Požadavky ke zkoušce z PDR 1 (NDIR044)
ZS 2012/13, M. Rokyta

Číslo v hranatých závorkách za každou položkou seznamu je číslo paragrafu, ve kterém se dané téma na přednášce vyskytlo.

Nedílnou součástí těchto požadavků je text „**Průběh a pravidla zkoušky z NDIR044**“ – viz web přednášejícího.

Definice, pojmy, formulace

1. Definujte pojmy: obecná PDR, obecný systém PDR, řád PDR, řád systému PDR. [**1.1.**]
2. Definujte tyto typy PDR: lineární, semilineární, kvazilineární, ryze nelineární, stacionární, evoluční. [**1.1.**]
3. Definujte pojem klasického řešení Cauchyovy úlohy pro kvazilineární PDR 1. řádu. [**1.3.**]
4. Definujte pojmy: charakteristický systém a charakteristika pro kvazilineární PDR 1. řádu. [**1.3.**]
5. Formulujte (bez důkazu) multinomickou větu. [**2.1.**]
6. Definujte pojem reálně analytické funkce, pojem majorizující funkce a majorizující úlohy. [**2.1, 2.2.**]
7. Formulujte (bez důkazu) Lewyho protipříklad. [**2.2.**]
8. Definujte zobecněnou lokální Cauchyovu úlohu pro lineární rovnici k-tého řádu [**2.3**]
9. Definujte charakteristický směr pro lineární rovnici k-tého řádu, symbol této rovnice a pojem charakteristické plochy této rovnice, odvoďte charakteristické směry a plochy pro Laplaceovu rovnici, rovnici vedení tepla a vlnovou rovnici. [**2.3.**]
10. Proveďte klasifikaci lineárních PDR druhého řádu v bodě. Definujte pojem eliptická, parabolická, hyperbolická rovnice. [**2.4.**]
11. Definujte pojem Laplaceovy (resp. Laplace-Poissonovy) rovnice, definujte pojem harmonické funkce na otevřené množině. [**3.1.**]
12. Definujte fundamentální (elementární) řešení Laplaceovy rovnice (Laplaceova operátoru). [**3.1.**]
13. Definujte pojem klasického řešení Dirichletovy úlohy pro Laplace-Poissonovu rovnici na otevřené množině v $\mathbb{R}^d$, definujte Poissonův integrál a Poissonovo jádro. [**3.3.**]
14. Formulujte (bez důkazu) zobecněný slabý princip maxima pro eliptické rovnice 2. řádu. [**3.5.**]
15. Definujte pojem bariéry v bodě a pojem regulárního bodu (vzhledem k Dirichletově úloze pro Laplaceovu rovnici na omezené otevřené množině). [**3.7.**]
16. Definujte pojem klasického řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla. [**4.1.**]
17. Definujte pojem klasického řešení okrajově-počáteční úlohy pro rovnici vedení tepla (na omezené množině). [**4.1.**]
18. Formulujte (bez důkazu) slabý princip maxima pro rovnici vedení tepla na omezené množině a pro Cauchyovu úlohu pro rovnici vedení tepla. [**4.1.**]
19. Definujte pojem klasického řešení Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici. [**4.2.**]
20. Definujte pojem charakteristického kužele pro vlnovou rovnici. [**4.2.**]

Kratší nebo lehčí věty a lemmata

1. Formulujte a dokažte lemma o vztahu mezi klasickým řešením kvazilineární PDR 1. řádu a chování funkce na charakteristikách. [**1.3.**]
2. Formulujte a dokažte lemma (větu) o řešení **nehomogenní** kvazilineární PDR 1. řádu. [**1.3.**]
3. Formulujte a dokažte větu o regularitě harmonických funkcí. [**3.2.**]
4. Formulujte a dokažte slabý princip maxima pro harmonické funkce, včetně důsledku o jednoznačnosti. [**3.3.**]
5. Formulujte a dokažte větu o průměru pro harmonické funkce. [**3.4.**]
6. Formulujte a dokažte obrácenou větu o průměru pro $\mathcal{C}^2$ funkce. [**3.4.**]
7. Formulujte a dokažte Liouvilleovu větu. [**3.6.**]

Těžší nebo pracné věty

1. Formulujte a dokažte větu Cauchyovu-Kowalevské. [**2.2.**]
2. Formulujte a dokažte větu o třech potenciálech pro dimenzi $d \geq 3$. [**3.2.**]
3. Formulujte a dokažte větu o řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici na kouli. [**3.3**]
4. Formulujte a dokažte (s omezeními, které byly specifikovány na přednášce, resp. v rukopisných poznámkách) větu o existenci řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici na obecné otevřené množině. [**3.7**]
5. Formulujte a dokažte větu o existenci klasického řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla. [**4.1.**]
6. Formulujte a dokažte větu o jednoznačnosti pro charakteristický kužel a důsledek: větu o jednoznačnosti klasického řešení Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici. [**4.2.**]

Dodatečné otázky (pro rozhodnutí mezi známkou 1 a 2 nebo 2 a 3)

- Uvažujte kvazilineární rovnici 1. řádu tvaru $\sum_{j=1}^{d} a_j(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$, tedy případ, kdy funkce $a_j \in \mathcal{C}((0,T) \times \mathbb{R})$ nezávisejí explicite na proměnné x. Jakou vlastnost mají charakteristiky této rovnice? Odůvodněte. [**1.3.**]
- Diskutujte metodu charakteristik na příkladě (příklad poskytne zkoušející). [**1.3.**]
- Předveďte, jak by se převedl následující problém (problém poskytne zkoušející) na „problém typu Cauchy-Kowalevské“ a odůvodněte tak jeho lokální (reálně analytickou) řešitelnost. [**2.2.**]

M. Rokyta
25.12.2012