**Vlnová rovnice.**

• **Definice:** *Buď $T > 0$, $c > 0$, $d \geq 1$ a nechť $Q_T := (0,T) \times \mathbb{R}^d$. Buďte dále $f \in \mathcal{C}(Q_T)$, $g_0$, $g_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ dané funkce. Řekneme, že $u : \overline{Q_T} \to \mathbb{R}$ je klasickým řešením Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici s pravou stranou $f$ a počátečními podmínkami $g_0$, $g_1$, pokud*

(1) $u \in \mathcal{C}^2(\overline{Q_T})$

(2)
$$\begin{aligned} \Box_c u(t,x) \equiv \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \Delta u(t,x) &= f(t,x)\,, && x \in \mathbb{R}^d\,,\ t > 0\,,\\ u(0,x) &= g_0(x)\,, && x \in \mathbb{R}^d\,,\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= g_1(x)\,, && x \in \mathbb{R}^d\,. \end{aligned}$$

• Klasické řešení Cauchyovy úlohy lze napsat v uzavřeném tvaru, má však různý tvar v různých dimenzích. Bez důkazu uvádíme níže tabulku těchto řešení, spolu s požadavky na hladkost dat $f$, $g_0$, $g_1$, které zaručí, že $u \in \mathcal{C}(\langle 0,+\infty) \times \mathbb{R}^d)$. Zájemce o důkazy odkazujema na Sekci 2.4 v knize L.C.Evans: *Partial Differential Equations*, AMS, 1998. Podle principu maxima pro vlnovou rovnici jsou níže uvedená řešení jediná ve třídě klasických řešení.

| Dimenze | Hladkost dat | Řešení |
|---|---|---|
| d=1: | $g_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ | $u(t,x) = \frac{1}{2}\Big(g_0(x-ct) + g_0(x+ct)\Big)$ |
| | $g_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ | $+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_1(y)\,\mathrm{d}y$ |
| | $f \in \mathcal{C}^1(\langle 0,+\infty) \times \mathbb{R})$ | $+\frac{c}{2}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\tau,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau$ |
| d=2: | $g_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ | $u(t,x) = \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\lvert y\rvert \leq ct} \frac{g_0(x-y)}{\sqrt{c^2t^2-y^2}}\,\mathrm{d}y$ |
| | $g_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ | $+\frac{1}{2\pi c}\int_{\lvert y\rvert \leq ct} \frac{g_1(x-y)}{\sqrt{c^2t^2-y^2}}\,\mathrm{d}y$ |
| | $f \in \mathcal{C}^1(\langle 0,+\infty) \times \mathbb{R}^2)$ | $+\frac{c}{2\pi}\int_0^t \int_{\lvert y\rvert \leq c\tau} \frac{f(t-\tau,x-y)}{\sqrt{c^2\tau^2-y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau$ |
| d=3: | $g_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$ | $u(t,x) = \frac{1}{4\pi ct}\int_{S_{ct}(0)} \Big(\frac{g_0}{ct} + \frac{\partial g_0}{\partial n}\Big)(x-y)\,\mathrm{d}S(y)$ |
| | $g_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ | $+\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(0)} g_1(x-y)\,\mathrm{d}S(y)$ |
| | $f \in \mathcal{C}^2(\langle 0,+\infty) \times \mathbb{R}^3)$ | $+\frac{1}{4\pi}\int_0^{ct}\int_{S_r(0)} \frac{f\Big(t-\frac{r}{c}, x-y\Big)}{r}\,\mathrm{d}S(y)\,\mathrm{d}r$ |