23. Fourierova transformace

Aplikovaná matematika IV, NMAF074

M. Rokyta, KMA MFF UK

LS 2011/12

Fourierova transformace funkcí je jednou z takzvaných **intergrálních transformací**, které přiřazují jedné funkci jinou funkci prostřednictvím integrálu s parametrem:

$$f \mapsto \int_M f(x) \underbrace{K(x,\xi)}_{\text{integrační jádro}} \, \mathrm{d}x$$

Fourierova transformace funkcí je jednou z takzvaných **intergrálních transformací**, které přiřazují jedné funkci jinou funkci prostřednictvím integrálu s parametrem:

$$f \mapsto \int_M f(x) \underbrace{K(x,\xi)}_{\text{integrační jádro}} \, dx$$

Fourierova transformace funkcí je charakterizována integračním jádrem typu $c_1 \exp(\pm c_2 i\,(x,\xi))$, kde $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ jsou reálné konstanty a $(x,\xi) = \sum_{j=1}^{m} x_j \xi_j$ je skalární součin v $\mathbb{R}^m$.

Fourierova transformace funkcí je jednou z takzvaných **intergrálních transformací**, které přiřazují jedné funkci jinou funkci prostřednictvím integrálu s parametrem:

$$f \mapsto \int_M f(x) \underbrace{K(x,\xi)}_{\text{integrační jádro}} \, \mathrm{d}x$$

Fourierova transformace funkcí je charakterizována integračním jádrem typu $c_1 \exp(\pm c_2 i\,(x,\xi))$, kde $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ jsou reálné konstanty a $(x,\xi) = \sum_{j=1}^m x_j \xi_j$ je skalární součin v $\mathbb{R}^m$.
Konkrétní tvary Fourierovy transformace se liší volbou znaménka a konstant c_1, c_2 (různí autoři používají různé volby).

Fourierova transformace funkcí je jednou z takzvaných **intergrálních transformací**, které přiřazují jedné funkci jinou funkci prostřednictvím integrálu s parametrem:

$$f \mapsto \int_M f(x) \underbrace{K(x,\xi)}_{\text{integrační jádro}} \, dx$$

Fourierova transformace funkcí je charakterizována integračním jádrem typu $c_1 \exp(\pm c_2 i\,(x,\xi))$, kde $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ jsou reálné konstanty a $(x,\xi) = \sum_{j=1}^m x_j \xi_j$ je skalární součin v $\mathbb{R}^m$.
Konkrétní tvary Fourierovy transformace se liší volbou znaménka a konstant c_1, c_2 (různí autoři používají různé volby). Nejběžnější volbou je $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}} \exp(-i\,(x,\xi))$ nebo $\exp(-2\pi i\,(x,\xi))$.

Definice (F.T. a zpětná F.T.)

Buď $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Definujeme

Definice (F.T. a zpětná F.T.)

Buď $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Definujeme

- Fourierovu transformaci (někdy též **přímou** nebo "**dopřednou**") Fourierovu transformaci funkce f předpisem

$$\mathcal{F}[f](\xi) \equiv \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-2\pi i (x,\xi)}\, \mathrm{d}x; \qquad (1)$$

Definice (F.T. a zpětná F.T.)

Buď $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Definujeme

- Fourierovu transformaci (někdy též **přímou** nebo "**dopřednou**") Fourierovu transformaci funkce f předpisem

$$\mathcal{F}[f](\xi) \equiv \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-2\pi i (x,\xi)}\, dx; \qquad (1)$$

- **zpětnou** Fourierovu transformaci funkce f předpisem

$$\mathcal{F}_{-1}[f](\xi) \equiv f^{\vee}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{2\pi i (x,\xi)}\, dx. \qquad (2)$$

Poznámka

- Je vidět, že $\widehat{f}(\xi) = f^{\vee}(-\xi)$, resp. $\widehat{f}(-\xi) = f^{\vee}(\xi)$.

Poznámka

- Je vidět, že $\widehat{f}(\xi) = f^{\vee}(-\xi)$, resp. $\widehat{f}(-\xi) = f^{\vee}(\xi)$.
- POZOR! Obecně $\mathcal{F}_{-1}[\mathcal{F}[f]] \neq f$!

Poznámka

- Je vidět, že $\widehat{f}(\xi) = f^{\vee}(-\xi)$, resp. $\widehat{f}(-\xi) = f^{\vee}(\xi)$.
- POZOR! Obecně $\mathcal{F}_{-1}[\mathcal{F}[f]] \neq f$! Tento vztah platí jen pro některé třídy funkcí (časem budeme specifikovat pro jaké).

Poznámka

- Je vidět, že $\widehat{f}(\xi) = f^{\vee}(-\xi)$, resp. $\widehat{f}(-\xi) = f^{\vee}(\xi)$.
- POZOR! Obecně $\mathcal{F}_{-1}[\mathcal{F}[f]] \neq f$! Tento vztah platí jen pro některé třídy funkcí (časem budeme specifikovat pro jaké).
- Funkci $\widehat{f}$ nazýváme též **Fourierovým obrazem** funkce f, funkci $f^{\vee}$ nazýváme též **Fourierovým vzorem** funkce f. Ve smyslu předchozí poznámky tedy ne vždy platí, že vzor obrazu nějaké funkce je tatáž funkce.

Poznámka

Obecně lze ukázat, že pokud $2\pi AB = |c|$, tvoří transformace

$$\widehat{f}(\xi) := A^m \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-ci(x,\xi)}\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

Poznámka

Obecně lze ukázat, že pokud $2\pi AB = |c|$, tvoří transformace

$$\widehat{f}(\xi) := A^m \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-ci(x,\xi)}\, \mathrm{d}x \tag{3}$$

a

$$f^{\vee}(\xi) := B^m \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{ci(x,\xi)}\, \mathrm{d}x \tag{4}$$

Poznámka

Obecně lze ukázat, že pokud $2\pi AB = |c|$, tvoří transformace

$$\widehat{f}(\xi) := A^m \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-ci(x,\xi)}\, \mathrm{d}x \tag{3}$$

a

$$f^{\vee}(\xi) := B^m \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{ci(x,\xi)}\, \mathrm{d}x \tag{4}$$

vzájemně kompatibilní dvojici dopředné a zpětné Fourierovy transformace.

Poznámka

Obecně lze ukázat, že pokud $2\pi AB = |c|$, tvoří transformace

$$\widehat{f}(\xi) := A^m \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-ci(x,\xi)}\, \mathrm{d}x \tag{3}$$

a

$$f^{\vee}(\xi) := B^m \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{ci(x,\xi)}\, \mathrm{d}x \tag{4}$$

vzájemně kompatibilní dvojici dopředné a zpětné Fourierovy transformace. (Napište jako cvičení některé z nich: nejběžnější volby jsou (a) $A = B = 1, c = 2\pi$, (b) $A = B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, c = 1$, resp (c) $A = c = 1, B = \frac{1}{2\pi}$.)

Věta 23.1 (vlastnosti symetrie pro F.T.)

1. *Je-li f sudá (resp. lichá) v proměnné x_j, je $\widehat{f}$ i $f^\vee$ sudá (resp. lichá) v proměnné ξ_j.*

Věta 23.1 (vlastnosti symetrie pro F.T.)

1. *Je-li f sudá (resp. lichá) v proměnné x_j, je $\widehat{f}$ i $f^{\vee}$ sudá (resp. lichá) v proměnné ξ_j.*
2. *Je-li $m = 1$, je*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi x \xi) f(x)\, dx \qquad \textit{pro } f \textit{ sudou,} \tag{5}$$

$$\widehat{f}(\xi) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi x \xi) f(x)\, dx \qquad \textit{pro } f \textit{ lichou.} \tag{6}$$

Věta 23.1 (vlastnosti symetrie pro F.T.)

1. *Je-li f sudá (resp. lichá) v proměnné x_j, je $\widehat{f}$ i $f^\vee$ sudá (resp. lichá) v proměnné ξ_j.*
2. *Je-li $m = 1$, je*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi x \xi) f(x)\, dx \qquad \text{pro } f \text{ sudou,} \tag{5}$$

$$\widehat{f}(\xi) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi x \xi) f(x)\, dx \qquad \text{pro } f \text{ lichou.} \tag{6}$$

3. *Je-li f sféricky symetrická, je $\widehat{f}$ i $f^\vee$ sféricky symetrická a platí $\widehat{f} = f^\vee$.*

Věta 23.2 (F.T. v $\mathbb{R}^3$)

Buď $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ sféricky symetrická funkce, $f(x) = R(r)$, $r = |x|$. Potom

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{|\xi|} \int_0^\infty r\, R(r)\, \sin(2\pi r|\xi|)\, dr\,, \qquad \xi \neq 0\,. \tag{7}$$

Věta 23.2 (F.T. v $\mathbb{R}^3$)

Buď $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ sféricky symetrická funkce, $f(x) = R(r)$, $r = |x|$. Potom

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{|\xi|} \int_0^\infty r\, R(r)\, \sin(2\pi r|\xi|)\, dr\,, \qquad \xi \neq 0\,. \tag{7}$$

Věta 23.3 (posunutí a škálování)

Platí:

$$\widehat{f(x+z)}(\xi) = e^{2\pi i(\xi,z)}\widehat{f}(\xi) \qquad z \in \mathbb{R}^m$$

Věta 23.2 (F.T. v $\mathbb{R}^3$)

Buď $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ sféricky symetrická funkce, $f(x) = R(r)$, $r = |x|$. Potom

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{|\xi|} \int_0^\infty r\, R(r) \sin(2\pi r|\xi|)\, dr\,, \qquad \xi \neq 0\,. \tag{7}$$

Věta 23.3 (posunutí a škálování)

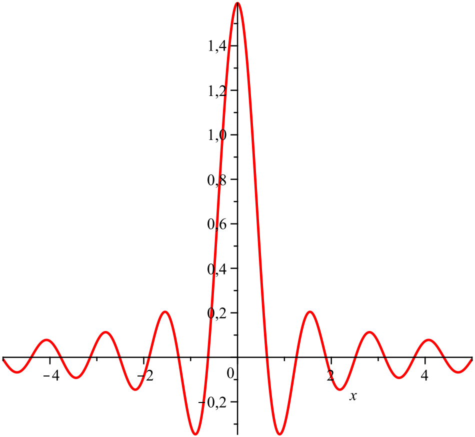
Platí:

$$\widehat{f(x+z)}(\xi) = e^{2\pi i(\xi,z)} \widehat{f}(\xi) \qquad z \in \mathbb{R}^m \tag{8}$$

$$\widehat{f(\alpha x)}(\xi) = \frac{1}{|\alpha|^m} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0. \tag{9}$$

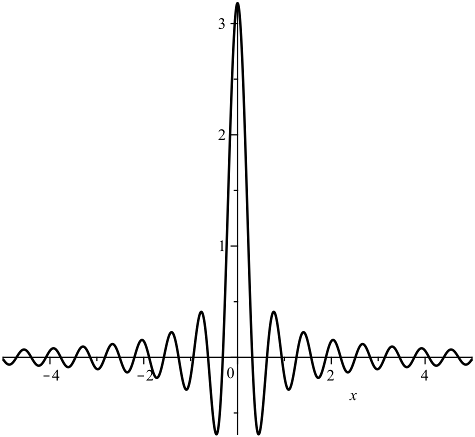
Cvičení

Buď $\chi_{\langle -1,1\rangle}(x)$ charakteristická funkce intervalu $\langle -1, 1\rangle$, tj. funkce, která nabývá na tomto intervalu hodnoty 1, a mimo něj nabývá hodnoty 0. Ukažte, že $\widehat{\chi_{\langle -1,1\rangle}(x)}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}$. Pomocí tvrzení o škálování (9) ukažte dále, že $\widehat{\chi_{\langle -\frac{n}{2\pi},\frac{n}{2\pi}\rangle}(x)}(\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(n\xi)}{\xi}$. Fourierovy obrazy takto "rozpínajících se charakteristických funkcí" (pro zvětšující se n) jsou tedy tlumeně a "stále více kmitající" sinusovky, které v nule (ve smyslu limity) nabývají hodnoty n.



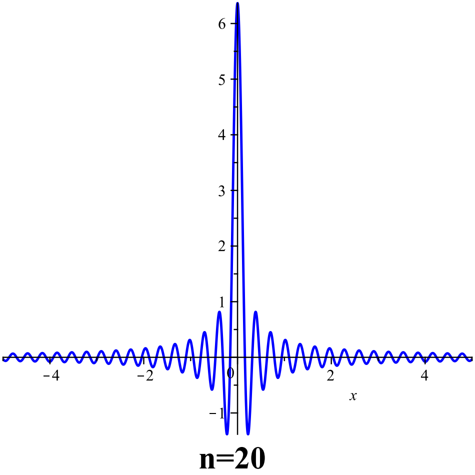
n=5

Fourierovy obrazy funkcí $\chi_{\langle -\frac{n}{2\pi}, \frac{n}{2\pi}\rangle}(x)$.

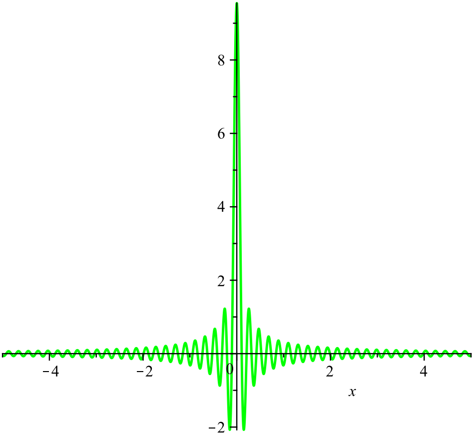


n=10

Fourierovy obrazy funkcí $\chi_{\langle -\frac{n}{2\pi}, \frac{n}{2\pi} \rangle}(x)$.



Fourierovy obrazy funkcí $\chi_{\langle -\frac{n}{2\pi}, \frac{n}{2\pi} \rangle}(x)$.



n=30

Fourierovy obrazy funkcí $\chi_{\langle -\frac{n}{2\pi}, \frac{n}{2\pi} \rangle}(x)$.

Cvičení

Ukažte, že

$$\widehat{e^{-\pi x^2}} = e^{-\pi \xi^2}\,,$$

tedy že Fourierova transformace (tak, jak jsme ji definovali) zobrazuje funkci $e^{-\pi x^2}$ samu na sebe.

Cvičení

Ukažte, že

$$\widehat{e^{-\pi x^2}} = e^{-\pi\xi^2}\,,$$

tedy že Fourierova transformace (tak, jak jsme ji definovali) zobrazuje funkci $e^{-\pi x^2}$ samu na sebe.
[Návod: je

$$\widehat{e^{-\pi x^2}}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}x = e^{-\pi\xi^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\,\mathrm{d}x}_{=:A(\xi)}.$$

Pro výpočet $A(\xi)$ využijte residuovou větu: integrujte funkci $e^{-\pi z^2}$ přes obvod obdélníka o vrcholech $-R, R, R+i\xi, -R+i\xi$ a ukažte, že po $R\to\infty$ dostanete identitu $A(\xi) = A(0)$, přičemž víme, že $A(0) = 1$.]

Poznámka

Mějme f integrabilní na $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a 1-peridickou. Potom její komplexní Fourierův koeficient je definován jako

$$c_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi i n x} \, \mathrm{d}x .$$

Poznámka

Mějme f integrabilní na $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a 1-peridickou. Potom její komplexní Fourierův koeficient je definován jako

$$c_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi i n x} \, \mathrm{d}x .$$

Pokud tutéž funkci f integrabilní na $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dodefinujeme nulou mimo interval $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, dostaneme pro její Fourierovu transformaci

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} \, \mathrm{d}x ,$$

a tedy s uvedenou konvencí platí $c_n = \widehat{f}(n)$.

Poznámka

Uvedená analogie pokračuje takto: pro **jisté** funkce platí, že jsou rovny své komplexní Fourierově řadě:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x} \, ,$$

Poznámka

Uvedená analogie pokračuje takto: pro **jisté** funkce platí, že jsou rovny své komplexní Fourierově řadě:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx} ,$$

stejně tak bude pro **jisté** funkce platit

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi ix\xi} \, d\xi$$

Poznámka

Uvedená analogie pokračuje takto: pro **jisté** funkce platí, že jsou rovny své komplexní Fourierově řadě:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x},$$

stejně tak bude pro **jisté** funkce platit

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi}\, d\xi = (\widehat{f})^{\vee}(x).$$

Věta 23.4 (Věta o inverzi I)

Buď $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ prostor rychle klesajících funkcí. Potom Fourierova transformace i zpětná Fourierova transformace zobrazují prostor $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ ***prostě*** *a* ***na*** *$\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$:*

$$\mathcal{F}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)) = \mathcal{F}_{-1}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)) = \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)\,.$$

Věta 23.4 (Věta o inverzi I)

Buď $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ prostor rychle klesajících funkcí. Potom Fourierova transformace i zpětná Fourierova transformace zobrazují prostor $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ ***prostě*** *a* ***na*** *$\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$:*

$$\mathcal{F}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)) = \mathcal{F}_{-1}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)) = \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)\,.$$

Navíc platí tzv. ***inverzní formule pro F.T.****,*

$$(\widehat{f})^{\vee}(x) = \widehat{(f^{\vee})}(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$$

neboli

Věta 23.4 (Věta o inverzi I)

Buď $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ prostor rychle klesajících funkcí. Potom Fourierova transformace i zpětná Fourierova transformace zobrazují prostor $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ ***prostě*** *a* ***na*** *$\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$:*

$$\mathcal{F}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)) = \mathcal{F}_{-1}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)) = \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)\,.$$

Navíc platí tzv. ***inverzní formule pro F.T.****,*

$$(\widehat{f})^{\vee}(x) = \widehat{(f^{\vee})}(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$$

neboli

$$\mathcal{F}_{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = \mathcal{F}[\mathcal{F}_{-1}[f]](x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m).$$

Věta 23.5 (Věta o inverzi II)

- *Je-li* $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$*, pak existuje* $\widehat{f}(\xi)$ *ve všech bodech* ξ *a platí:*

Věta 23.5 (Věta o inverzi II)

- *Je-li* $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$*, pak existuje* $\widehat{f}(\xi)$ *ve všech bodech* ξ *a platí:* $\widehat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$*,*

Věta 23.5 (Věta o inverzi II)

- *Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$, pak existuje $\widehat{f}(\xi)$ ve všech bodech ξ a platí: $\widehat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$, $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$,*

Věta 23.5 (Věta o inverzi II)

- *Je-li* $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$*, pak existuje* $\widehat{f}(\xi)$ *ve všech bodech* ξ *a platí:* $\widehat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$, $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$, $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Věta 23.5 (Věta o inverzi II)

- *Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$, pak existuje $\widehat{f}(\xi)$ ve všech bodech ξ a platí: $\widehat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$, $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$, $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$. Obecně ale* ***nemusí*** *být $\widehat{f}$ prvkem prostoru $L^1(\mathbb{R}^m)$.*

Věta 23.5 (Věta o inverzi II)

- *Je-li* $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$*, pak existuje* $\widehat{f}(\xi)$ *ve všech bodech* ξ *a platí:* $\widehat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$, $|\widehat{f}(\xi)| \le \|f\|_1$, $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$. *Obecně ale* ***nemusí*** *být* $\widehat{f}$ *prvkem prostoru* $L^1(\mathbb{R}^m)$.
- *Je-li* $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ *taková, že i* $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^m)$*, pak* ***inverzní formule pro F.T.*** *platí pro skoro všechna* x*:*

$$(\widehat{f})^\vee(x) = \widehat{(f^\vee)}(x) = f(x) \quad \textit{pro s.v. } x \in \mathbb{R}^m$$

neboli

Věta 23.5 (Věta o inverzi II)

- *Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$, pak existuje $\widehat{f}(\xi)$ ve všech bodech ξ a platí: $\widehat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$, $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$, $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$. Obecně ale **nemusí** být $\widehat{f}$ prvkem prostoru $L^1(\mathbb{R}^m)$.*
- *Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ taková, že i $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^m)$, pak **inverzní formule pro F.T.** platí pro skoro všechna x:*

$$(\widehat{f})^{\vee}(x) = \widehat{(f^{\vee})}(x) = f(x) \quad \textit{pro s.v. } x \in \mathbb{R}^m$$

neboli

$$\mathcal{F}_{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = \mathcal{F}[\mathcal{F}_{-1}[f]](x) = f(x) \quad \textit{pro s.v. } x \in \mathbb{R}^m.$$

Definice (konvoluce funkcí)

Buďte $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Pak definujeme jejich **konvoluci** jako

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{10}$$

Definice (konvoluce funkcí)

Buďte $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Pak definujeme jejich **konvoluci** jako

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{10}$$

Věta 23.6 (základní vlastnosti konvoluce)

Pro $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$ je

$$f * g \in L^1(\mathbb{R}^m), \qquad g * f \in L^1(\mathbb{R}^m),$$

Definice (konvoluce funkcí)

Buďte $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Pak definujeme jejich **konvoluci** jako

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{10}$$

Věta 23.6 (základní vlastnosti konvoluce)

Pro $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$ je

$$f * g \in L^1(\mathbb{R}^m), \qquad g * f \in L^1(\mathbb{R}^m),$$

a navíc

$$f * g = g * f\,.$$

Věta 23.7 (konvoluce a F.T.)

- *Pro* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$ *platí*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}\,.$$

Věta 23.7 (konvoluce a F.T.)

- *Pro* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$ *platí*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}\,.$$

- *Pokud je* $f, g, \widehat{f}, \widehat{g}, f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^m)$, *platí i*

$$\widehat{f \cdot g} = \widehat{f} * \widehat{g}\,.$$

Věta 23.8 (vztah F.T., konvoluce a derivace na $\mathscr{S}$)

Buďte $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Potom i $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, $g * f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, $D^\alpha f, D^\alpha g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ (pro jakýkoli multiindex α);

Věta 23.8 (vztah F.T., konvoluce a derivace na $\mathscr{S}$)

Buďte $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$*. Potom i* $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, $g * f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, $D^\alpha f, D^\alpha g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ *(pro jakýkoli multiindex* α*); navíc platí*

$$D^\alpha(f * g) \;=\; (D^\alpha f) * g \;=\; f * (D^\alpha g)$$

Věta 23.8 (vztah F.T., konvoluce a derivace na $\mathscr{S}$)

Buďte $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Potom i $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, $g * f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, $D^\alpha f, D^\alpha g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ (pro jakýkoli multiindex α); navíc platí

$$\begin{aligned} D^\alpha(f * g) &= (D^\alpha f) * g = f * (D^\alpha g) \\ \widehat{D_x^\alpha f}(\xi) &= (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Věta 23.8 (vztah F.T., konvoluce a derivace na $\mathscr{S}$)

Buďte $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Potom i $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, $g * f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, $D^\alpha f, D^\alpha g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ (pro jakýkoli multiindex α); navíc platí

$$
\begin{aligned}
D^\alpha(f * g) &= (D^\alpha f) * g \; = \; f * (D^\alpha g) \\
\widehat{D_x^\alpha f}(\xi) &= (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi) \\
D_\xi^\alpha \widehat{f}(\xi) &= (-2\pi i)^{|\alpha|} \, \widehat{x^\alpha f(x)}(\xi)
\end{aligned}
$$

Věta 23.8 (vztah F.T., konvoluce a derivace na $\mathscr{S}$)

Buďte $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Potom i $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, $g * f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, $D^\alpha f, D^\alpha g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ (pro jakýkoli multiindex α); navíc platí

$$
\begin{aligned}
D^\alpha(f * g) &= (D^\alpha f) * g = f * (D^\alpha g) \\
\widehat{D_x^\alpha f}(\xi) &= (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi) \\
D_\xi^\alpha \widehat{f}(\xi) &= (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f(x)}(\xi)
\end{aligned}
$$

kde pro $x = [x_1, \ldots, x_m]$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, definujeme $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$.

Cvičení

- Nalezněte metodou Fourierovy transformace (jedno, partikulární) řešení ODR

$$y'' - y = e^{-x^2}.$$

Cvičení

- Nalezněte metodou Fourierovy transformace (jedno, partikulární) řešení ODR

$$y'' - y = e^{-x^2}.$$

- Ukažte, že jediné řešení rovnice $y'' = 0$ v prostoru $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ je identicky nulové řešení. Uvědomte si omezení, které tedy vynucuje metoda Fourierovy transformace, uvažovaná pouze v prostoru $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Lemma 23.9

Buďte $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$*, potom*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\widehat{g}(x)\,dx\,. \tag{11}$$

Lemma 23.9

Buďte $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, potom

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(x) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \widehat{g}(x)\, dx\,. \tag{11}$$

Definice

Buď $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$. Definujme Fourierovu transformaci resp. zpětnou Fourierovu transformaci distribuce T jako

$$\widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi})\,, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)\,, \tag{12}$$

Lemma 23.9

Buďte $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, potom

$$\int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(x) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \widehat{g}(x)\, dx\,. \tag{11}$$

Definice

Buď $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$. Definujme Fourierovu transformaci resp. zpětnou Fourierovu transformaci distribuce T jako

$$\widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi})\,, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)\,, \tag{12}$$

resp.

$$T^{\vee}(\varphi) = T(\varphi^{\vee})\,, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)\,. \tag{13}$$

Věta 23.10

- *Fourierova (resp. zpětná Fourierova) transformace je na $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ dobře definovaná, tj. je-li $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, pak i $\widehat{T}, T^\vee \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$.*

Věta 23.10

- *Fourierova (resp. zpětná Fourierova) transformace je na $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ dobře definovaná, tj. je-li $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, pak i $\widehat{T}, T^{\vee} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$.*
- *Fourierova transformace je **prosté** zobrazení prostoru $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ **na** prostor $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$.*

Věta 23.10

- *Fourierova (resp. zpětná Fourierova) transformace je na $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ dobře definovaná, tj. je-li $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, pak i $\widehat{T}, T^{\vee} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$.*
- *Fourierova transformace je **prosté** zobrazení prostoru $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ **na** prostor $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$. Totéž tvrzení platí o i zpětné Fourierově transformaci.*

Věta 23.10

- *Fourierova (resp. zpětná Fourierova) transformace je na $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ dobře definovaná, tj. je-li $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, pak i $\widehat{T}, T^\vee \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$.*
- *Fourierova transformace je **prosté** zobrazení prostoru $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ **na** prostor $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$. Totéž tvrzení platí o i zpětné Fourierově transformaci.*
- *Pro všechna $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ platí*

$$(\widehat{T})^\vee = \widehat{T^\vee} = T\,.$$

Cvičení

Ukažte, že pro $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ platí $\widehat{T}(\varphi(x)) = T^{\vee}(\varphi(-x))$

Cvičení

Ukažte, že pro $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ platí $\widehat{T}(\varphi(x)) = T^{\vee}(\varphi(-x))$ a tedy pokud je $T(\varphi(x)) = T(\varphi(-x))$ (těmto distribucím se někdy říká **sudé distribuce**), pak $\widehat{T} = T^{\vee}$.

Cvičení

Ukažte, že pro $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ platí $\widehat{T}(\varphi(x)) = T^{\vee}(\varphi(-x))$ a tedy pokud je $T(\varphi(x)) = T(\varphi(-x))$ (těmto distribucím se někdy říká **sudé distribuce**), pak $\widehat{T} = T^{\vee}$.

Cvičení

Spočtěte:

- $\widehat{\delta} = \delta^{\vee} = 1$,

Cvičení

Ukažte, že pro $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ platí $\widehat{T}(\varphi(x)) = T^{\vee}(\varphi(-x))$ a tedy pokud je $T(\varphi(x)) = T(\varphi(-x))$ (těmto distribucím se někdy říká **sudé distribuce**), pak $\widehat{T} = T^{\vee}$.

Cvičení

Spočtěte:

- $\widehat{\delta} = \delta^{\vee} = 1$,
- $\widehat{1} = 1^{\vee} = \delta$,

Cvičení

Ukažte, že pro $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ platí $\widehat{T}(\varphi(x)) = T^{\vee}(\varphi(-x))$ a tedy pokud je $T(\varphi(x)) = T(\varphi(-x))$ (těmto distribucím se někdy říká **sudé distribuce**), pak $\widehat{T} = T^{\vee}$.

Cvičení

Spočtěte:

- $\widehat{\delta} = \delta^{\vee} = 1$,
- $\widehat{1} = 1^{\vee} = \delta$,
- $\widehat{\delta_a} = e^{-2\pi i a \xi}$,

Cvičení

Ukažte, že pro $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ platí $\widehat{T}(\varphi(x)) = T^{\vee}(\varphi(-x))$ a tedy pokud je $T(\varphi(x)) = T(\varphi(-x))$ (těmto distribucím se někdy říká **sudé distribuce**), pak $\widehat{T} = T^{\vee}$.

Cvičení

Spočtěte:

- $\widehat{\delta} = \delta^{\vee} = 1$,
- $\widehat{1} = 1^{\vee} = \delta$,
- $\widehat{\delta_a} = e^{-2\pi i a \xi}$,
- $\widehat{e^{2\pi i a x}} = \delta_a$,

Cvičení

Ukažte, že pro $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ platí $\widehat{T}(\varphi(x)) = T^{\vee}(\varphi(-x))$ a tedy pokud je $T(\varphi(x)) = T(\varphi(-x))$ (těmto distribucím se někdy říká **sudé distribuce**), pak $\widehat{T} = T^{\vee}$.

Cvičení

Spočtěte:

- $\widehat{\delta} = \delta^{\vee} = 1$,
- $\widehat{1} = 1^{\vee} = \delta$,
- $\widehat{\delta_a} = e^{-2\pi i a \xi}$,
- $\widehat{e^{2\pi i a x}} = \delta_a$,
- $\widehat{\sin x} = \frac{1}{2i}\left(\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{-\frac{1}{2\pi}}\right)$.

Věta 23.11 (vztah F.T. a derivace na $\mathscr{S}'$)

Buď $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ a α multiindex;

Věta 23.11 (vztah F.T. a derivace na $\mathscr{S}'$)

Buď $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ a α multiindex; pak

$$\widehat{D^\alpha T} = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \, \widehat{T} \, ,$$

Věta 23.11 (vztah F.T. a derivace na $\mathscr{S}'$)

Buď $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ a α multiindex; pak

$$\begin{aligned} \widehat{D^\alpha T} &= (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \, \widehat{T} \,, \\ D^\alpha \widehat{T} &= (-2\pi i)^{|\alpha|} \, \widehat{x^\alpha T} \,, \end{aligned}$$

Věta 23.11 (vztah F.T. a derivace na $\mathscr{S}'$)

Buď $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ a α multiindex; pak

$$
\begin{aligned}
\widehat{D^\alpha T} &= (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \, \widehat{T}\,, \\
D^\alpha \widehat{T} &= (-2\pi i)^{|\alpha|} \, \widehat{x^\alpha T}\,,
\end{aligned}
$$

resp.

$$
(D^\alpha T)^\vee = (-2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \, (T)^\vee\,,
$$

Věta 23.11 (vztah F.T. a derivace na $\mathscr{S}'$)

Buď $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ a α multiindex; pak

$$\begin{aligned} \widehat{D^\alpha T} &= (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \, \widehat{T} \,, \\ D^\alpha \widehat{T} &= (-2\pi i)^{|\alpha|} \, \widehat{x^\alpha T} \,, \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} (D^\alpha T)^\vee &= (-2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \, (T)^\vee \,, \\ D^\alpha (T)^\vee &= (2\pi i)^{|\alpha|} \, (x^\alpha T)^\vee \,. \end{aligned}$$

Poznámka (parametrické distribuce)

V případě, že $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ a $\varphi = \varphi(x, y)$, kde $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^k$, píšeme místo $T(\varphi(x, y))$ často pro upřesnění $\underset{x}{\mathrm{T}}(\varphi(x, y))$, abychom zvýraznili skutečnost, že "distribuce T působí pouze na proměnnou x funkce φ".

Poznámka (parametrické distribuce)

V případě, že $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ a $\varphi = \varphi(x,y)$, kde $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^k$, píšeme místo $T(\varphi(x,y))$ často pro upřesnění $\underset{x}{\mathrm{T}}(\varphi(x,y))$, abychom zvýraznili skutečnost, že "distribuce T působí pouze na proměnnou x funkce φ". Výraz $\underset{x}{\mathrm{T}}(\varphi(x,y))$ pak obsahuje ještě "volnou proměnnou y". Takovému výrazu se někdy také říká **distribuce s parametrem**, stejně jako bychom integrálu $\int_M T(x)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x$ (pokud by T byla funkce) říkali integrál s parametrem.

Tvrzení 23.12

Buď $T \in \mathscr{S}'_K(\mathbb{R}^m)$, tj. distribuce s kompaktním nosičem. Potom $\widehat{T}$ je regulární distribuce, tj. distribuce reprezentovaná funkcí $f(\xi)$, kde

$$f(\xi)\ (\equiv \widehat{T}(\xi)\,) = \underset{x}{\mathrm{T}}(e^{-2\pi i x\xi})\,.$$

Tvrzení 23.12

Buď $T \in \mathscr{S}'_K(\mathbb{R}^m)$, tj. distribuce s kompaktním nosičem. Potom $\widehat{T}$ je regulární distribuce, tj. distribuce reprezentovaná funkcí $f(\xi)$, kde

$$f(\xi)\ (\equiv \widehat{T}(\xi))\ = \underset{x}{\mathrm{T}}(e^{-2\pi i x\xi})\,.$$

Navíc, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ je pomalu rostoucí v nekonečnu.

Definice (Tenzorový součin funkcí a distribucí)

Tenzorový součin funkcí $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^k)$, resp. distribucí $S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^k)$ je definován takto:

$$\Big(f \otimes g\Big)(x,y) := f(x)\,g(y)\,, \qquad \Big(S \otimes T\Big)(\varphi) := \underset{x}{\mathrm{S}}(\underset{y}{\mathrm{T}}(\varphi(x,y)))\,.$$

Definice (Tenzorový součin funkcí a distribucí)

Tenzorový součin funkcí $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^k)$, resp. distribucí $S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^k)$ je definován takto:

$$\Big(f \otimes g\Big)(x, y) := f(x)\, g(y)\,, \qquad \Big(S \otimes T\Big)(\varphi) := \underset{x}{\mathrm{S}}(\underset{y}{\mathrm{T}}(\varphi(x, y)))\,.$$

Věta 23.13

Pro $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^k)$, resp. $S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^k)$ platí

$$\widehat{f \otimes g}(\xi, \eta) = \widehat{f}(\xi) \otimes \widehat{g}(\eta)\,, \qquad \widehat{S \otimes T} = \widehat{S} \otimes \widehat{T}\,.$$

Definice (Konvoluce funkcí a distribucí)

Konvoluce funkcí $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$ (pro zopakování) a distribucí $S \in \mathscr{S}'$, $T \in \mathscr{S}'_K$ je definována takto:

$$\begin{aligned}\big(f * g\big)(x) &:= \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)\,g(y)\,dy\,,\\ \big(S * T\big)(\varphi) &:= \underset{x}{\mathrm{S}}(\underset{y}{\mathrm{T}}(\varphi(x+y)))\,.\end{aligned}$$

Definice (Konvoluce funkcí a distribucí)

Konvoluce funkcí $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$ (pro zopakování) a distribucí $S \in \mathscr{S}'$, $T \in \mathscr{S}'_K$ je definována takto:

$$\big(f * g\big)(x) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)\,g(y)\,dy\,,$$

$$\big(S * T\big)(\varphi) := \underset{x}{\mathrm{S}}(\underset{y}{\mathrm{T}}(\varphi(x+y)))\,.$$

Věta 23.14 (Vztah F.T. a konvoluce v distribucích)

Buďte $S \in \mathscr{S}'$, $T \in \mathscr{S}'_K$. Potom

$$\widehat{S * T} = \widehat{S} \cdot \widehat{T}\,.$$

Cvičení

Ukažte, že pro $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ platí: $0 * T = 0$;

Cvičení

Ukažte, že pro $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ platí: $0 * T = 0$; $\delta * T = T$;

Cvičení

Ukažte, že pro $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ platí: $0 * T = 0$; $\delta * T = T$; $D^\alpha \delta * T = D^\alpha T$.

Cvičení

Ukažte, že pro $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ platí: $0 * T = 0$; $\delta * T = T$; $D^\alpha \delta * T = D^\alpha T$.

Poznámka

Platí, že pokud studujeme konvoluci n distribucí $T_1, \dots, T_n \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, přičemž alespoň $(n-1)$ z nich má kompaktní nosič, je konvoluce $T_1 * \dots * T_n$ **komutativní a asociativní**. Obecně však nemusí platit ani asociativita: ukažte, že

$$1 * (\delta' * Y) = 1 * Y' = 1 * \delta = 1$$

zatímco

$$(1 * \delta') * Y = 0 * Y = 0.$$

Věta 23.15

Buďte $S, T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, přičemž alespoň jedna z nich má kompaktní nosič. Potom

$$(D^\alpha S) * T = D^\alpha (S * T) = S * (D^\alpha T)\,.$$

Věta 23.16

Buď L lineární diferenciální operátor (obyčejný nebo parciální) s konstantními koeficienty.

Věta 23.16

Buď L lineární diferenciální operátor (obyčejný nebo parciální) s konstantními koeficienty. Nechť u_0 je fundamentální řešení operátoru L, tj. nechť platí

$$L(u_0) \stackrel{\mathscr{S}'}{=} \delta \,.$$

Věta 23.16

Buď L lineární diferenciální operátor (obyčejný nebo parciální) s konstantními koeficienty. Nechť u_0 je fundamentální řešení operátoru L, tj. nechť platí

$$L(u_0) \stackrel{\mathscr{S}'}{=} \delta\,.$$

Buď $f \in \mathscr{S}'$ taková, že konvoluce

$$u := u_0 * f$$

je dobře definovaná v $\mathscr{S}'$.

Věta 23.16

Buď L lineární diferenciální operátor (obyčejný nebo parciální) s konstantními koeficienty. Nechť u_0 je fundamentální řešení operátoru L, tj. nechť platí

$$L(u_0) \stackrel{\mathscr{S}'}{=} \delta\,.$$

Buď $f \in \mathscr{S}'$ taková, že konvoluce

$$u := u_0 * f$$

je dobře definovaná v $\mathscr{S}'$. Potom

$$L(u) \stackrel{\mathscr{S}'}{=} f\,.$$