

Cvičení z PDR1 (NDIR044)

ZS 2010/11

č. 11+12

8.+14.12.2010

M. Rokyta, KMA MFF UK

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/>

11 Fourierova metoda pro Laplace-Poissonovu rovnici na kruhu

11.1 Dirichletova okrajová úloha

Řešte rovnici $\Delta u = 0$ na kruhu o poloměru $R > 0$, s okrajovou podmínkou $u = g$ na hranici kruhu.

Návod:

1. Nejprve převedeme Laplaceův operátor do polárních souřadnic pomocí vztahů $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$. Uvažujeme $u(x, y) = u(r, \varphi)$. Pro zkrácení zápisu píšeme $\frac{\partial u}{\partial r} = u_r$ atd. Postupujeme například takto (existují i jiné možnosti): Podle pravidla o derivování složené funkce je

$$u_r = u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi, \quad (11.1)$$

$$u_\varphi = u_x(-r \sin \varphi) + u_y(r \cos \varphi). \quad (11.2)$$

Odtud (derivujte (11.1) podle r a (11.2) podle φ)

$$u_{rr} = u_{xx} \cos^2 \varphi + 2u_{xy} \cos \varphi \sin \varphi + u_{yy} \sin^2 \varphi, \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned} u_{\varphi\varphi} &= u_{xx} r^2 \sin^2 \varphi - 2u_{xy} r^2 \cos \varphi \sin \varphi + u_{yy} r^2 \sin^2 \varphi \\ &\quad - u_x r \cos \varphi - u_y r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Porovnáním (11.3) a (11.4) vidíme, že

$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} &= u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{r} (u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi) \\ &= \Delta_{x,y} u - \frac{1}{r} u_r \end{aligned}$$

podle (11.1). Celkově tedy $\Delta_{x,y} u = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} u_r$ a Laplaceova rovnice v polárních souřadnicích má tvar

$$u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} u_r = 0. \quad (11.5)$$

2. Hledejme dále řešení ve tvaru

$$u(r, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_n(r) e^{in\varphi}, \quad (11.6)$$

nejprve formálně: Dosazením (11.6) do (11.5) dostaneme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (r^2 R_n''(r) + r R_n'(r) - n^2 R_n(r)) e^{in\varphi} = 0$ což vede na (Eulerovu) ODR

$$r^2 R_n''(r) + r R_n'(r) - n^2 R_n(r) = 0 \quad (11.7)$$

pro neznámé funkce $R_n(r)$. Její charakteristický polynom je $\lambda(\lambda - 1) + \lambda - n^2 = 0$,¹ odkud máme $\lambda^2 = n^2$ a tedy $\lambda = \pm |n|$, $n \in \mathbb{Z}$. Pro $n = 0$ je $\lambda = 0$ dvojnásobným kořenem charakteristického polynomu, tedy $R_0(r) = A_0 + B_0 \ln r$, $A_0, B_0 \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$. Pro $n \neq 0$ jsou $\lambda = \pm |n|$ jednonásobnými kořeny charakteristického polynomu, tedy $R_n(r) = A_n r^{|n|} + B_n r^{-|n|}$, $A_n, B_n \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$. Bereme však do úvahy pouze ta řešení, která jsou na kruhu o poloměru R (speciálně v počátku) omezená (jde nám o klasické řešení, tj. funkci u , mající uvnitř kruhu o poloměru R spojitě druhé parciální derivace. Proto

$$u(r, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n r^{|n|} e^{in\varphi}, \quad (11.8)$$

pro nějaké konstanty $A_n \in \mathbb{R}$.

¹Zopakujte si řešení Eulerovy ODR: k charakteristickému polynomu této rovnice vede například ansatz $R_n(r) = r^\lambda$.

3. Předpokládejme, že funkci g lze také rozvinout do komplexní Fourierovy řady:

$$g(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n e^{in\varphi}, \quad \text{kde tedy } \gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt. \quad (11.9)$$

Porovnáním (11.8) pro $r = R$ a (11.9) dostaneme $A_n = \frac{\gamma_n}{R^{|n|}}$, a tedy konečně

$$u(r, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{in\varphi}, \quad \text{kde } \gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt. \quad (11.10)$$

Proveďte diskusi tohoto (formálně obdržného) řešení, tj. ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci g je $u \in C^2(B_R(0)) \cap C(\overline{B_R(0)})$, $\Delta u = 0$ v $B_R(0)$, a $u = g$ na $\partial B_R(0)$.

4. Řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici na kruhu lze také vyjádřit Poissonovým integrálem (viz přednášku nebo jedno z předchozích cvičení). Poissonův integrál lze pomocí polárních souřadnic v $\mathbb{R}^2$ převést na tvar

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - t) + r^2} dt. \quad (11.11)$$

Dosaďte nyní do řady pro funkci u v (11.10) za konstanty γ_n jejich integrální vyjádření, prohodte sumu a integrál (samozřejmě ukažte, že to lze) a pokuste se sečíst vzniklou řadu.² Mělo by vám (nikoli překvapivě) vyjít (11.11).

• Cvičení pro vaše počítání

- (i) Řešte Laplaceovu rovnici v jednotkovém kruhu, je-li okrajová podmínka rovna $u(1, \varphi) = \cos^2 \varphi$.
- (ii) Řešte Laplaceovu rovnici v jednotkovém kruhu, je-li okrajová podmínka rovna $u(1, \varphi) = \sin^3 \varphi$.
- (iii) Řešte Laplace-Poissonovu rovnici $\Delta u = 2$ v obdélníku $(0, a) \times (-b/2, b/2)$, je-li u na hranici
 - (a) identicky nulové
 - (b) rovno funkci $x - y + xy$.

²Nápověda: při označení $\lambda := \frac{r}{R} \in (0, 1)$ a $s := \varphi - t$ ukažte, že $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{|n|} e^{ins} = \operatorname{Re} \left(1 + 2 \frac{\lambda e^{is}}{1 - \lambda e^{is}} \right) = \frac{1 - \lambda^2}{1 - 2\lambda \cos s + \lambda^2}$.

12 Fourierova metoda řešení rovnice vedení tepla na intervalu

12.1 Nulová pravá strana, nulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka

Řešte následující úlohu pro rovnici vedení tepla ($L > 0$, $T > 0$):

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pro } x \in (0, L), t \in (0, T), \\ \text{počáteční podmínka} & u(x, 0) = \varphi(x) & x \in \langle 0, L \rangle, \\ \text{okrajová podmínka} & u(0, t) = u(L, t) = 0 & t \in \langle 0, T \rangle. \end{array} \quad (12.1)$$

Návod:

- Funkci $u(x, t)$ závislou na čase (t) i prostoru (x), hledejme v separovaném tvaru

$$u(x, t) = X(x)Y(t),$$

po dosazení do rovnice (12.1) dostaneme (za standardního předpokladu identické nenulovosti X a T)

$$\frac{1}{a^2 Y(t)} \frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2},$$

což vede opět k požadavku existence konstanty λ takové, že

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \lambda, \quad (12.2)$$

$$\frac{1}{a^2 Y(t)} \frac{dY(t)}{dt} = \lambda. \quad (12.3)$$

Okrajové podmínky pro rovnici (12.2) dostaneme ze zadání (12.1), a sice $X(0) = 0$ a $X(L) = 0$, což plyne z podmínek plynou z $u(0, t) = 0$ a $u(L, t) = 0$. Okrajové podmínky pro funkci Y nelze v této chvíli jednoduše zformulovat. I to je důvod, proč řešíme nejprve úlohu pro X .

- Řešení úlohy pro funkci X se principiálně liší podle znaménka konstanty λ :

- je-li $\lambda > 0$, pak je řešením rovnice (12.2) funkce

$$X(x) = c_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{\lambda}},$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty, které určíme z okrajových podmínek. Je zřejmé, že okrajové podmínky můžeme splnit pouze volbou $c_1 = 0$ a $c_2 = 0$, tzn. $X(x) \equiv 0$. Zajímají nás však pouze identicky nenulová řešení, tedy tento případ vyloučíme.

- je-li $\lambda = 0$, pak je řešením rovnice (12.2) funkce

$$X(x) = c_1 x + c_2,$$

kde $c_1 = 0$ a $c_2 = 0$, jak opět plyne z okrajových podmínek, závěr je tedy stejný jako v předchozím případě.

- je-li $\lambda < 0$, pak je řešením rovnice (12.2) funkce

$$X(x) = c_1 \sin(x\sqrt{|\lambda|}) + c_2 \cos(x\sqrt{|\lambda|})$$

kde c_1 a c_2 jsou konstanty, které určíme z okrajových podmínek. Lze poměrně jednoduše nahlédnout, že netriviální řešení pro X dostaneme pouze v případě, kdy bude konstanta λ tvaru

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (12.4)$$

Dostali jsme tedy, že všechna netriviální řešení problému pro X vypadají takto:

$$X_n(x) = c_n \sin\left(x\sqrt{|\lambda|}\right) = c_n \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (12.5)$$

- Pro λ_n tvaru (12.4) dostaneme rovnici (12.3) pro funkci $Y(t) \equiv Y_n(t)$ ve tvaru

$$\frac{dY_n(t)}{dt} = \lambda_n a^2 Y_n(t),$$

obecným řešením této rovnice je funkce

$$Y_n(t) = a_n e^{\lambda_n a^2 t} = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}, \quad (12.6)$$

kde a_n jsou libovolné konstanty.

- Našli jsme tedy funkce $u_n(x, t)$, které pro libovolné přirozené číslo n splňují rovnici (12.1) a okrajové podmínky (součin konstant c_n a a_n přeznačíme na c_n),

$$u_n(x, t) = X_n(x)Y_n(x) = c_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \sin\left(x \frac{n\pi}{L}\right). \quad (12.7)$$

K úplnému řešení problému (12.1) je ještě třeba splnit počáteční podmínku. Řešení celého hledáme jako nekonečnou sumu funkcí $u_n(x, t)$,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t),$$

v případě „dostatečně rozumné“ konvergence této řady bude funkce u splňovat rovnici i okrajové podmínky. Zbývá vyřešit otázku nabývání počáteční podmínky. Chceme, aby platilo $u(x, 0) = \varphi(x)$, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(x \frac{n\pi}{L}\right) = \varphi(x), \quad \text{pro } x \in \langle 0, L \rangle,$$

což neznamena nic jiného, než že koeficienty c_n je nutné volit tak, aby to byly Fourierovy koeficienty funkce $\varphi(x)$ při rozvoji do sinové řady (předpokládáme tedy, že φ lze takt rozvinout). Koeficienty c_n pak spočteme jako

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(x \frac{n\pi}{L}\right) dx \quad (12.8)$$

a obdrželi jsme (formálně, tj. bez toho, že bychom diskutovali kvalitu konvergence atd...) řešení problému (12.1),

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \sin\left(x \frac{n\pi}{L}\right), \quad \text{kde } c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(x \frac{n\pi}{L}\right) dx. \quad (12.9)$$

12.2 Nenulová pravá strana, nulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka

rovnice	$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$	pro $x \in (0, L), t \in (0, T)$,	(12.10)
počáteční podmínka	$u(x, 0) = \varphi(x)$	$x \in \langle 0, L \rangle$,	
okrajová podmínka	$u(0, t) = u(L, t) = 0$	$t \in \langle 0, T \rangle$.	

Návod:

- Vyjdeme z toho, že již umíme řešit rovnici s nulovou pravou stranou a nulovou okrajovou podmínkou, viz (12.9). Předpokládejme nyní, že pravou stranu f lze rozvést do sinové Fourierovy řady vůči prostorové proměnné, tj.

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(x \frac{n\pi}{L}\right), \quad \text{kde } f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \sin\left(x \frac{n\pi}{L}\right) dx$$

Řešení problému (12.10) budeme hledat metodou variace konstant v (12.9), tj. píšeme koeficienty c_n v rozvoji funkce $u(x, t)$ jako funkce času

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \sin\left(x \frac{n\pi}{L}\right).$$

- Dosadíme takto navrženou funkci do rovnice (12.10), čistě formálně zderivujeme člen po členu, atd... Dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{dc_n(t)}{dt} e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} - f_n(t) \right) \sin\left(x \frac{n\pi}{L}\right) = 0,$$

což má platit pro každé $x \in (0, L)$ a $t \in (0, T)$. Z jednoznačnosti Fourierových rozvojů tedy plyne, že pro každé n musí být splněna obyčejná diferenciální rovnice

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = f_n(t) e^{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t},$$

jejímž řešením je

$$c_n(t) = c_n(0) + \int_0^t f_n(\tau) e^{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \tau} d\tau$$

Dosadíme-li takto vypočtené koeficienty $c_n(t)$ do rozvoje funkce $u(x, t)$, bude výsledkem

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(0) + \int_0^t f_n(\tau) e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 \tau} d\tau \right) e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 t} \sin \left(x \frac{n\pi}{L} \right),$$

konstanty $c_n(0)$ určíme z počáteční podmínky úlohy (12.10). Chceme, aby platilo $u(x, 0) = \varphi(x)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \sin \left(x \frac{n\pi}{L} \right) = \varphi(x)$$

což neznamena nic jiného, než že koeficienty $c_n(0)$ je nutné volit tak, aby to byly Fourierovy koeficienty funkce $\varphi(x)$ při rozvoji do sinové řady.

- Formálním řešením problému (12.10) je tedy funkce

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 t} \sin \left(x \frac{n\pi}{L} \right) + \left(\int_0^t f_n(\tau) e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 (t-\tau)} d\tau \right) \sin \left(x \frac{n\pi}{L} \right), \quad (12.11)$$

kde

$$c_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin \left(x \frac{n\pi}{L} \right) dx, \quad f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, t) \sin \left(x \frac{n\pi}{L} \right) dx.$$

12.3 Nulová pravá strana, nenulové okrajové podmínky, nulová počáteční podmínka

rovnice	$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$	pro $x \in (0, L), t \in (0, T)$,	
počáteční podmínka	$u(x, 0) = 0$	$x \in \langle 0, L \rangle$,	
okrajová podmínka	$u(0, t) = \ell(t)$	$t \in \langle 0, T \rangle$,	
	$u(L, t) = p(t)$.		(12.12)

Návod: S nenulovými okrajovými podmínkami se vypořádáme tak, že úlohu (12.12) převedeme na úlohu (12.10): funkci $u(x, t)$ hledáme jako součet dvou funkcí

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t),$$

kde funkci $v(x, t)$ definujeme takto

$$v(x, t) = \left(1 - \frac{x}{L} \right) \ell(t) + \frac{x}{L} p(t),$$

pak platí, že

$$\begin{aligned} v(0, t) &= \ell(t), \\ v(L, t) &= p(t). \end{aligned}$$

Funkce $v(x, t)$ tedy splňuje okrajové podmínky problému (12.12). Dosadíme-li rozepsanou funkci $u(x, t)$ do zadání rovnice (12.12), dostaneme

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \left(\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = - \left(1 - \frac{x}{L} \right) \frac{d\ell(t)}{dt} - \frac{x}{L} \frac{dp(t)}{dt},$$

a počáteční podmínku pro $w(x, 0) = -v(x, 0) = - \left(\left(1 - \frac{x}{L} \right) \ell(0) + \frac{x}{L} p(0) \right)$. Je tedy vidět, že problém pro funkci w je problém typu „nenulová pravá strana, nulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka“, který jsme řešili v předchozím bodu.

12.4 Obecný problém: nenulová pravá strana, nenulové okrajové podmínky, nenulová počáteční podmínka

rovnice	$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$	pro $x \in (0, L), t \in (0, T)$,	
počáteční podmínka	$u(x, 0) = \varphi(x)$	$x \in \langle 0, L \rangle$,	
okrajová podmínka	$u(0, t) = l(t)$	$t \in \langle 0, T \rangle$,	
	$u(L, t) = p(t)$.		(12.13)

Návod: Řešení problému převedeme na řešení již známých případů. Hledanou funkci $u(x, t)$ rozdělíme na dvě funkce, funkci $u_h(x, t)$, která zajistí splnění okrajových podmínek, a funkci $u_r(x, t)$, která zajistí splnění rovnice a počáteční podmínky. Definujeme tedy rozklad $u(x, t) = u_h(x, t) + u_r(x, t)$ a příslušné problémy

$$\begin{array}{ll} \text{rovnice} & \frac{\partial u_r}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} = f \quad \text{pro } x \in (0, L), t \in (0, T) \\ \text{počáteční podmínka} & u_r(x, 0) = \varphi(x) \quad x \in \langle 0, L \rangle, \\ \text{okrajová podmínka} & u_r(0, t) = 0 \quad t \in \langle 0, T \rangle, \\ & u_r(L, t) = 0. \end{array}$$

Toto je problém, který již umíme řešit (zadání viz. (12.10), řešení viz. (12.11)). Druhý problém je tvaru

$$\begin{array}{ll} \text{rovnice} & \frac{\partial u_h}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pro } x \in (0, L), t \in (0, T), \\ \text{počáteční podmínka} & u_h(x, 0) = 0 \quad x \in \langle 0, L \rangle, \\ \text{okrajová podmínka} & u_h(0, t) = \ell(t) \quad t \in \langle 0, T \rangle, \\ & u_h(L, t) = p(t). \end{array}$$

Tento problém jsme již také zkoumali (12.12). Z linearit y úlohy je zřejmé, že funkce $u(x, t)$, která je součtem funkcí $u_h(x, t)$ a $u_r(x, t)$, je řešením původní úlohy (12.13).

13 Fourierova metoda pro řešení vlnové rovnice na intervalu

Jde o problém tvaru

$$\begin{array}{ll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad \text{pro } x \in (0, L), t \in (0, T), \\ \text{počáteční podmínky} & u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \langle 0, L \rangle, \\ & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \\ \text{okrajové podmínky} & u(0, t) = \ell(t), \quad t \in \langle 0, T \rangle, \\ & u(L, t) = p(t). \end{array} \tag{13.14}$$

Přirozeně předpokládáme, že $L > 0$, $T > 0$, a že f je funkce proměnných x a t .

Návod: Rozdělte úlohu na dvě úlohy, stejně jako jsme to udělali v případě úlohy (12.13). Postup řešení těchto partikulárních úloh je principiálně stejný jako v případě rovnice vedení tepla, který jsme právě dodiskutovali. Možná bude cennější (a jako prevence znechucení z dalších stránek „stále stejných“ výpočtů i zdravější), když se pokusíte celý proces si v případě vlnové rovnice projít sami, než kdybych jej zde metodou copy-and-paste-and-modify naservíroval.