Gauss-Greenovy-Ostrogradského formule

Následující vztahy dávají do souvislosti integrál přes **oblast plné dimenze** Ω s integrálem přes **její hranici** $\partial\Omega$. V uvedených vztazích předpokládáme:

- Je-li Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, je její hranice $\partial\Omega$ zobecněná $(d-1)$-plocha, a symbol $\mathrm{d}S$ označuje plošný integrál prvního druhu přes plochu $\partial\Omega$.
- Je-li Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^2$, je její hranice $\partial\Omega$ po částech hladká jednoduchá křivka, symbol $\mathrm{d}S$ pak označuje křivkový integrál prvního druhu přes křivku $\partial\Omega$.
- Hranice $\partial\Omega$ je dostatečně hladká (alespoň lipschitzovská), tj. zejména: ve skoro všech bodech $\partial\Omega$ existuje jednotkový vektor vnější normály $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots \nu_d)$.
- Všechny integrované (skalární či vektorové) funkce jsou (pro jednoduchost) spojité spolu se všemi potřebnými derivacemi na $\overline{\Omega}$.

1. Základní věta:

$$\boxed{\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F\nu_k\,\mathrm{d}S\,, \qquad k = 1, \dots, d} \tag{1}$$

Gauss-Green-Ostrogradský

2. Odvozené vztahy:

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div}\vec{T}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \vec{T}\cdot\vec{\nu}\,\mathrm{d}S\,,} \tag{2}$$

Věta o divergenci

$$\boxed{\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\,v\,\nu_k\,\mathrm{d}S - \int_\Omega v\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x} \tag{3}$$

Per partes po složkách

$$\boxed{\int_\Omega u\,\nabla v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\,v\,\vec{\nu}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega v\,\nabla u\,\mathrm{d}x} \tag{4}$$

Per partes vektorově

$$\boxed{\int_\Omega \nabla u\,\nabla v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v\,\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega v\,\Delta u\,\mathrm{d}x} \tag{5}$$

1. Greenova formule

… kde $\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}} := \nabla u\cdot\vec{\nu}$ je derivace ve směru normálového vektoru

$$\boxed{\int_\Omega \big(u\,\Delta v - v\,\Delta u\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\Big(u\,\frac{\partial v}{\partial\vec{\nu}} - v\,\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\Big)\,\mathrm{d}S} \tag{6}$$

2. Greenova formule

3. Další důsledky:

$$\boxed{\int_\Omega \Delta u\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\,\mathrm{d}S} \tag{7}$$

$$\boxed{\int_{\partial\Omega}\vec{\nu}\,\mathrm{d}S = 0} \tag{8}$$

<u>**Odvození vztahů** (1)–(8)</u>

4. Poznámka k důkazu vzorce (1)**:**
Jako základní ze všech uváděných vztahů jsem si vybral vzorec (1) především pro jeho bezpostřední analogii se známým (jednodimenzionálním) Newton-Leibnizovým vztahem

$$\int_a^b F' \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a) \,. \tag{$*$}$$

Pro jednoduchost předpokládáme například F, $F' \in \mathcal{C}(\langle a, b\rangle)$. Potom Ω ve vztahu (1) hraje roli intervalu (a, b) v $(*)$, jehož „hranicí“ jsou dva body a a b. Hodnoty v hraničních bodech $F(b)$ a $F(a)$ na pravé straně vztahu $(*)$ jsou násobeny hodnotami 1 a -1, které lze chápat jako hodnoty „vnější jednotkové normály k intervalu (a, b) ve směru osy x“, v bodech a a b.

5. Z (1) **plynou snadno všechny ostatní vztahy** (2)–(8)**, v daném pořadí:**

- Vztah (2) plyne z (1): dosaďte $F := T_k$ v (1) a sečtěte přes k.
- Vztah (3) plyne z (1): dosaďte $F := uv$ v (1) a derivujte součin na levé straně.
- Vztah (4) je jen vektorovým zápisem vztahu (3).
- Vztah (5) plyne z (3): místo u dosaďte $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ a takto vzniklé rovnosti sečtěte přes k.
- Vztah (6) plyne z (5): napište si vztah (5′), který vznikne z (5) tím, že prohodíte roli u a v. Potom odečtěte (5′) a (5).
- Vztah (7): položte $v = 1$ v (5).
- Vztah (8): položte $u = v = 1$ v (4).

M. Rokyta, 26.2.1999, drobná úprava pro potřeby přednášky z PDR1: 7.1.2010