PÍSEMKA PDR1
5.1.2011

① Zadání:

$$\sqrt{x}\,u_x + \sqrt{y}\,u_y + \sqrt{z}\,u_z = 0 \quad , \quad x>0, y>0, z>0 \qquad (1)$$

$$u(1,y,z) = y - z \qquad y>0, z>0 \qquad (2)$$

Nalezneme obecné řešení metodou charakteristik, a to oběma používanými způsoby:

(a) „parametrizovaná charakteristika".

Z (1) plynou charakteristické rovnice

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{x} & x &= x(t) \\ \dot{y} &= \sqrt{y} & y &= y(t) \\ \dot{z} &= \sqrt{z} & z &= z(t) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

kde „tečka" je derivování dle t. Volme $x_p>0$, $y_p>0$, $z_p>0$ libovolně, ale tak, že $x_p \neq 1$ a uvažujme ke (3) sadu počátečních podmínek tvaru

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= x_p \\ y(0) &= y_p \\ z(0) &= z_p \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Rovnice $\dot{x} = \sqrt{x}$ má obecné řešení $2\sqrt{x} = t + c$. Z počáteční podmínky $x(0) = x_p$ dostáváme $c = 2\sqrt{x_p}$, tedy

$$x = \left(\frac{t}{2} + \sqrt{x_p}\right)^2$$

a podobně

$$y = \left(\frac{t}{2} + \sqrt{y_p}\right)^2 , \quad z = \left(\frac{t}{2} + \sqrt{z_p}\right)^2 ,$$

určují (parametricky) charakteristiky rovnice (1).

Charakteristika, procházející bodem $[x_p, y_p, z_p]$ protne rovinu $\{x=1\}$ (kde je zadána počáteční podmínka pro u) pro hodnotu t, splňující

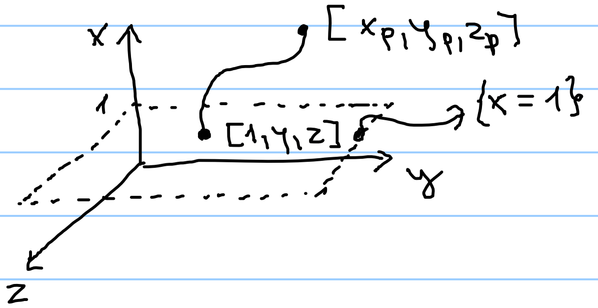
$$1 = \left(\frac{t}{2} + \sqrt{x_p}\right)^2$$

tedy pro $t_0 = 2(1-\sqrt{x_p})$.

Odpovídající souřadnice y, z, bodu na této rovině jsou tak

$$y\big|_{t=t_0} = \left(1-\sqrt{x_p}+\sqrt{y_p}\right)^2 , \quad z\big|_{t=t_0} = \left(1-\sqrt{x_p}+\sqrt{z_p}\right)^2 \qquad (5)$$

(viz obrázek).



Protože řešení u je konstantní na charakteristikách, je

$$\left.\begin{aligned} u(x_p,y_p,z_p) &\overset{(5)}{=} u\left(1,\ (1-\sqrt{x_p}+\sqrt{y_p})^2,\ (1-\sqrt{x_p}+\sqrt{z_p})^2\right) = \\ &\overset{(2)}{=} (1-\sqrt{x_p}+\sqrt{y_p})^2 - (1-\sqrt{x_p}+\sqrt{z_p})^2 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Konečně, protože $[x_p, y_p, z_p]$ je libovolný bod prvního oktantu v $\mathbb{R}^3$, plyne z (6)

$$\boxed{u(x,y,z) = (1-\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 - (1-\sqrt{x}+\sqrt{z})^2} \qquad (7)$$

což je hledané řešení.

(b) metoda „charakteristika jako průnik dvou ploch".

Z (3) plyne například $(x>0, y>0, z>0)$

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{y}} \Rightarrow (\sqrt{x})^{\cdot} = (\sqrt{y})^{\cdot}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^{\cdot} = 0 \Rightarrow \underline{\sqrt{x}-\sqrt{y} = c}$$

Podobně například také $\underline{\sqrt{x}-\sqrt{z} = c}$, tedy každá funkce tvaru

$$u(x,y,z) = F(\sqrt{x}-\sqrt{y}, \sqrt{x}-\sqrt{z}), \qquad (8)$$

kde F je dostatečně hladká, je řešením (1) – viz rozbor situace na cvičeních.

Má však navíc být $u(1,y,z) = F(\underbrace{1-\sqrt{y}}_{a}, \underbrace{1-\sqrt{z}}_{b}) \overset{(2)}{=} y - z$;

označme tedy $a = 1-\sqrt{y}$, $b = 1-\sqrt{z}$, a dostaneme

$$(a-1)^2 - (b-1)^2 = y - z = F(a,b), \qquad \forall a,b \tag{9}$$

tedy

$$u(x,y,z) = F(\sqrt{x}-\sqrt{y}, \sqrt{x}-\sqrt{z})$$

$$\overset{(9)}{=} (\sqrt{x}-\sqrt{y}-1)^2 - (\sqrt{x}-\sqrt{z}-1)^2,$$

což je ovšem totéž, co (7).

☒

---

② Zadání:

$$u_{xx} - 2u_{xy} - 8u_{yy} + 6u_y = 0 \tag{10}$$

Rovnice (10) je hyperbolická, neboť pro $a = 1, b = -2, c = -8$ je $b^2 - 4ac = 4 + 4\cdot 8 > 0$ všude v $\mathbb{R}^2$.

Kýžený finální tvar by tedy měl být typu (α neznáme)

$$v_{ss} - v_{tt} + \alpha v = 0 \tag{11}$$

(nové proměnné s,t převádějící hlavní část, nová funkce v, anulující případné 1. derivace).

(a) Transformace hlavní části:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -8 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \quad \underbrace{\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}}_{P}$$

Zavedením nových proměnných $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} := P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tedy

$$s = x, \qquad t = \frac{1}{3}(x+y)$$

dostaneme postupně
$$u_x = u_s + \frac{1}{3}u_t$$
$$u_y = \frac{1}{3}u_t$$
$$u_{xx} = u_{ss} + \frac{2}{3}u_{st} + \frac{1}{9}u_{tt}$$
$$u_{xy} = \frac{1}{3}u_{st} + \frac{1}{9}u_{tt}$$
$$u_{yy} = \frac{1}{9}u_{tt}$$

tedy

$$u_{xx} - 2u_{xy} - 8u_{yy} + 6u_y = u_{ss} + u_{st}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) +$$
$$+ u_{tt}\left(\frac{1}{9} - \frac{2}{9} - \frac{8}{9}\right) + 6 \cdot \frac{1}{3}u_t = \boxed{u_{ss} - u_{tt} + 2u_t = 0} \quad (12)$$

je kanonický tvar.

(b) Položme $u = ve^{-\frac{2t}{-2}} = ve^t$ (definujeme tím fci $v = v(s,t)$)

Pak
$$u_{ss} = v_{ss}e^t$$
$$u_t = (v_t + v)e^t$$
$$u_{tt} = (v_{tt} + 2v_t + v)e^t$$

tedy výraz v (12) je roven
$$e^t\left[v_{ss} - (v_{tt} + 2v_t + v) + 2(v_t + v)\right]$$
$$= e^t\left[v_{ss} - v_{tt} + v\right] = 0 \iff \boxed{v_{ss} - v_{tt} + v = 0}$$

je hledaný finální tvar
(srov. (11))

☒

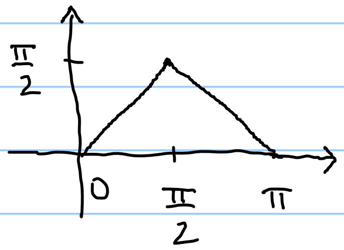
③ Zadání:

$$u_t - u_{xx} = 0 \qquad (t,x) \in (0,\infty] \times (0,\pi) \qquad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} &u(t,0) = u(t,\pi) = 0 && t \geq 0 \\ &u(0,x) = \underbrace{\frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|}_{g(x)} && x \in [0,\pi] \end{aligned}\right\} (14)$$

Funkce $g(x)$ vypadá takto:

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in [0,\frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & x \in [\frac{\pi}{2},\pi] \end{cases}$$



Formální separace

$$u(t,x) = T(t) \cdot X(x)$$

Z rovnice (13) dostaneme

$$T'X = TX''$$

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda = \text{konst}$$ (diskuse jako na cvičení)

Tj. $\underbrace{T' = \lambda T}$ & $\underbrace{X'' - \lambda X = 0}$ (15)

Z okrajových podmínek (14) plyne
$$\begin{cases} T(t)X(0) = 0 & t > 0 \\ T(t)X(\pi) = 0 & t > 0 \end{cases}$$
[$T(0)X(x) = g(x)$ nelze splnit zároveň s rovnicí]

$$\Downarrow$$

$$X(0) = X(\pi) = 0 \qquad (16)$$

Netriviální řešení (15) & (16) existují (viz poznámky k cvičení) pouze pro

$$\lambda = -n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

a jsou tvaru $X_n(x) = \sin nx$ (17)

Rovnice pro T s těmito λ pak je tvaru $T' = -n^2 T$ a má obecné řešení

$$T_n(x) = c_n e^{-n^2 t} \qquad (18)$$

V souladu s (17), (18) hledáme u ve tvaru

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin nx \qquad (19)$$

Nutná podmínka pro to, aby $u(0,x) = g(x)$, je tedy aby

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = g(x),$$

tedy aby c_n byly koeficienty sinové Fourierovy řady $g(x)$.

Proto

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x) \sin nx = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x \sin nx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin nx \right] =$$

$$= \dots = \frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 2k \\ \dfrac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)^2} & \text{pro } n = 2k+1 \end{cases}$$

Proto (formálně):

$$\boxed{u(t,x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} e^{-(2k+1)^2 t} \sin(2k+1)x}$$