

*Platí*

$$R = \frac{1}{\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

*pokud limita ve jmenovateli zlomku vpravo existuje. Výrazu $1/0$ zde přiřazujeme hodnotu $R = +\infty$ a výrazu $1/\infty$ přiřazujeme hodnotu $R = 0$.*

**Poznámka.** Platí také

$$R = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|},$$

pokud limita ve jmenovateli zlomku vpravo existuje. Výrazu $1/0$ zde opět přiřazujeme hodnotu $R = +\infty$ a výrazu $1/\infty$ přiřazujeme hodnotu $R = 0$.

**Definice.** Prvek $R$ z předchozí věty nazýváme **poloměrem konvergence** řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$. Kruh v komplexní rovině $K_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C};\, |z - z_0| < R\}$ nazýváme **kruhem konvergence**, a kružnici $K_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C};\, |z - z_0| = R\}$ nazýváme **konvergenční kružnicí** dané řady.

**Poznámka.**

V dalším textu budeme používat pojem derivace komplexní funkce konplexní proměnné, který je definován formálně zcela stejně jako pojem derivace reálné funkce reálné proměnné.

Tedy, řekneme, že $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má derivaci v bodě $z \in \mathbb{C}$, pokud existuje limita

$$f'(z) := \lim_{w\to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \in \mathbb{C}\,.$$

Na rozdíl od reálných funkcí nedefinujeme v tomto případě pojem nevlastní limity (derivace), ani pojmy jednostranná limita (derivace).

**Věta 1.17.** *Nechť $R > 0$ je poloměrem konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Definujme*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \qquad |z - z_0| < R.$$

*Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$ konverguje pro $|z - z_0| < R$ a platí*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}, \qquad |z - z_0| < R.$$

**Věta 1.18.** *Nechť $f$ je jako ve Větě 1.17. Potom má $f$ derivace všech řádů pro $z \in \mathbb{C}$, $|z - z_0| < R$, a platí:*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n(z - z_0)^{n-k}.$$

*Speciálně platí $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$.*

**Poznámka.**

Mocninnou řadu lze tedy uvnitř kruhu konvergence libovolněkrát derivovat (a integrovat) člen po členu, aniž se změní poloměr konvergence. Stejně tak lze provádět uvnitř kruhu konvergence všechny výše sepsané aritmetické operace, včetně přerovnání řady.

**Věta 1.19** (Abel)**.** *Nechť $f$ je jako ve Větě 1.17 a nechť **číselná řada** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ **konverguje** pro nějaké $z \in \mathbb{C}$, ležící na konvergenční kružnici, tedy pro $z = z_0 + Re^{i\varphi}$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$. Potom existuje vlastní limita $\lim_{r\to R-} f(z_0 + re^{i\varphi})$ a platí:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n e^{in\varphi} = \lim_{r\to R-} f(z_0 + re^{i\varphi})\,.$$

*Speciálně, pokud konverguje číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$, je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x\to R-} f(x)$, a podobně je $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n R^n = \lim_{x\to -R+} f(x)$ za předpokladu, že číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n R^n$ konverguje.*

**Příklady: Některá z použití teorie číselných a mocninných řad:**

- Rozvíjení funkcí do Taylorových řad pomocí integrovaní řady ($\ln(1 + x)$, $\operatorname{arctg} x$).
- Sčítání některých číselných (i mocninných) řad ($\ln 2$, $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1$).
- Hledání řešení ODR ve tvaru řady.

# 2 Maticový a vektorový počet II

## 2.1 Úvod

**Opakování z 1. ročníku**

**Označení.** Množinu všech reálných resp. komplexních matic rozměru $m \times n$ budeme značit $\mathcal{M}^{m\times n}(\mathbb{R})$ resp. $\mathcal{M}^{m\times n}(\mathbb{C})$. Někdy budeme též používat značení $\mathcal{M}^{m\times n}(\mathbb{K})$, kde $\mathbb{K}$ bude značit buď $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

*Poznámka.* Pro násobení matic (pokud je definováno, tj. souhlasí rozměry matic) platí:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}\,,$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \qquad \text{(obecně)}\,.$$

Pokud je $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, říkáme, že matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ **komutují**.

*Poznámka.* Pro sčítání a násobení matic a násobení matic skalárem $\lambda \in \mathbb{K}$ platí:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\,,$$
$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\,,$$
$$\lambda\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda\,\mathbf{A} + \lambda\,\mathbf{B}\,,$$
$$\lambda\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\lambda\,\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}\,,$$

pokud jsou všechny aritmetické operace definovány (tj. zejména souhlasí rozměry matic).

*Poznámka.*
- Připomeňte si některé základní termíny: jednotková matice $\mathbf{I}$, diagonální matice, inverzní matice ($\mathbf{A}^{-1}$), regulární matice, singulární matice, transponovaná matice ($\mathbf{A}^T$).
- ...i některé další základní termíny:
  - symetrická matice: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$
  - ortogonální matice: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$
  - hermitovsky sdružená matice: $\mathbf{A}^H := \overline{\mathbf{A}}^T$
  - hermitovská matice: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$
  - unitární matice: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$

**Cvičení.** Ukažte, že platí následující identity (vždy, když je násobení matic definováno alespoň na jedné straně uvažovaných rovností):

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T\,,$$
$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^H = \mathbf{B}^H\cdot\mathbf{A}^H\,,$$

a pro regulární matice $\mathbf{A},\mathbf{B}$:

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}\,.$$

**Tvrzení 2.1.** *Buď* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ *čtvercová matice. Potom*

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\ \textit{je regulární} &\iff \textit{sloupce } \mathbf{A} \textit{ jsou LN} \iff\\ &\iff \textit{řádky } \mathbf{A} \textit{ jsou LN} \iff\\ &\iff \mathrm{h}(\mathbf{A}) = n \iff \dim N_{\mathbf{A}} = 0 \iff\\ &\iff \det\mathbf{A} \neq 0.\end{aligned}$$

*Zde* $N_{\mathbf{A}} := \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n;\, \mathbf{A}\vec{x} = 0\}$, *a* $\mathrm{h}(\mathbf{A})$ *označuje hodnost matice* $\mathbf{A}$.

**Pozn.** Obecně pro $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ platí

$$\dim N_{\mathbf{A}} + \mathrm{h}(\mathbf{A}) = n\,.$$

**Začátek 2. ročníku**

**Definice** (Norma matice)**.** Buď $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ čtvercová matice. Pro jakoukoli normu vektoru $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ definujeme odpovídající normu matice $\mathbf{A}$ takto:

$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{\substack{\vec{x}\in\mathbb{K}^n \\ \vec{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbf{A}\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}\,. \tag{1}$$

**Pozn.** Zvolíme-li například eukleidovskou normu $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{j=1}^n |x_j|^2$, potom

$$\|\mathbf{A}\|^2 \le \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2.$$

**Pozn.** Přímo z definice normy matice plyne, že

$$\|\mathbf{A}\vec{x}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\vec{x}\| \qquad \text{pro každé} \quad \vec{x}\in\mathbb{K}^n\,.$$

Proto je

$$\|\mathbf{AB}\vec{x}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\vec{x}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\,\|\vec{x}\| \qquad \text{pro každé} \quad \vec{x}\in\mathbb{K}^n\,,$$

a tedy

$$\|\mathbf{AB}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\,.$$

Speciálně

$$\|\mathbf{A}^2\| \le \|\mathbf{A}\|^2 \quad \text{odkud plyne} \quad \|\mathbf{A}^n\| \le \|\mathbf{A}\|^n \ \forall n\in\mathbb{N}\,.$$

**Věta 2.2** (O maticových řadách)**.** *Nechť mocninná řada $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ má poloměr konvergence $R>0$. Buď dále $\mathbf{A}\in\mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ matice, pro jejíž normu platí $\|\mathbf{A}\|<R$. Potom*

$$f(\mathbf{A}) := \sum_{k=0}^\infty a_k \mathbf{A}^k$$

*konverguje, $f(\mathbf{A})\in\mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$. Navíc platí*

$$\|f(\mathbf{A})\| \le \sum_{k=0}^\infty |a_k|\,\|\mathbf{A}\|^k\,,$$

*kde číselná řada napravo konverguje.*

**Příklad 1.**

- ***Exponenciála matice*** *je definována řadou*

$$e^{\mathbf{A}} = \exp(\mathbf{A}) := \sum_{k=0}^\infty \frac{\mathbf{A}^k}{k!}\,, \tag{2}$$

  *která konverguje* ***pro každou matici*** $\mathbf{A}\in\mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$.

- *Pokud matice $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$* ***komutují****, platí*

$$e^{\mathbf{A}}\cdot e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}\,.$$

- *Speciálně tedy vždy platí $e^{\mathbf{A}}\cdot e^{-\mathbf{A}} = e^{-\mathbf{A}+\mathbf{A}} = \mathbf{I}$, neboli: každá matice tvaru $e^{\mathbf{A}}$ je* ***regulární*** *(ať byla $\mathbf{A}$ jakákoli čtvercová matice), a $e^{-\mathbf{A}}$ je matice k ní inverzní.*

**Příklad 2.** *Ukažte: je-li $\mathbf{A}$ diagonální matice, která má na diagonále prvky $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, je $\exp(\mathbf{A})$ také diagonální matice, mající na diagonále prvky $e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_n}$.*

## 2.2 Vlastní čísla a vlastní vektory

**Definice.** Řekneme, že číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastním číslem** matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$, pokud existuje **nenulový vektor** $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ takový, že

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}\,.$$

Vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ pak nazýváme **vlastním vektorem** matice $\mathbf{A}$, odpovídajícím vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{C}$.

**Věta 2.3.** *Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastním číslem** matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ **právě tehdy, když** je kořenem tzv. **charakteristického polynomu** matice $\mathbf{A}$,*

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,, \tag{3}$$

*tj. řeší rovnici* $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

(K důkazu: z tvrzení 2.1 plyne, že $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \neq 0 \iff$ rovnice $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{x} = 0$ má pouze nulové řešení.)

*Poznámka.*

- Každá matice má alespoň jedno vlastní číslo (důsledek základní věty algebry).
- Různé matice mohou mít stejná vlastní čísla.
- Pro pevné vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ platí: Každý násobek jeho vlastního vektoru je opět jeho vlastním vektorem. Součet dvou jeho vlastních vektorů je opět jeho vlastním vektorem.
- $\ldots \implies$ pro pevné vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je

  $$N_\lambda := \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n\,;\ \mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}\} \quad (= N_{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}})$$

  lineární podprostor $\mathbb{C}^n$. Nazýváme jej **vlastním podprostorem** matice $\mathbf{A}$, příslušným číslu $\lambda$.

**Věta 2.4.** *Buď $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo matice $\mathbf{A}$. Potom*

$$1 \leq \dim N_\lambda \leq m(\lambda)\,,$$

*kde $m(\lambda)$ je násobnost (multiplicita) čísla $\lambda$ jakožto kořene charakteristického polynomu.*

**Cvičení.** Buď $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ reálná symetrická matice a $Q(\vec{x}) := (\mathbf{A}\vec{x}, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, odpovídající kvadratická forma. Najděte nejmenší a největší hodnotu této kvadratické formy na jednotkové sféře v $\mathbb{R}^n$. Pro jaké vektory se tyto hodnoty nabývají?

**Řešení.**
Jde o nalezení globálních extrémů funkce $Q(\vec{x})$ na kompaktní množině $\mathbb{S}^n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\vec{x}\|^2 = 1\}$. Použitím metody Lagrangeových multiplikátorů zjistíme, že hledáme ty hodnoty $\vec{x} \in \mathbb{S}^n$, pro které je

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\mathbf{A}\vec{x}, \vec{x}) - \lambda\frac{\partial}{\partial x_k}(\|\vec{x}\|^2 - 1) = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Tento systém rovnic je ekvivalentní vektorové rovnici $\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ (ukažte to podrobně). Hodnota $Q(\vec{x})$ v takových vektorech je pak $Q(\vec{x}) = (\mathbf{A}\vec{x}, \vec{x}) = (\lambda\vec{x}, \vec{x}) = \lambda\|\vec{x}\|^2 = \lambda$.

Rozmyslete si, že tedy platí:

- Reálná symetrická matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ má pouze reálná vlastní čísla.
- Kvadratická forma $Q(\vec{x}) := (\mathbf{A}\vec{x}, \vec{x})$ nabývá na jednotkové sféře **největší** hodnoty $\lambda_{\max}$, rovné **největšímu** vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$, a to ve vlastním vektoru, který tomuto vlastnímu číslu odpovídá.

- Kvadratická forma $Q(\vec{x})$ nabývá na jednotkové sféře **nejmenší** hodnoty $\lambda_{\min}$, rovné **nejmenšímu** vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$, a to ve vlastním vektoru, který tomuto vlastnímu číslu odpovídá.

**Definice.** Řekneme, že čtvercové matice stejného stupně $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ jsou si **podobné** (píšeme $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$), pokud existuje regulární matice $\mathbf{P} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ taková, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\,.$$

*Poznámka.*
- $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \approx \mathbf{B} \implies \mathbf{B} \approx \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}, \mathbf{B} \approx \mathbf{C} \implies \mathbf{A} \approx \mathbf{C}$

**Tvrzení 2.5.** *Buď $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ podobná diagonální matici, tj. nechť existují diagonální matice $\mathbf{D} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ a regulární matice $\mathbf{P} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ takové, že*

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\,.$$

*Potom:*

- *Diagonála matice $\mathbf{D}$ je tvořena vlastními čísly matice $\mathbf{A}$, a tedy matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{D}$ mají stejná vlastní čísla i stejný charakteristický polynom.*
- *Sloupce matice $\mathbf{P}$ jsou tvořeny vlastními vektory matice $\mathbf{A}$, uspořádanými ve stejném pořadí jako odpovídající vlastní čísla na diagonále matice $\mathbf{D}$.*

*Poznámka.* Pozor, první z výše uvedených tvrzení neplatí obráceně: matice, mající stejné charakteristické polynomy ještě nemusí být podobné. Například

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Ukažte to).

**Tvrzení 2.6.** *Vlastní vektory matice $\mathbf{A}$, které odpovídají **různým** vlastním číslům, jsou lineárně nezávislé.*

**Věta 2.7.** *Nechť $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ je matice stupně $n$. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:*

1. *$\mathbf{A}$ je podobná nějaké diagonální matici.*
2. *V $\mathbb{C}^n$ existuje báze složená pouze z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$.*
3. *Pro každé vlastní číslo $\lambda$ matice $\mathbf{A}$ je $\dim N_\lambda = m(\lambda)$.*

**Definice.** Řekneme, že $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{K})$ je **diagonalizovatelná**, pokud je podobná nějaké diagonální matici.

# 3 Obyčejné diferenciální rovnice a jejich soustavy

## 3.1 Úvod - opakování

**Opakování z 1. ročníku**

**Definice. Rovnice se separovanými proměnnými** je rovnice tvaru

$$y' = g(y) \cdot h(t). \tag{1}$$

**Návod k řešení:**

- Pokud $g(c) = 0$, je funkce $y(t) = c$ řešením rovnice.
- Na intervalech, kde $g(y) \neq 0$ uvažte $\frac{y'}{g(y)} = h(t)$ s následným $\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)\,\mathrm{d}t$.
- Nutná je diskuse o možnostech navazování řešení předchozích dvou typů!

**Definice. Lineární ODR prvního řádu** je rovnice tvaru

$$y' + p(t)y = q(t), \tag{2}$$

kde $p, q$ jsou spojité funkce na daném intervalu $(a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$.

**Návod k řešení:**

- Násobte rovnici výrazem $e^{P(t)}$, kde $P$ je primitivní funkce k $p$ na $(a, b)$.
- Upravte na levé straně do tvaru derivace součinu.
- Integrujte.

**Definice. Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty** je rovnice tvaru

$$Ay'' + By' + Cy = f(t), \tag{3}$$

kde $A$, $B$, $C \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, a funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu $(a, b)$. Pokud je $f$ identicky nulová na $(a, b)$, nazýváme rovnici (3) **homogenní**.

**Případ I:**

$f \equiv 0$, rovnice: $Ay'' + By' + Cy = 0$, obecné řešení $y_h$

Pokud **charakteristická** rovnice $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ má:

1. dva různé reálné kořeny $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

2. jeden dvojnásobný reálný kořen $\lambda$:

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

3. dva komplexně sdružené kořeny $\alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$:

$$y_h(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

**Případ II:**

$f \not\equiv 0$, rovnice: $Ay'' + By' + Cy = f(t)$

Pro řešení $y(t)$ platí:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

kde $y_h(t)$ je obecné řešení homogenní rovnice (viz předchozí případ) a $y_p(t)$ je **jedno** (jakékoliv), tzv. **partikulární** řešení rovnice $Ay'' + By' + Cy = f(t)$.

Některá partikulární řešení lze "uhodnout" podle tvaru pravé strany.

- Je-li $f(t) = P(t)e^{\alpha t}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a $P$ je polynom, potom existuje polynom $Q$, st $Q =$ st $P$, že
  1. $\alpha \neq \lambda_1, \alpha \neq \lambda_2 \implies y_p(t) = Q(t)e^{\alpha t}$,
  2. $\alpha \neq \lambda_1, \alpha = \lambda_2 \implies y_p(t) = tQ(t)e^{\alpha t}$,
  3. $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \implies y_p(t) = t^2Q(t)e^{\alpha t}$.
- Je-li $f(t) = e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + R(t)\sin\beta t)$, ($P$, $R$ polynomy), existují polynomy $Q, S$, stupně nejvýše $\max(\text{st } P, \text{st } R)$, takové, že
  1. $\alpha + i\beta \neq \lambda_1, \alpha + i\beta \neq \lambda_2 \implies y_p(t) = e^{\alpha t}(Q(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t)$,
  2. $\alpha + i\beta = \lambda_1, \alpha + i\beta \neq \lambda_2 \implies y_p(t) = te^{\alpha t}(Q(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t)$.

**Konec opakování.**

## 3.2 Lineární DR $n$-tého řádu s (ne)konstantními koeficienty

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t), \tag{4}$$

kde $a_0, \ldots, a_n$ a $f$ jsou funkce spojité na daném intervalu $(a, b)$, $a_n(t) \neq 0$ pro $t \in (a, b)$ (**lineární diferenciální rovnice $n$-tého řádu s nekonstantními koeficienty**). Jsou-li **všechny** funkce $a_0, \ldots, a_n$ konstantní na intervalu $(a, b)$, jde o **lineární diferenciální rovnici $n$-tého řádu s konstantními koeficienty**, ($f(t)$ nemusí být konstantní).

**Homogenní rovnicí** k rovnici (4) rozumíme rovnici

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \tag{5}$$

**Věta 3.1.** *Nechť $t_0 \in (a, b)$ a $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení $y$ rovnice* (4) *resp.* (5)*, které splňuje tzv.* ***počáteční podmínky***

$$y(t_0) = z_0,\ y'(t_0) = z_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

*Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu $(a, b)$.*

**Věta 3.2** (o struktuře všech řešení)**.**

(i) *Maximální řešení rovnice* (5) *jsou definována na celém $\mathbb{R}$ a tvoří vektorový podprostor prostoru $C^n(a, b)$ dimenze $n$. Jeho jakoukoli bázi nazýváme* ***fundamentálním systémem*** *rovnice* (5).

(ii) *Nechť $y_p$ je maximální řešení rovnice* (4)*. Pak funkce $y$ je jejím maximálním řešením, právě když ji lze zapsat ve tvaru $y = y_p + y_h$, kde $y_h$ je vhodné řešení rovnice* (5).

**I. Hledání fundamentálního systému**

Pro rovnici (5) s konstantními koeficienty lze použít tzv. **metodu charakteristického polynomu.** Pro rovnici (5), kde alespoň jeden z koeficientů je nekonstatní, nelze obecně explicite najít její fundamentální systém. (V některých speciálních případech to lze, jak uvidíme později) .

**Definice.** Nechť jsou koeficienty homogenní rovnice (5) konstantní. **Charakteristickým polynomem** rovnice (5) rozumíme polynom

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

**Věta 3.3.** *Nechť jsou koeficienty homogenní rovnice* (5) *konstantní. Nechť* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu* $P$*, s násobnostmi* $r_1, \ldots, r_s$*. Nechť* $\alpha_1 + \beta_1 i, \ldots, \alpha_\ell + \beta_\ell i$ *jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu* $P$*, s kladnou imaginární částí a násobnostmi* $q_1, \ldots, q_\ell$*.*

Pak funkce

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \ldots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & & & \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \ldots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \ldots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \ldots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & & & \\
e^{\alpha_\ell t}\cos\beta_\ell t, & te^{\alpha_\ell t}\cos\beta_\ell t, & \ldots & t^{q_\ell-1}e^{\alpha_\ell t}\cos\beta_\ell t, \\
e^{\alpha_\ell t}\sin\beta_\ell t, & te^{\alpha_\ell t}\sin\beta_\ell t, & \ldots & t^{q_\ell-1}e^{\alpha_\ell t}\sin\beta_\ell t
\end{array}$$

tvoří fundamentální systém homogenní rovnice (5) (s konstantními koeficienty).

**II. Hledaní partikulárního řešení**

**Věta 3.4** (o uhodnutí partikulárního řešení)**.** *Nechť* (4) *je rovnice s* ***konstatními koeficienty****. Nechť*

$$f(t) = e^{\alpha t}\cdot\left(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t\right),$$

*kde* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *a* $P, Q$ *jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice* (4) *ve tvaru*

$$y_p(t) = t^m e^{\alpha t}\cdot\left(R(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t\right),$$

*kde* $R, S$ *jsou vhodné polynomy stupně ne většího než* $\max\{$*stupeň* $P$*, stupeň* $Q\}$ *a* $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *udává, jakou násobnost má číslo* $\alpha + i\beta$ *jakožto kořen charakteristického polynomu.*

Následující Lemma je základem tzv. **metody variace konstant** pro hledání partikulárního řešení lineární (nehomohenní) ODR, a to jak s konstantními tak s nekonstantními koeficienty.

**Lemma 3.5.** *Nechť* $y_1, \ldots, y_n$ *tvoří fundamentální systém homogenní rovnice* (5) *(****s obecně nekonstatními koeficienty****). Potom matice*

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix}
y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\
y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t)
\end{pmatrix}$$

*je regulární pro každé* $t \in \mathbb{R}$*.*

**Věta 3.6** (variace konstant)**.** *Nechť* $y_1, \dots, y_n$ *tvoří fundamentální systém rovnice* (5) ***(s obecně nekonst. koeficienty)****,* $\mathbf{U}(t)$ *buď jako v předchozí větě. Nechť* $c_1(t), \dots, c_n(t)$ *řeší soustavu*

$$\mathbf{U}(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(t) \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t)/a_n \end{pmatrix} .$$

*Pak funkce*

$$y_p(t) := c_1(t)y_1(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t)$$

*je (partikulární) řešení rovnice* (4).

## 3.3 Speciální typy ODR

### 3.3.1 Bernoulliho rovnice

**Definice. Bernoulliovou rovnicí** nazýváme ODR tvaru

$$y' + a(t)y = b(t)y^\alpha , \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0, 1 , \tag{6}$$

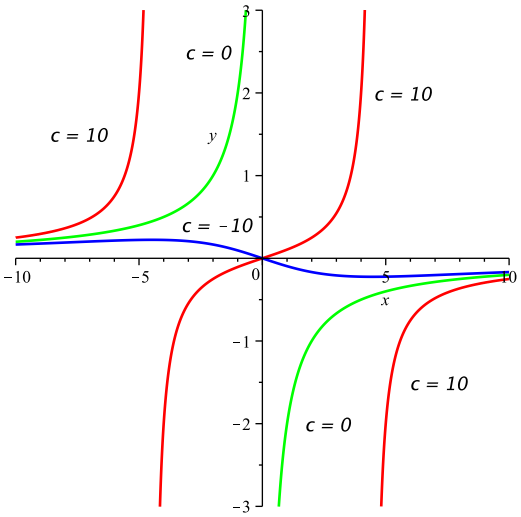
kde $a, b \in \mathcal{C}(J)$, $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval.

**Návod k řešení:** Pro $\alpha = 0$ nebo $\alpha = 1$ jde o lineární ODR 1. řádu. Pro jiná $\alpha$ zavedeme novou funkci $z = z(t)$ substitucí

$$y(t) = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} ,$$

která převede rovnici (6) na lineární ODR 1. řádu. Pozor, v případě, že $\alpha$ je neceločíselné, je potřeba dát pozor na definiční obor obecné mocniny $y^\alpha$.

**Cvičení.** Řešte rovnici $y' = y^2 + \frac{y}{t}$ jako Bernoulliovu. Porovnejte s postupem z přechozího paragrafu. Prohlédněte si grafy řešení, $y(t) = \frac{2t}{2c-t^2}$, pro hodnoty $c = 10, 0, -10$.



### 3.3.2 Eulerova rovnice

**Definice. Eulerovou rovnicí** nazýváme **lineární ODR s nekonstantními koeficienty** tvaru

$$a_n t^n y^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} \cdots + a_1 t y' + a_0 y = f(t)\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,, \tag{7}$$

kde $a_0, \dots a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $f \in \mathcal{C}(J)$, $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval neobsahující nulu.

*Poznámka.* Pro $t = 0$ rovnice (7) **degeneruje**. Rovnici tedy uvažujeme separátně pro $t > 0$ a pro $t < 0$. **V dalších našich úvahách budeme řešit Eulerovu rovnici pouze pro $t > 0$, pro záporná $t$ bychom postupovali obdobně.**

*Poznámka.* Jde o lineární rovnici (i když s nekonstantními koeficienty), pro její řešení proto platí příslušná teorie. Jde tedy o nalezení $n$ prvkového fundamentálního systému pro homogenní rovnici (s $f = 0$), a poté o nalezení jednoho (partikulárního) řešení rovnice s pravou stranou. Pro nalezení partikulárního řešení lze použít např. metodu variace konstant. Eulerova rovnice tedy bude vyřešena, nalezneme-li její fundamentální systém.

**Metoda nalezení FS Eulerovy rovnice**

- Použijeme ansatz $y = t^\lambda$, který vede k tzv. charakteristickému polynomu pro Eulerovu ODR.
- Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ kořenem tohoto polynomu násobnosti $p$, jsou odpovídajícími prvky fundamentálního systému pro $t > 0$ funkce

$$\boxed{t^\lambda \ln^k t,} \qquad k = 0, \dots, p-1.$$

- Je-li $\alpha + i\beta$ ($\beta > 0$) kořenem tohoto polynomu násobnosti $p$, jsou odpovídajícími prvky fundamentálního systému funkce

$$\boxed{t^\alpha \ln^k t \cdot \cos(\beta \ln t)\,, \quad t^\alpha \ln^k t \cdot \sin(\beta \ln t),} \qquad k = 0, \dots, p-1.$$

*Poznámka.* Eulerovu rovnici dostaneme např. při hledání sféricky symetrických řešení Laplaceovy rovnice $\Delta u = 0$ v celém $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Je-li $u$ sféricky symetrická, je $u(x) = w(r)$, kde $r = |x| > 0$. Funkce $w$ pak (jak lze ukázat) splňuje Eulerovu rovnici

$$r^2 w''(r) + (n-1) r\, w'(r) = 0\,.$$

Jejím řešením (proveďte) a zpětným dosazením dostaneme ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} n = 2 \quad &\Longrightarrow \quad u(|x|) \;=\; c_1 + c_2 \ln|x|\,, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\,, \\ n > 2 \quad &\Longrightarrow \quad u(|x|) \;=\; c_1 + \frac{c_2}{|x|^{n-2}}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,. \end{aligned}$$

## 3.4 Řešení ODR pomocí Taylorových řad

**Věta 3.7.** *Uvažujme lineární rovnici $n$-tého řádu,*

$$a_n(t) y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t) y' + a_0(t) y = f(t) \tag{8}$$

*na intervalu $J \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in J$. Dají-li se koeficienty a pravá strana rovnice* (8) *rozložit do Taylorových řad na nějakém okolí $\mathcal{U}^\delta(t_0)$, přičemž $a_n(t_0) \neq 0$, lze každé řešení rovnice* (8) *rozložit na nějakém okolí $\mathcal{U}^\eta(t_0)$ do Taylorovy řady.*

**Řešení:** Uvážíme ansatz $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^k$, který formálně $n$-krát proderivujeme člen po členu a dosadíme do rovnice. Jsou-li k (8) zadány počáteční podmínky (v bodě $t_0$), dosadíme uvedený ansatz i do nich.

**Poznámky k řešení:**

- Nejsou-li koeficienty $a_j$ a pravá strana $f$ ve tvaru mocninné řady, je potřeba rozložit do řady i je.
- Po formálním provedení všech algebraických operací s řadami porovnáme koeficienty u stejných mocnin $t$.
- Tím dostaneme soustavu nekonečně mnoha rovnic pro nekonečně mnoho koeficientů $a_k$, $k = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jejím vyřešením nalezneme hledanou funkci $y(t)$ ve tvaru mocninné řady. Na závěr určíme poloměr konvergence této řady.
- V případě homogenní rovnice ($f \equiv 0$) můžeme různou volbou počátečních podmínek obdržet různá řešení. Jejich lineární (ne)závislost je možno ověřit např. pomocí Wronskiánu.

## 3.5 Soustavy ODR 1. řádu

Uvažujme soustavu (obecných) diferenciálních rovnic 1. řádu, vyřešených vzhledem k 1. derivaci, ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{9}$$

kde $f_j$, $j = 1, \ldots, n$, jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Vektorový tvar soustavy (9):

$$\vec{x}'(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t)),$$

kde $\vec{x}(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)^T$, $\vec{x}'(t) = \big(x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)\big)^T$, $\vec{f} = \big(f_1, f_2, \ldots, f_n\big)^T$.

**Definice.**

- **Řešením soustavy** (9) rozumíme vektorovou funkci $\vec{x} = \big(x_1, \ldots, x_n\big)^T$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují vlastní derivace $x_j'(t)$, $j = 1, \ldots, n$, a platí (9).
- **Počáteční úlohou** pro (9) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení $\vec{x}$ soustavy (9) splňující navíc předem zadanou podmínku $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^0$, kde $[t_0, \vec{x}^0]$ je daný bod z $G$ (tzv. **počáteční podmínka**).
- **Maximální řešení** soustavy (9) je takové řešení $\vec{x}$ definované na intervalu $J$, které již nelze prodloužit, tj. je-li $\vec{y}$ řešení definované na intervalu $I$, $J \subset I$ a $\vec{y}(t) = \vec{x}(t)$ pro každé $t \in J$, pak $J = I$.

Uvažujme nyní soustavu **lineárních** diferenciálních rovnic 1. řádu ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{aligned} \tag{10}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $b_i : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, jsou spojité funkce.

Vektorový tvar lineární soustavy (10) je:

$$\vec{x}' = \mathbf{A}(t)\vec{x} + \vec{b}(t),$$

kde

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

**Věta 3.8** (o existenci a jednoznačnosti řešení)**.** *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Nechť $\mathbf{A} : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$, $\vec{b} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení $\vec{x}$ soustavy* (10) *splňující $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^0$. Toto řešení je definováno na celém intervalu $(\alpha, \beta)$.*

**Definice. Homogenní soustavou** k soustavě (10) rozumíme soustavu

$$\vec{x}' = \mathbf{A}(t)\vec{x}. \tag{11}$$

**Věta 3.9.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$, $\alpha < \beta$, a $\mathbf{A} : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy* (11) *tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$. Dimenze tohoto podprostoru je rovna $n$. Jakoukoli bázi tohoto podprostoru, (složenou z vektorových funkcí $\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^n$), nazýváme* ***fundamentálním systémem*** *rovnice* (11).

**Věta 3.10.** *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$, $\alpha < \beta$. Nechť $\mathbf{A} : (\alpha, \beta) \to \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$, $\vec{b} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Nechť $\vec{x}_P$ je jedno (partikulární) řešení* (10) *na intervalu $(\alpha, \beta)$. Potom každé řešení $\vec{x}$ soustavy* (10) *na intervalu $(\alpha, \beta)$ má tvar $\vec{x}_P + \vec{x}_H$, kde $\vec{x}_H$ je řešení homogenní soustavy* (11).

**Definice.** Nechť vektorové funkce $\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^n$ tvoří fundamentální systém rovnice (11). Označme

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & \dots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & \dots & x_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Matici $\Phi$ pak nazýváme **fundamentální maticí soustavy** (11).

**Lemma 3.11.** *Nechť $\Phi$ je fundamentální matice soustavy* (11)*. Pak $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (\alpha, \beta)$.*

**Věta 3.12** (variace konstant)**.** *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Pak maximální řešení $\vec{x}$ rovnice* (10) *s počáteční podmínkou $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^0$ má tvar*

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{x}^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\vec{b}(s)\,ds, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

*kde $\Phi$ je fundamentální matice soustavy* (11).

**Věta 3.13** (regularita řešení lineární homogenní rovnice s konstantními koeficienty)**.** *Nechť $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}$ a vektorová funkce $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je řešením soustavy $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$. Pak $\vec{x}$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\vec{x}^{(k)}(t) = \mathbf{A}^k\vec{x}(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$.*

- **Vztah mezi soustavou rovnic 1. řádu a jednou rovnicí vyššího řádu**

  Nechť

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{12}$$

je rovnice $n$-tého řádu a nechť je $y(t)$ její řešení pro $t \in J \subset \mathbb{R}$.

Potom je vektorová funkce $\vec{x}(t) = \big(y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\big)$ řešením soustavy

$$\vec{x}'(t) = \vec{F}(t, \vec{x})\,, \tag{13}$$

na intervalu $J$, kde $F_j(t, \vec{x}) = x_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n-1$, $F_n(t, \vec{x}) = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

**(A) Řešení soustav lineárních rovnic pomocí upravování**

Soustavu rovnic upravujeme takovým způsobem, abychom získali jednu rovnici vyššího řádu s jednou neznámou funkcí. Tento způsob je vhodný pro soustavy s nemnoha (např. se dvěma) rovnicemi, nebo tehdy, obsahuje-li matice soustavy rovnic hodně nulových prvků (je tzv. řídká). Uvedeným způsobem je možno řešit i nehomogenní soustavy.

**Příklad 1.** *Najděte všechna maximální řešení soustavy*

$$\begin{aligned} y' &= 3y - 5z - 3e^t \\ z' &= y - z - e^t \end{aligned}$$

**(B) Řešení soustav lineárních rovnic pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů**

**Věta 3.14.** *Nechť matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ má $n$ lineárně nezávislých vlastních vektorů $\vec{q}^1, \ldots \vec{q}^n$, které po řadě přísluší vlastním číslům $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Potom funkce*

$$e^{\lambda_1 t}\vec{q}^1, \ldots, e^{\lambda_n t}\vec{q}^n \tag{14}$$

*tvoří fundamentální systém lineární homogenní soustavy (s konstantními koeficienty)*

$$\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}.$$

*Poznámka.* Tvrzení předchozí věty umožní sestavit fundamentalní systém dané lineární homogenní soustavy (s konstantními koeficienty), která je reprezentována **diagonalizovatelnou** maticí $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ mající $n$ vlastních čísel a $n$-tici jim odpovídajících vlastních vektorů. Případ, kdy matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ není diagonalizovatelná, lze také řešit pomocí tzv. Jordanova kanonického tvaru, kterým jsme se však v kapitole o maticích nezbývali.

*Poznámka.* Z tvaru řešení, které je uvedeno ve Větě 3.12, a sice, že maximální řešení $\vec{x}$ rovnice (10) s počáteční podmínkou $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^0$ má tvar

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{x}^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

plyne, že

$$\vec{x}_P(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in (\alpha, \beta), \tag{15}$$

je **partikulární řešení** (11), přičemž $\Phi$ je fundamentální matice soustavy (10).

**Příklad 2.** *Najděte oběma metodami (pomocí úprav i pomocí vlastních čísel a vektorů) řešení soustavy*

$$x' = x + 3y + e^t\,, \tag{16}$$
$$y' = 2x + 2y - e^t\,. \tag{17}$$

*Sestavte v obou případech fundamentální matici soustavy; porovnejte jejich tvar.*

**Řešení**.

*a) Metoda postupných úprav:* Pokusíme se převést systém na jednu rovnici druhého řádu pro funkci $x$. Derivováním rovnice (16) dostaneme $x'' = x' + 3y' + e^t$. Dosazení za $y'$ z (17) by nebylo dobré, protože bychom se tím nezbavili funkce $y$. Je proto správným krokem nejprve pomocí (16) vyloučit z (17) funkci $y$: odečtením dvojnásobku (16) od trojnásobku (17) dostaneme $3y' - 2x' = 4x - 5e^t$. Odtud dosadíme za $y'$ do rovnice $x'' = x' + 3y' + e^t$ a dostaneme po úpravě

$$x'' - 3x' - 4x = -4e^t\,. \tag{18}$$

Příslušnou homogenní soustavu vyřešíme metodou charakteristického polynomu, což dá pro $x$ fundamentální systém $\{e^{-t}, e^{4t}\}$.

Partikulární řešení pro $x$ hledáme ve tvaru $ce^t$, což dá $x_p = \frac{2}{3}e^t$. Z rovnice (16) pak lze vyjádřit $y$ pomocí $x$ a jeho derivace, což umožní $y$ dopočítat. Celkově vyjde

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{4t} + \frac{2}{3}e^t\,, \tag{19}$$

$$y(t) = -\frac{2}{3}c_1e^{-t} + c_2e^{4t} - \frac{1}{3}e^t\,. \tag{20}$$

Fundamentální matice $\Phi(t)$ a vektor partikulárních řešení $(x_p, y_p)^T$ mají tedy tvar

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} & e^{4t} \end{pmatrix}\,, \qquad \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^t \\ -\frac{1}{3}e^t \end{pmatrix}\,, \tag{21}$$

neboť vektorový zápis (19)–(20) je

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} & e^{4t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^t \\ -\frac{1}{3}e^t \end{pmatrix}\,.$$

*b) Metoda vlastních čísel a vektorů:* Matice soustavy (16)–(17) je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, charakteristický polynom je tedy $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$ (porovnejte s charakterisktickým polynomem v metodě a) — proč musí být stejné?). Pro vlastní číslo $\lambda = -1$ je $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, tedy vlastním vektorem je například $\vec{v}^1 = (-3, 2)^T$. Pro vlastní číslo $\lambda = 4$ je $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, tedy vlastním vektorem je například $\vec{v}^2 = (1, 1)^T$. To dává fundamentální matici

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-t} & e^{4t} \\ 2e^{-t} & e^{4t} \end{pmatrix}\,.$$

Porovnejte tento tvar s tvarem fundamentální matice, který jsme obdrželi při aplikaci předchozí metody výpočtu. Obě matice se liší pouze konstantou, kterou je vynásoben první sloupec. To však koresponduje s našimi znalostmi: sloupce konstant ve fundamentální matici jsou (v případě různých vlastních čísel) tvořeny vlastními vektory matice $\mathbf{A}$, a ty jsou skutečně určeny až na multiplikativní konstantu.

Vektor partikulárních řešení můžeme spočíst například pomocí (15). Postupně dostáváme (počítejte podrobně)

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -e^t & e^t \\ 2e^{-4t} & 3e^{-4t} \end{pmatrix}\,,$$

tedy pro $\vec{b}(t) = (e^t, -e^t)^T$ je $\Phi^{-1}(t)\vec{b}(t) = \frac{1}{5}(-2e^{2t}, -e^{-3t})$.

Zvolíme $t_0 = 0$ a dostaneme

$$\int_0^t \Phi^{-1}(s)\vec{b}(s)\,ds = \Big(\frac{1}{5}(1 - e^{2t}), \frac{1}{15}(e^{-3t} - 1)\Big).$$

Konečně,

$$\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)\vec{b}(s)\,ds = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^t - 3e^{-t} - \frac{1}{15}e^{4t} \\ -\frac{1}{3}e^t + 2e^{-t} - \frac{1}{15}e^{4t} \end{pmatrix} .$$

Vektor na pravé straně je vektorem (nějakých) partikulárních řešení. Části, obsahující $e^{-t}$ a $e^{4t}$ jsou však prvky fundamentálního systému (odůvodněte), tedy je v případě hledání partikulárního řešení není nutno uvažovat. Proto je jednodušším vektorem partikulárních řešení vektor (srovnejte s (21))

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^t \\ -\frac{1}{3}e^t \end{pmatrix} .$$

# 4 Křivkový integrál

## 4.1 Křivky a jejich parametrizace

**Definice. Křivkou** budeme rozumět zobrazení $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) takové, že $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ je **třídy** $\mathcal{C}^1$, tj. $\varphi_i'$ je spojité na $\langle a, b\rangle$, $i = 1, \ldots, n$, přičemž v krajních bodech $\langle a, b\rangle$ symbol $\varphi_i'(x)$ značí příslušnou jednostrannou derivaci. **Geometrickým obrazem** křivky $\varphi$ rozumíme množinu $\langle\vec{\varphi}\rangle = \vec{\varphi}(\langle a, b\rangle) \subset \mathbb{R}^n$.

Bod $\vec{\varphi}(a)$ nazýváme **počátečním** a bod $\vec{\varphi}(b)$ **koncovým bodem křivky** $\vec{\varphi}$.

**Definice.** Buď $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ křivka v $\mathbb{R}^n$. Je-li vektor $\vec{\varphi}'(t) = (\varphi_1'(t), \ldots, \varphi_n'(t))$ nenulový, nazýváme jej **tečným vektorem** k této křivce v bodě $\vec{\varphi}(t)$ a vektor

$$\vec{\tau}(\vec{\varphi}(t)) := \frac{\vec{\varphi}'(t)}{\|\vec{\varphi}'(t)\|}$$

**jednotkovým tečným vektorem** k této křivce v bodě $\vec{\varphi}(t)$.

**Definice.** Buď $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ křivka v $\mathbb{R}^n$. Pro jednotkový tečný vektor $\vec{\tau}(\vec{\varphi}(t))$ definujeme vektory

$$\vec{n}(\vec{\varphi}(t)) := (\vec{\tau}(\vec{\varphi}(t)))', \qquad \vec{\nu}(\vec{\varphi}(t)) := \frac{\vec{n}(\vec{\varphi}(t))}{\|\vec{n}(\vec{\varphi}(t))\|}$$

(pro $\vec{n}(\vec{\varphi}(t)) \neq 0$) a nazýváme je po řadě **normálovým vektorem** a **jednotkovým normálovým vektorem** ke křivce $\vec{\varphi}$ v bodě $\vec{\varphi}(t)$.

**Cvičení.** Ověřte, že platí $\vec{n}(\vec{\varphi}(t)) \cdot \vec{\tau}(\vec{\varphi}(t)) = 0$, tedy že uvedené vektory jsou kolmé.

*Poznámka.*

- V $\mathbb{R}^n$ pro $n \geq 3$ je takto definovaný normálový vektor $\vec{n}$ pouze jedním z $(n-1)$ lineárně nezávislých normálových vektorů, které k dané křivce (v bodě, kde existuje tečný vektor) existují. V $\mathbb{R}^2$ je normálový vektor ke křivce (pokud existuje) určený jednoznačně až na násobek konstantou.
- V $\mathbb{R}^2$ lze definovat normálový vektor ještě takto: $\vec{n}(\vec{\varphi}(t)) = \pm(\tau_2(\vec{\varphi}(t)), -\tau_1(\vec{\varphi}(t)))$, kde $\vec{\tau}(\vec{\varphi}(t))$ je (jednotkový, ale obecně jakýkoli) tečný vektor.
- V $\mathbb{R}^3$ lze ke dvojici *jednotkový tečný vektor* $\vec{\tau}$ a *jednotkový normálový vektor* $\vec{\nu}$ definovat tzv. **vektor binormály** $\vec{\beta}$ předpisem $\vec{\beta} := \vec{\tau} \times \vec{\nu}$. Vektory $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ pak tvoří trojici vzájemně kolmých jednotkových vektorů v $\mathbb{R}^3$.

**Definice.** Buď $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ křivka v $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že křivka $\vec{\varphi}$ je

- **jednoduchá (prostá)**, pokud $\vec{\varphi}$ je prosté zobrazení na $\langle a, b\rangle$;
- **uzavřená**, pokud $\vec{\varphi}(a) = \vec{\varphi}(b)$;

Uzavřenou křivku, takovou, že $\vec{\varphi}|_{(a,b)}$ je prosté zobrazení, nazýváme někdy **Jordanovou křivkou**.

**Definice.**

- Zobrazení $\vec{\omega} : \langle a, c\rangle \to \mathbb{R}^n$ nazýváme **součtem křivek** $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ **a** $\vec{\psi} : \langle b, c\rangle \to \mathbb{R}^n$, pokud platí: $\vec{\omega}(t) = \vec{\varphi}(t)$ pro $t \in \langle a, b\rangle$, $\vec{\omega}(t) = \vec{\psi}(t)$ pro $t \in \langle b, c\rangle$. Píšeme $\vec{\omega} = \vec{\varphi} \oplus \vec{\psi}$. (Pro součet křivek platí: $\langle\vec{\varphi} \oplus \vec{\psi}\rangle = \langle\vec{\varphi}\rangle \cup \langle\vec{\psi}\rangle$.)
- Křivku $\vec{\omega} : \langle -b, -a\rangle \to \mathbb{R}^n$ nazýváme **opačnou** ke křivce $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$, pokud

$$\omega(t) = \varphi(-t)\,, \qquad t \in \langle -b, -a\rangle\,.$$

Píšeme $\vec{\omega} = \ominus\vec{\varphi}$. (Křivka $\ominus\vec{\varphi}$ je "opačně probíhaná" křivka $\vec{\varphi}$, a platí $\langle\ominus\vec{\varphi}\rangle = \langle\vec{\varphi}\rangle$.)

## 4.2 Křivkový integrál 1. a 2. druhu

**Definice.** Buď $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ křivka splňující $\vec{\varphi}' \neq 0$ alespoň s.v. na $\langle a, b\rangle$. Buďte dále funkce $f : \langle\vec{\varphi}\rangle \to \mathbb{R}$ a vektorové pole $\vec{T} : \langle\vec{\varphi}\rangle \to \mathbb{R}^n$ definovány alespoň s.v. na $\langle\vec{\varphi}\rangle$. Definujme (pokud integrály vpravo existují):

- **křivkový integrál prvního druhu** z $f$ přes $\vec{\varphi}$:

$$\int_{\varphi} f\,ds := \int_a^b f\big(\vec{\varphi}(t)\big)\,\|\vec{\varphi}'(t)\|\,dt\,,$$

- **křivkový integrál druhého druhu** z $\vec{T}$ přes $\vec{\varphi}$:

$$\int_{\varphi} \vec{T}\,d\vec{\varphi} := \int_a^b \vec{T}\big(\vec{\varphi}(t)\big)\cdot\vec{\varphi}'(t)\,dt\,.$$

*Poznámka.* • $\int_{\varphi} 1\,ds = \int_a^b \|\vec{\varphi}'(t)\|\,dt$ … délka křivky.

- **Integrál přes opačnou křivku**:

$$\int_{\ominus\varphi} f\,ds = \int_{\varphi} f\,ds\,,\quad \int_{\ominus\varphi} \vec{T}\,d\vec{\varphi} = -\int_{\varphi} \vec{T}\,d\vec{\varphi}\,.$$

- **Integrál přes součet křivek**:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi\oplus\psi} f\,ds &= \int_{\varphi} f\,ds + \int_{\psi} f\,ds\,,\\ \int_{\varphi\oplus\psi} \vec{T}\,d(\vec{\varphi}\oplus\vec{\psi}) &= \int_{\varphi} \vec{T}\,d\vec{\varphi} + \int_{\psi} \vec{T}\,d\vec{\psi}\,.\end{aligned}$$

*Poznámka.* • **Souvislost integrálů 1. a 2. druhu**:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi} f\,ds &= \int_a^b f\big(\vec{\varphi}(t)\big)\,\|\vec{\varphi}'(t)\|\,dt = \\ &= \int_a^b f\big(\vec{\varphi}(t)\big)\,\frac{\vec{\varphi}'(t)}{\|\vec{\varphi}'(t)\|}\cdot\vec{\varphi}'(t)\,dt = \int_{\varphi} (f\vec{\tau})\,d\vec{\varphi}.\end{aligned}$$

- **Souvislost integrálů 2. a 1. druhu**:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi} \vec{T}\,d\vec{\varphi} &= \int_a^b \vec{T}\big(\vec{\varphi}(t)\big)\cdot\vec{\varphi}'(t)\,dt = \\ &= \int_a^b (\vec{T}\cdot\vec{\tau})\big(\vec{\varphi}(t)\big)\|\vec{\varphi}'(t)\|\,dt = \int_{\varphi} (\vec{T}\cdot\vec{\tau})\,ds.\end{aligned}$$

**Věta 4.1** (nezávislost na parametrizaci)**.** *Buďte $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$, $\vec{\psi} : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}^n$ prosté křivky v $\mathbb{R}^n$ takové, že $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$. Potom*

$$\int_{\varphi} f\,ds = \int_{\psi} f\,ds\,, \tag{1}$$

$$\int_{\varphi} \vec{T}\,d\vec{\varphi} = \pm\int_{\psi} \vec{T}\,d\vec{\psi}\,, \tag{2}$$

*pokud existuje vždy alespoň jeden z dvojice integrálů v (1) resp. (2).*

*Přitom v (2) je znaménko "plus", pokud $\vec{\varphi}(a) = \vec{\psi}(c)$, $\vec{\varphi}(b) = \vec{\psi}(d)$, v opačném případě je v (2) znaménko "minus".*

## 4.3 Křivkový integrál a potenciál vektorového pole

**Definice.** Řekneme, že množina $G \subset \mathbb{R}^n$ je **souvislá**, pokud pro každou dvojici bodů $\vec{x}$, $\vec{y} \in G$ existuje křivka $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to G$ (tj. $\langle\varphi\rangle \subset G$) taková, že $\vec{\varphi}(a) = \vec{x}$, $\vec{\varphi}(b) = \vec{y}$.

**Definice.** Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a souvislá množina, buď $\vec{T} : G \to \mathbb{R}^n$ vektorové pole na $G$. Řekneme, že $\vec{T}$ má (klasický) **potenciál** na $G$, pokud existuje funkce $U \in \mathcal{C}^1(G)$ (potenciál $\vec{T}$), taková, že

$$\vec{T}(\vec{x}) = \nabla U(\vec{x}) \qquad \forall \vec{x} \in G\,.$$

**Pozorování**: Potenciál je určen jednoznačně až na konstantu.

**Věta 4.2.** *Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a souvislá množina, buď $\vec{T} : G \to \mathbb{R}^n$ vektorové pole na $G$ s potenciálem $U \in \mathcal{C}^1(G)$. Buď dále $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to G$ křivka v $G$. Potom*

$$\int_\varphi \vec{T}\, d\vec{\varphi} = U\big(\vec{\varphi}(b)\big) - U\big(\vec{\varphi}(a)\big)\,.$$

**Důsledek 4.3.** *Je-li v situaci přechozí věty $\vec{\varphi}$ Jordanova křivka, platí*

$$\int_\varphi \vec{T}\, d\vec{\varphi} = 0\,.$$

**Definice** (nezávislost na cestě)**.** Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a souvislá množina, buď $\vec{T} : G \to \mathbb{R}^n$ **spojité** vektorové pole na $G$. Řekneme, že integrál druhého druhu z $\vec{T}$ **nezávisí na cestě v** $G$, pokud pro libovolné dvě křivky $\vec{\varphi} : \langle a, b\rangle \to G$, $\vec{\psi} : \langle c, d\rangle \to G$ takové, že $\vec{\varphi}(a) = \vec{\psi}(c)$, $\vec{\varphi}(b) = \vec{\psi}(d)$ platí

$$\int_\varphi \vec{T}\, d\vec{\varphi} = \int_\psi \vec{T}\, d\vec{\psi}\,.$$

**Věta 4.4.** *Buď $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená a souvislá množina, buď $\vec{T} : G \to \mathbb{R}^n$ **spojité** vektorové pole na $G$. Potom následující tři podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *$\vec{T}$ má potenciál $U$ v $G$.*
2. *Integrál druhého druhu z $\vec{T}$ nezávisí na cestě v $G$.*
3. *$\int_\varphi \vec{T}\, d\vec{\varphi} = 0$ pro každou Jordanovu křivku $\vec{\varphi}$ v $G$.*

*Navíc: je-li splněna podmínka 2, je funkce*

$$U_{\vec{a}}(\vec{x}) := \int_{\varphi(\vec{a};\vec{x})} \vec{T}\, d\vec{\varphi}\,, \qquad \vec{x} \in G\,, \tag{3}$$

*(kde $\vec{a} \in G$ je pevný, a $\varphi(\vec{a};\vec{x})$ je jakákoli křivka spojující body $\vec{a}$, $\vec{x}$) potenciálem $\vec{T}$ v $G$. Naopak, každý potenciál pole $\vec{T}$ v $G$ je tvaru (3).*

**Opakování:**

**Definice** (rotace třírozměrného pole)**.** Buď $\vec{T} : G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $G$ otevřená. **Rotací** $\vec{T}$ v bodě $\vec{a} \in G$ nazvu

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{T}(\vec{a}) \;&:=\; \begin{vmatrix} \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \vec{e}^3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{vmatrix}(\vec{a}) = \\ &= \left(\frac{\partial T_3}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial z}, \frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{\partial T_3}{\partial x}, \frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial y}\right)(\vec{a})\,,\end{aligned}$$

vždy když existují (vlastní) příslušné parciální derivace.

*Poznámka* (rotace dvourozměrného pole). Buď $\vec{T} : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $G$ otevřená. Pro výpočet rotace $\vec{T}$ lze formálně pracovat ve 3 dimenzích položením $T_3 \equiv 0$, a $\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{T}(\vec{a}) \quad &:= \quad \begin{vmatrix} \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \vec{e}^3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ T_1 & T_2 & 0 \end{vmatrix} (\vec{a}) = \\ &= \left(0, 0, \frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial y}\right)(\vec{a}) \,. \end{aligned}$$

Klademe tedy pro $\vec{T} : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\operatorname{rot} \vec{T}(\vec{a}) := \frac{\partial T_2}{\partial x}(\vec{a}) - \frac{\partial T_1}{\partial y}(\vec{a}) \,.$$

**Tvrzení 4.5.** *Buď $n = 2$ nebo $n = 3$. Buď dále $G$ otevřená a souvislá množina v $\mathbb{R}^n$, $\vec{T} : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vektorové pole, které má v $G$ potenciál $U \in \mathcal{C}^2(G)$. Potom*

$$\operatorname{rot} \vec{T} = 0 \qquad \text{v } G \,.$$

**POZOR!** Tvrzení neplatí naopak. Tj. existují vektorová pole v otevřených a souvislých množinách, která mají nulovou rotaci a přitom nemají potenciál. Viz následující příklad.

**Cvičení.** Uvažte $\vec{T}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ v $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, a křivku $\vec{\varphi}$, která probíhá proti směru hodinových ručiček obvod kružnice o poloměru $r > 0$ a středu $0$.

Je $\int_{\vec{\varphi}} \vec{T} d\vec{\varphi} = 2\pi$ (nezávisle na velikosti $r > 0$). Proto podle Věty 4.4 nemá $\vec{T}$ v $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ potenciál (a nemá jej ani v žádné otevřené a souvislé podmnožině $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, která obsahuje nějakou kružnici o poloměru $r > 0$ a středu $0$).

Přitom $\operatorname{rot} \vec{T} = 0$ všude v $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

*Poznámka.* Buď $\vec{T} \in \mathcal{C}^2(G)$, kde $G$ je otevřená a souvislá množina. Potom platí implikace "existuje potenciál k $\vec{T}$ v $G \implies \operatorname{rot} \vec{T} = 0$ v $G$", zatímco implikace "$\operatorname{rot} \vec{T} = 0$ v $G \implies$ existuje potenciál k $\vec{T}$ v $G$" platí jen ve speciálních otevřených a souvislých množinách $G$, v tzv. množinách, kde "každá Jordanova křivka lze stáhnout do bodu".

**Cvičení.** Ukažte, že vektorové pole z předchozího příkladu má potenciál $U(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ na množině $\mathbb{R}^2 \cap \{x > 0\}$ a na množině $\mathbb{R}^2 \cap \{x < 0\}$. Tyto dvě množiny mají tu vlastnost, že v nich "každá Jordanova křivka lze stáhnout do bodu".

# 5 Plošný integrál

## 5.1 Plošný integrál 1. druhu v $\mathbb{R}^3$

**Definice.** Řekneme, že $S \subset \mathbb{R}^3$ je hladká 2-plocha (hladká dvoudimenzionální plocha), pokud existuje zobrazení

$$\vec{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \Omega \text{ otevřená}, \qquad \vec{\varphi}(\Omega) = S,$$
$$\vec{\varphi} : \begin{cases} x = \varphi_1(u,v)\,, \\ y = \varphi_2(u,v)\,, \\ z = \varphi_3(u,v)\,, \end{cases} \tag{1}$$

přičemž $\vec{\varphi} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\vec{\varphi}$ je prosté na $\Omega$, a

$$\text{hodnost matice } \left(\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{D(u,v)}\right) = 2 \quad \forall\,(u,v) \in \Omega\,. \tag{2}$$

*Poznámka.*

- Budeme psát $\vec{\varphi}_u \equiv \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\right)$ apod.
- Podmínka (2) říká, že ($\forall (u,v) \in \Omega$) jsou vektory $\vec{\varphi}_u$ a $\vec{\varphi}_v$, které mají geometrický význam tečných vektorů k ploše $S$ v bodě $\vec{\varphi}(u,v)$, lineárně nezávislé, a tvoří tedy bázi dvojrozměrného tečného prostoru k $S$ v bodě $\vec{\varphi}(u,v)$.
- Vektorový součin $\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v$ je pak **nenulový** a má směr normálového vektoru k ploše $S$; jeho velikost $\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|$ je číselně rovna plošnému obsahu rovnoběžníka se stranami $\vec{\varphi}_u$ a $\vec{\varphi}_v$. Plocha $S$ je tak **orientována** polem jednotkových normálových vektorů $\vec{\nu}(\vec{\varphi}(u,v)) := \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|}$. V situaci, kdy plocha $S$ je orientována normálami $\vec{\nu}$, píšeme $S = (S, \vec{\nu})$.

**Definice.** Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ hladká 2-plocha parametrizovaná zobrazením $\vec{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Buď $f$ definovaná na $S$, taková, že $f(\vec{\varphi}(u,v))$ má smysl alespoň pro s.v. hodnoty $(u,v) \in \Omega$. Definujeme **plošný integrál 1. druhu z** $f$ **přes plochu** $S$ jako

$$\int_S f\,dS := \int_\Omega f(\vec{\varphi}(u,v))\,\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|(u,v)\,du\,dv\,, \tag{3}$$

pokud existuje integrál na pravé straně (například v Lebesgueově smyslu).

**Tvrzení 5.1** (nezávislost na parametrizaci)**.** *Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ hladká 2-plocha parametrizovaná dvěma různými zobrazeními:*

- $\vec{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *$\Omega$ otevřená,* $\vec{\varphi}(\Omega) = S$, $(\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v)(u,v) \neq 0\ \forall (u,v) \in \Omega$*;*
- $\vec{\psi} : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *$G$ otevřená,* $\vec{\psi}(G) = S$, $(\vec{\psi}_s \times \vec{\psi}_t)(s,t) \neq 0\ \forall (s,t) \in G$*;*

*Buď $f$ definovaná na $S$, taková, že $f(\vec{\varphi}(u,v))$ má smysl alespoň pro s.v. hodnoty $(u,v) \in S$ a $f(\vec{\psi}(s,t))$ má smysl alespoň pro s.v. hodnoty $(s,t) \in G$. Potom*

$$\int_S f\,dS = \int_G f\,dS\,, \tag{4}$$

*pokud existuje alespoň jeden z obou integrálů.*

**Cvičení** (Grammův determinant)**.** Jiný způsob výpočtu tzv. "metrického členu" $\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|$ se opírá o následující identitu (determinant vpravo se nazývá *Grammův*):

$$\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|^2 = \begin{vmatrix} \vec{\varphi}_u \cdot \vec{\varphi}_u & \vec{\varphi}_u \cdot \vec{\varphi}_v \\ \vec{\varphi}_v \cdot \vec{\varphi}_u & \vec{\varphi}_v \cdot \vec{\varphi}_v \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Dokažte tuto identitu.

**Cvičení.** • Spočtěte povrch plochy, která je popsána parametrizací:

$$\vec{\varphi}: \begin{cases} x = (R + r\cos u)\cos v\,, \\ y = (R + r\cos u)\sin v\,, \\ z = r\sin u\,, \end{cases} \tag{6}$$

$u, v \in (0, 2\pi)$, $0 < r < R$. O jakou jde plochu?

[**Řešení:** Jde o torus (pneumatiku, anuloid, ...) a povrch by vám měl vyjít $4\pi^2 rR = 2\pi r \cdot 2\pi R$.]

- Parametrizujte kouli v $\mathbb{R}^3$ a spočtěte její povrch.

**Cvičení.** Ukažte: je-li plocha $S$ zadána explicitně, jako graf hladké funkce $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to S$, tedy pokud je $S := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3\,;\ z = \psi(x, y)\,;\ (x, y) \in \Omega\}$, platí

$$\int_S f\, dS = \int_\Omega f(x, y, \psi(x, y))\, \sqrt{1 + |\nabla\psi|^2}\, dx\, dy\,. \tag{7}$$

[**Návod:** Z explicitního zadání plochy pomocí $z = \psi(x, y)$ lze vyrobit parametrizaci $\vec{\varphi}$: $(x = x, y = y, z = \psi(x, y))$, $(x, y) \in \Omega$. Zbytek plyne přímým výpočtem.]

## 5.2 Plošný integrál 2. druhu v $\mathbb{R}^3$

**Definice.** Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ hladká 2-plocha parametrizovaná zobrazením $\vec{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ **a orientovaná** polem jednotkových normálových vektorů $\vec{\nu}(\vec{\varphi}(u, v)) := \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|}$. Buď $\vec{T}$ vektorové pole definované na $S$, takové, že $\vec{T}(\vec{\varphi}(u, v))$ má smysl alespoň pro s.v. hodnoty $(u, v) \in S$. Definujeme **plošný integrál 2. druhu z $\vec{T}$ přes (orientovanou) plochu** $(S, \vec{\nu})$ jako

$$\int_{(S,\vec{\nu})} \vec{T}\, d\vec{S} := \int_\Omega \vec{T}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot (\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v)\,(u, v)\, du\, dv\,, \tag{8}$$

pokud existuje integrál na pravé straně (například v Lebesgueově smyslu).

**Definice** (souhlasná a nesouhlasná orientace)**.** Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ hladká 2-plocha parametrizovaná dvěma různými zobrazeními:

- $\vec{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\Omega$ otevřená, $\vec{\varphi}(\Omega) = S$, $(\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v)(u, v) \neq 0\ \forall (u, v) \in \Omega$;
- $\vec{\psi} : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $G$ otevřená, $\vec{\psi}(G) = S$, $(\vec{\psi}_s \times \vec{\psi}_t)(s, t) \neq 0\ \forall (s, t) \in G$.

Položme

$$\vec{\nu}(\vec{\varphi}(u, v)) := \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|}\,, \qquad \vec{\mu}(\vec{\psi}(s, t)) := \frac{\vec{\psi}_s \times \vec{\psi}_t}{\|\vec{\psi}_s \times \vec{\psi}_t\|}\,.$$

Řekneme, že plochy $(S, \vec{\nu})$ a $(S, \vec{\mu})$ jsou **souhlasně resp. nesouhlasně orientované**, pokud je $\vec{\nu} = \vec{\mu}$ resp. $\vec{\nu} = -\vec{\mu}$ (ve všech bodech plochy $S$).

**Tvrzení 5.2** (nezávislost na parametrizaci)**.** *Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ hladká 2-plocha parametrizovaná dvěma různými zobrazeními, $\vec{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a $\vec{\psi} : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (viz značení z předchozí definice). Buď $\vec{T}$ pole definované na $S$, takové, že $\vec{T}(\vec{\varphi}(u, v))$ má smysl alespoň pro s.v. hodnoty $(u, v) \in S$ a $\vec{T}(\vec{\psi}(s, t))$ má smysl alespoň pro s.v. hodnoty $(s, t) \in G$. Potom (pokud existuje alespoň jeden z obou integrálů)*

$$\int_{(S,\vec{\nu})} \vec{T}\, d\vec{S} = \pm \int_{(S,\vec{\mu})} \vec{T}\, d\vec{S}\,, \tag{9}$$

*kde znaménko "plus" resp. "minus" je v případě, že orientace $(S, \vec{\nu})$ a $(S, \vec{\mu})$ je souhlasná resp. nesouhlasná.*

*Poznámka.* Buď' $S = (S, \vec{\nu})$ hladká orientovaná 2-plocha, $\vec{\nu} := \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|}$, $\vec{\varphi}$ je parametrizující zobrazení. Pak platí následující vztahy mezi integrály prvního a druhého druhu:

$$\int_{(S,\vec{\nu})} \vec{T}\, d\vec{S} = \int_S \vec{T} \cdot \vec{\nu}\, dS\,, \qquad \int_S f\, dS = \int_{(S,\vec{\nu})} f\vec{\nu}\, d\vec{S}\,, \tag{10}$$

kde $f$ resp. $\vec{T}$ mají stejný význam jako v definicích příslušných integrálů, (3) resp. (8). Na základě těchto rovností se také někdy formálně píše $d\vec{S} = \vec{\nu}\, dS$, (pak tedy je i $\vec{\nu}\, d\vec{S} = \vec{\nu} \cdot \vec{\nu}\, dS = dS$).

*Poznámka.* Někdy také píšeme formálně $d\vec{S} = (dy\, dz, dx\, dz, dx\, dy)$. Pak pro $\vec{T} = (P, Q, R)$ lze psát

$$\int_{(S,\vec{\nu})} \vec{T}\, d\vec{S} = \int_S P\, dy\, dz + Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy\,. \tag{11}$$

Např. zápis $\int_S x^2\, dy\, dz + z^2\, dx\, dy$ tedy ukazuje, že jde o plošný integrál 2. druhu $\int_{(S,\vec{\nu})} \vec{T}\, d\vec{S}$, kde $\vec{T} = (x^2, 0, z^2)$.

# 6 Věty Gauss-Ostrogradského, Greenova a Stokesova věta

## 6.1 Úvod

**Definice** (zobecněná plocha)**.** Řekneme, že $S \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) je **zobecněná** $(n-1)$**-plocha**, pokud $S$ je konečným sjednocením hladkých $(n-1)$-ploch, $(n-2)$-ploch,..., 2-ploch, hladkých křivek a bodů. Jsou-li $S_j$, $j = 1, \ldots, k$ všechny hladké $(n-1)$-plochy z tohoto sjednocení, definujeme plošné integrály 1. resp. 2. druhu z funkce $f$ resp. pole $\vec{T}$ jako

$$\int_S f \,\mathrm{d}S = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} f \,\mathrm{d}S\,, \quad \text{resp.} \quad \int_S \vec{T}\,\mathrm{d}\vec{S} = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} \vec{T}\,\mathrm{d}\vec{S}\,,$$

mají-li výrazy na pravě straně smysl.

*Poznámka* (zobecněná křivka). V případě, že $n = 2$, zahrnuje předchozí definice i křivkový integrál. V tomto případě tedy chápeme křivku jako "1-plochu" ($\vec{\varphi} \equiv S$) a křivkový integrál přes jako "plošný integrál přes 1-plochu". Tato dohoda nám umožní formulovat následující věty v jednotném tvaru. Pod zápisem

$$\int_S f \,\mathrm{d}S \quad \text{resp.} \quad \int_S \vec{T}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

pak rozumíme

$$\int_\varphi f \,\mathrm{d}s \quad \text{resp.} \quad \int_\varphi \vec{T}\,\mathrm{d}\vec{\varphi}\,.$$

## 6.2 Gauss-Greenovy-Ostrogradského vzorce

**Úmluva**

V následujících větách budeme předpokládat:

- $\Omega$ je omezená souvislá otevřená množina v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, její hranice $\partial\Omega$ je **zobecněná** $(n-1)$**-plocha** ve smyslu předchozí definice a poznámky.
- Všechny integrované (skalární či vektorové) funkce jsou (pro jednoduchost) spojité spolu se všemi potřebnými derivacemi na $\overline{\Omega}$.
- Symbolem $\vec{\nu}$ označujeme jednotkový vektor **vnější normály** k $\Omega$, v bodech $\partial\Omega$, ve kterých existuje.

**Věta 6.1.** *Pro $f : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, resp. $\vec{T} : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ platí (za předpokladů předchozí úmluvy):*

***Gauss-Green-Ostrogradský**, pro $k \in \{1, \ldots, n\}$:*

$$\boxed{\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k}\, dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_k \, dS\,.} \tag{1}$$

***Věta o divergenci:***

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div} \vec{T}\, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{T} \cdot \vec{\nu}\, dS\,.} \tag{2}$$

**Věta 6.2.** *Pro $u, v : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí (za předpokladů předchozí úmluvy):*

***Integrace per partes (po složkách)**, pro $k \in \{1, \ldots, n\}$:*

$$\boxed{\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k}\, dx = \int_{\partial\Omega} u\, v\, \nu_k \, dS - \int_\Omega v\, \frac{\partial u}{\partial x_k}\, dx\,.} \tag{3}$$

***Integrace per partes (vektorově):***

$$\boxed{\int_\Omega u\,\nabla v\,dx = \int_{\partial\Omega} u\,v\,\vec{\nu}\,dS - \int_\Omega v\,\nabla u\,dx.} \tag{4}$$

**Věta 6.3.** *Pro $u, v : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí (za předpokladů předchozí úmluvy):*

***1. Greenova formule**:*

$$\boxed{\int_\Omega \nabla u\,\nabla v\,dx = \int_{\partial\Omega} v\,\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\,dS - \int_\Omega v\,\Delta u\,dx\,,} \tag{5}$$

*kde $\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}} := \nabla u \cdot \vec{\nu}$ je derivace ve směru vektoru $\vec{\nu}$.*

***2. Greenova formule**:*

$$\boxed{\int_\Omega \big(u\,\Delta v - v\,\Delta u\big)\,dx = \int_{\partial\Omega} \Big(u\,\frac{\partial v}{\partial\vec{\nu}} - v\,\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\Big)\,dS\,.} \tag{6}$$

**Důsledek 6.4.** *Pro $u : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí (za předpokladů předchozí úmluvy):*

$$\boxed{\int_\Omega \Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\,dS\,.} \tag{7}$$

*Dále platí (je-li $\vec{\nu}$ jednotkový vektor **vnější normály** k $\Omega$):*

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} \vec{\nu}\,dS = 0\,.} \tag{8}$$

**Poznámky k důkazům vzorců** (1)–(8):

- Vzorec (1) považujeme za základní. Všimněte si jeho analogie se známým Newton-Leibnizovým vztahem v 1D, platným např. pro $f \in \mathcal{C}^1(\langle a, b\rangle)$,

$$\int_a^b f'\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)\,. \tag{9}$$

  Interval $(a, b)$ v (9) hraje roli množiny $\Omega$ ve vztahu (1), jeho hranicí jsou dva body $a$ a $b$. Hodnoty v hraničních bodech $f(b)$ a $f(a)$ na pravé straně (9) jsou násobeny hodnotami $1$ a $-1$, které lze chápat jako hodnoty "vnější jednotkové normály k intervalu $(a, b)$", v bodech $a$ a $b$. S využitím této úvahy a Fubiniovy věty není těžké vzorec (1) v případě jednoduchých oblastí odvodit.

- Vztah (2) plyne z (1): dosaďte $f := T_k$ v (1) a sečtěte přes $k$.
- Vztah (3) plyne z (1): dosaďte $f := uv$ v (1) a derivujte součin na levé straně.
- Vztah (4) je jen vektorovým zápisem vztahu (3).
- Vztah (5) plyne z (3): místo $u$ dosaďte $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ a takto vzniklé rovnosti sečtěte přes $k$.
- Vztah (6) plyne z (5): napište si modifikaci vztahu (5), tak, že prohodíte roli $u$ a $v$. Potom odečtěte (5) a tento modifikovaný vztah.
- Vztah (7): položte $v = 1$ v (5).
- Vztah (8): položte $u = v = 1$ v (4).

## 6.3 Greenova a Stokesova věta

**Věta 6.5** (Green)**.** *Buď* $\boxed{n=2}$*. Pro* $\vec{T} : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *platí (za předpokladů předchozí úmluvy, tj. speciálně* $\partial\Omega$ *je sjednocení konečného počtu hladkých křivek a bodů):*

$$\boxed{\int_\Omega \left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2}\right) dx = \int_{\partial\Omega} \vec{T} \cdot \vec{\nu}\, d\varphi\,,} \tag{10}$$

$$\boxed{\int_\Omega \left(\frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\right) dx = \int_{\partial\Omega} \vec{T} \cdot \vec{\tau}\, d\varphi\,,} \tag{11}$$

*kde* $\vec{\nu}$ *je vnější normálový vektor (k* $\Omega$*) a* $\vec{\tau}$ *tečný vektor ke křivce* $\partial\Omega$*, která "obíhá"* $\Omega$ *tak, že má* $\Omega$ *"po levé ruce".*

*Poznámka.* Jiný zápis předchozích dvou vztahů (10), (11) (stále jsme v $\mathbb{R}^n$ pro $n = 2$) je

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div} \vec{T}\, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \vec{T} \cdot \vec{\nu}\, d\varphi\,,} \tag{12}$$

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{rot} \vec{T}\, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \vec{T} \cdot \vec{\tau}\, d\varphi\,,} \tag{13}$$

kde $\operatorname{rot} \vec{T} = \frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}$ je "dvourozměrná rotace dvourozměrného pole $\vec{T} = (T_1, T_2)$" (třetí souřadnice třírozměrné rotace pole $\vec{T} = (T_1, T_2, 0)$). Zobecněním vztahu (13) do tří dimenzí je tzv. Stokesova věta.

**Věta 6.6** (Stokes)**.** *Buď* $(S, \vec{\nu}) \subset \mathbb{R}^3$ *hladká orientovaná 2-plocha taková, že* $\partial S = \langle\vec{\varphi}\rangle$*, kde* $\vec{\varphi}$ *je Jordanova křivka, obíhající* $(S, \vec{\nu})$ *v* ***kladném smyslu****, tj.* ***v souladu "s pravidlem palce pravé ruky"****. Potom (platí-li stále úmluva z počátku této kapitoly)*

$$\boxed{\int_{(S,\vec{\nu})} \operatorname{rot} \vec{T} \cdot \vec{\nu}\, dS = \int_\varphi \vec{T} \cdot \vec{\tau}\, d\varphi = \int_\varphi \vec{T}\, d\vec{\varphi}\,.} \tag{14}$$

*Poznámka* (integrální reprezentace divergence). Nechť $K_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ je koule o středu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r \in (0, R)$, a $\vec{T} \in \mathcal{C}^1(K_R(x_0))$, pak

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{T}(x_0) = \lim_{r\to 0+} \frac{1}{\lambda_n(K_r(x_0))} \int_{\partial K_r(x_0)} \vec{T} \cdot \vec{\nu}\, \mathrm{d}S\,.} \tag{15}$$

*Poznámka* (integrální reprezentace rotace). Nechť $(S, \vec{\nu}) \equiv S_r(x_0) \subset \mathbb{R}^3$ je dvourozměrný orientovaný kruh o středu $x_0 \in \mathbb{R}^3$ a poloměru $r \in (0, R)$, který leží v rovině rovnoběžné z některou dvojicí souřadných rovin ($xy$, $xz$ nebo $yz$), s hranicí $\partial S = \langle\vec{\varphi}\rangle$, orientovanou v souladu se Stokesovou větou. Nechť dále $\vec{T} \in \mathcal{C}^1(K_R(x_0))$. Pak

$$\boxed{\left(\operatorname{rot} \vec{T} \cdot \vec{\nu}\right)(x_0) = \lim_{r\to 0+} \frac{1}{\lambda_2(S_r(x_0))} \int_\varphi \vec{T} \cdot \vec{\tau}\, d\varphi\,.} \tag{16}$$

**. . . a to je vše v ZS 2019/20**