

Cvičení z PDR1 (NDIR044)

ZS 2010/11

č. 10+11

1.+8.12.2010

M. Rokyta, KMA MFF UK

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/>

10 Fourierova metoda rozdělení proměnných pro Laplace-Poissonovu rovnici – Dirichletova úloha na obdélníku

10.1 Dirichletova okrajová podmínka „na jedné straně obdélníka“

Budeme řešit následující Dirichletovu (= s předepsanými hodnotami hledané funkce na hranici) úlohu pro Laplaceovu rovnici:

$$\begin{aligned}
 \text{rovnice} \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pro } [x, y] \in (0, a) \times (0, b), \\
 \text{okrajová podmínka} \quad & u(x, 0) = g(x), \quad x \in \langle 0, a \rangle, \\
 & u(x, b) = 0, \quad x \in \langle 0, a \rangle, \\
 & u(0, y) = 0, \quad y \in \langle 0, b \rangle, \\
 & u(a, y) = 0, \quad y \in \langle 0, b \rangle.
 \end{aligned} \tag{10.1}$$

Přirozeně předpokládáme $a > 0$, $b > 0$, a dále $g(0) = 0$, $g(a) = 0$, aby okrajová podmínka byla spojitá na hranici.

Funkci $u(x, y)$ budeme nejprve hledat ve speciálním „separovaném“ tvaru, jako součin dvou funkcí,

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{10.2}$$

a dosadíme tento „ansatz“¹ do rovnice (10.1). Dostaneme

$$Y(y) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0. \tag{10.3}$$

Na základě tvaru hledaného řešení (10.2) se rozhodneme, že nás budou především zajímat ta řešení X , Y , která jsou nenulová alespoň v nějaké podoblasti obdélníka $(0, a) \times (0, b)$. V takových množinách lze upravit (10.3) na

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = - \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2}.$$

Levá strana je závislá pouze na proměnné x , pravá strana je závislá pouze na proměnné y , a rovnost má platit pro všechna $[x, y] \in (0, a) \times (0, b)$, obě strany rovnice proto musí být rovny společné konstantě, kterou označme λ . Požadujeme tedy, aby platilo

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \lambda, \tag{10.4}$$

$$- \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = \lambda. \tag{10.5}$$

K první obyčejné diferenciální rovnici (10.4) máme ze zadání (10.1) i okrajové podmínky $X(0) = 0$ a $X(a) = 0$ (které plynou z $u(0, y) = 0$ a $u(a, y) = 0$). Proto řešíme nejprve tuto úlohu.² Řešení pro funkci X je toto: pro $\lambda \geq 0$ neexistuje žádné netriviální řešení (tj. existuje pouze řešení rovné identické nule),

¹Pro německé slovo „ansatz“ se někdy používá nepěkný překlad „násada“. Myslím, že lepší varianta je buď použít opis „vyjádřit funkci ve tvaru“ nebo se k tomu postavit například stejně jako v anglicky mluvících zemích: říkat „ansatz“. ©

²Všimněte si, že pro funkci Y bychom měli jednak okrajovou podmínku $Y(b) = 0$, dále však „podivnou“ podmínku $X(x)Y(0) = g(x)$, která by plynula z $u(x, 0) = g(x)$. To ukazuje, že „ansatz“ (10.2) není úplně správné. Půjde jej však časem poněkud upravit, aby bylo možno splnit i onu „podivnou“ podmínku.

taková řešení nás však nezajímají. Naštěstí pro $\lambda < 0$ existuje netriviální řešení rovnice (10.4), splňující příslušné okrajové podmínky $X(0) = 0$ a $X(a) = 0$, nastane to však jen tehdy, když³

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Potom

$$X_n(x) = c_n \sin\left(x\sqrt{|\lambda|}\right) = c_n \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right),$$

kde c_n jsou libovolné konstanty.

Pro tato λ_n se nyní pokusíme vyřešit rovnici (10.5) pro $Y(y)$ resp. $Y_n(y)$,

$$\frac{d^2 Y_n(y)}{dy^2} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n(y).$$

Obecným řešením této rovnice je

$$Y_n(y) = a_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + b_n e^{-\frac{n\pi}{a}y},$$

kde a_n a b_n jsou libovolné konstanty.

Jednu z okrajových podmínek pro Y lze splnit, a sice $Y(b) = 0$ (tato podmínka je důsledkem okrajové podmínky $u(x, b) = 0$), což dává

$$a_n e^{\frac{n\pi}{a}b} + b_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} = 0,$$

odkud dostaneme

$$b_n = -a_n e^{-\frac{2n\pi}{a}b},$$

a tedy

$$Y_n(y) = a_n e^{\frac{n\pi}{a}b} \left(e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)} \right).$$

Celkem jsme tedy našli nekonečně mnoho funkcí typu (10.2),

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = d_n e^{\frac{n\pi}{a}b} \left(e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right),$$

kde d_n jsou libovolné konstanty. Všechny tyto funkce splňují $\Delta u_n = 0$ ve všech vnitřních bodech obdélníka $(0, a) \times (0, b)$, a také okrajové podmínky $u_n(x, b) = 0$, $u_n(0, y) = 0$ a $u_n(a, y) = 0$.

Ukažme si, jakým způsobem lze zajistit splnění i zbývajících okrajových podmínek. Řešení celého problému (10.1) budeme hledat jako nekonečný součet funkcí typu $u_n(x, y)$,

$$u(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{\frac{n\pi}{a}b} \left(e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Takto definovaná funkce u nepochybně splňuje okrajové podmínky $u(x, b) = 0$, $u(0, y) = 0$ a $u(a, y) = 0$, a pokud bude uvedená řada konvergovat „dostatečně rozumně“ (budeme tento případ podrobně diskutovat za chvíli), tak bude možno provést derivování za znaméním sumy, a tedy dostaneme $\Delta u = \Delta\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta u_n(x, y) = 0$.

Zbývá zajistit platnost okrajové podmínky $u(x, 0) = g(x)$. Předpokládejme, že funkci $g(x)$ lze rozvést do sinové Fourierovy řady:⁴

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right), \quad \text{kde} \quad \gamma_n = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right) dx. \quad (10.6)$$

Podmínka $u(x, 0) = g(x)$ je pak vyjádřena rovnicí

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{\frac{n\pi}{a}b} \left(e^{-\frac{n\pi}{a}b} - e^{\frac{n\pi}{a}b} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right) = g(x),$$

³Proveďte podrobně.

⁴I tento požadavek budeme diskutovat v následujícím paragrafu.

odkud z jednoznačnosti Fourierových rozvojů plyne vztah mezi konstantami d_n a koeficienty Fourierova rozvoje γ_n ,

$$d_n e^{\frac{n\pi}{a}b} = \frac{\gamma_n}{e^{-\frac{n\pi}{a}b} - e^{\frac{n\pi}{a}b}},$$

a tedy dostáváme (zatím pouze formálně) řešení našeho problému ve tvaru řady:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \frac{e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)}}{e^{-\frac{n\pi}{a}b} - e^{\frac{n\pi}{a}b}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad \text{kde} \quad \gamma_n = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin\left(x \frac{n\pi}{a}\right) dx. \quad (10.7)$$

10.2 Diskuse formálního výsledku

Nejprve si ujasněme, co vše potřebujeme k rigoróznímu důkazu⁵ toho, že funkce (10.7) je řešením našeho problému (10.1). Tvrdím, že k tomu stačí, když ukážeme:

1. Funkce g je rozvinutelná do sinové Fourierovy řady (10.6), přičemž první z rovností (10.6) platí bodově pro všechna $x \in \langle 0, a \rangle$.
2. Řada v (10.7), i řady, které vzniknou formálními prvními a druhými derivacemi podle x a y za znamením sumy v (10.7), konvergují lokálně stejnoměrně na $(0, a) \times (0, b)$.
3. Řada v (10.7) konverguje stejnoměrně na $\langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle$.

Potom totiž:

- a) Z bodu 2 výše plyne, že řadu (10.7) lze dvakrát derivovat člen po členu v každém bodě $[x, y] \in (0, a) \times (0, b)$, tedy máme $\Delta u(x, y) = \Delta\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta u_n(x, y) = 0$. Dále bod 2 implikuje, že $u \in \mathcal{C}^2((0, a) \times (0, b))$.
- b) Bod 3 implikuje, že $u \in \mathcal{C}(\langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle)$. Speciálně odtud plyne, že hodnoty funkce u na hranici obdélníka lze obdržet přímým dosazením příslušných hraničních bodů do řady (10.7). Tedy

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & y &\in \langle 0, b \rangle, \\ u(a, y) &= 0, & y &\in \langle 0, b \rangle, \\ u(x, b) &= 0, & x &\in \langle 0, a \rangle, \\ u(x, 0) &\stackrel{(10.7)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin\left(x \frac{n\pi}{a}\right) \stackrel{(10.6)}{=} g(x), & x &\in \langle 0, a \rangle. \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne pochopitelně z bodu 1 výše.

Věnujme se nyní podrobněji bodům 1–3 výše.

ad 1. Dodefinujeme nejprve funkci g liše na interval $\langle -a, 0 \rangle$ a označíme toto rozšíření opět g . Protože $g(0) = 0$, je $g \in \mathcal{C}(\langle -a, a \rangle)$, platí tedy také $g \in L^1((-a, a))$ a $g \in L^2((-a, a))$. Odtud plyne:

- $g \in L^1((-a, a)) \implies$ na intervalu $(-a, a)$ existuje Fourierova řada funkce g vzhledem k úplnému trigonometrickému systému $\{1, \sin(\frac{n\pi}{a}x), \cos(\frac{n\pi}{a}x)\}$; z lichosti funkce g na intervalu $(-a, a)$ plyne, že nenulové jsou pouze Fourierovy koeficienty u funkcí $\sin(\frac{n\pi}{a}x)$, z L^1 integrability g dále plyne, že tyto Fourierovy koeficienty jsou omezené (dokonce jdou k nule). Tedy:

$$\gamma_n := \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin\left(x \frac{n\pi}{a}\right) dx \implies \exists c > 0, \quad |\gamma_n| \leq c; \quad (10.8)$$

⁵Byl bych rád, kdybyste si z následující diskuse odnesli jednak dojem, že kdybyste chtěli, uměli byste každý výpočet provedený touto metodou odůvodnit rigorózně, a jednak pocít, že není nezbytně nutné, abyste to vždy dělali. ☺

- $g \in L^2((-a, a)) \implies$ první z rovností (10.6) platí alespoň skoro všude na intervalu $\langle 0, a \rangle$; k tomu, aby tato rovnost platila ve všech bodech $\langle 0, a \rangle$ potřebujeme obecně vědět něco víc. Například pokud víme, že řada v (10.6) konverguje na $\langle 0, a \rangle$ stejnoměrně, je jejím součtem spojitá funkce; ta je ovšem skoro všude na $\langle 0, a \rangle$ rovna spojitě funkci g , tedy první rovnost v (10.6) platí ve všech bodech, což jsme chtěli vědět. Zmíněná stejnoměrná konvergence je například důsledkem vyšší hladkosti funkce g , která zaručí konvergenci řady $\sum |\gamma_n|$. Abychom připomněli (resp. zformulovali přesněji) toto tvrzení, definujeme nejprve třídu funkcí

$$\mathcal{C}_{\text{per}}^k(\mathbb{R}) := \{g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}); \exists p \in \mathbb{R}, \text{ že } g \text{ je } p\text{-periodická a po částech třídy } \mathcal{C}^k \text{ na } \mathbb{R}\}. \quad (10.9)$$

Potom platí:

$$g \in \mathcal{C}_{\text{per}}^k(\mathbb{R}) \implies \sum n^{k-1} |\gamma_n| < \infty, \quad (10.10)$$

v našem případě tedy

$$g \in \mathcal{C}_{\text{per}}^1(\mathbb{R}) \implies \sum |\gamma_n| < \infty, \quad (10.11)$$

odkud podle Weierstrassova kritéria obdržíme stejnoměrnou konvergenci řady v (10.6). Výsledek (10.11) budeme ještě potřebovat.

ad 2. Provedeme následující klíčový odhad členů řady (10.7):

$$A_n := \left| \gamma_n \frac{e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)}}{e^{-\frac{n\pi}{a}b} - e^{\frac{n\pi}{a}b}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right| \leq |\gamma_n| e^{-\frac{n\pi}{a}y} \underbrace{\left| \frac{1 - e^{-\frac{2n\pi}{a}(b-y)}}{1 - e^{-\frac{2n\pi}{a}b}} \right|}_{=:Z} \leq c |\gamma_n| e^{-\frac{n\pi}{a}y}, \quad (10.12)$$

neboť výraz Z je omezen konstantou $c > 0$ (je $n \geq 1$ a tedy jmenovatel je odražený od nuly, zatímco čitatel je omezený shora). Pro použití Weierstrassova kritéria pro stejnoměrnou konvergenci je potřeba, aby výraz vpravo v (10.12) byl dále odhadnut členy konvergentní číselné řady (tj. řady, jejíž členy nezávisí na y). Kdyby platilo (10.11), stačilo by uvážit, že $|e^{-\frac{n\pi}{a}y}| \leq 1$, my však máme obecně pouze omezenost koeficientů γ_n (viz (10.8)), a tedy obecně $A_n \leq c$, kterýžto odhad nelze pro $y \in \langle 0, b \rangle$ a omezená γ_n zlepšit. Proto se omezíme pouze na $y \geq \varepsilon$, což nám dá

$$A_n \leq c |\gamma_n| e^{-\frac{n\pi}{a}\varepsilon} \leq \tilde{c} e^{-\frac{n\pi}{a}\varepsilon}, \quad y \geq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (10.13)$$

odkud plyne, že řada (10.7) je stejnoměrně konvergentní na $\langle 0, a \rangle \times \langle \varepsilon, b \rangle$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ a je tedy lokálně stejnoměrně konvergentní (dokonce) na $\langle 0, a \rangle \times (0, b)$.

Řady, které vzniknou formálním prvním či druhým derivováním (podle x či y) za znamením sumy v (10.7) se budou lišit od řady v (10.7) zejména tím, že budou obsahovat členy $\left(\frac{n\pi}{a}\right)^k$, kde $k = 1, 2$ je počet provedených derivací. Proto lze členy těchto řad odhadnout naprosto stejným postupem pomocí

$$\tilde{c} n^k e^{-\frac{n\pi}{a}\varepsilon}, \quad y \geq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (10.14)$$

což jsou opět členy konvergentní číselné řady. Bod 2 je tedy ukázán, dokonce i pokud platí pouze $g \in \mathcal{C}(\langle 0, a \rangle)$.

ad 3. Už v předchozím bodě jsme naznačili, že pokud by platilo $\sum |\gamma_n| < \infty$ (tj. například pro $g \in \mathcal{C}^1(\langle 0, a \rangle)$), lze odhad (10.13) upravit takto:

$$A_n \leq c |\gamma_n| e^{-\frac{n\pi}{a}y} \leq c |\gamma_n| \quad \forall y \geq 0, \quad (10.15)$$

což dává kýženou stejnoměrnou konvergenci řady (10.7) na celém uzavřeném obdélníku $\langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle$. Pro obecné $g \in \mathcal{C}(\langle 0, a \rangle)$ je nutno postupovat opatrněji:

- Aproximujeme funkci $g \in \mathcal{C}(\langle 0, a \rangle)$ posloupností funkcí⁶ $g_m \in \mathcal{C}^1(\langle 0, a \rangle)$, takových, že $g_m(0) = g_m(a) = 0$ a $g_m \rightrightarrows g$ na $\langle 0, a \rangle$.

⁶Rozmyslete si, že to lze.

- Postupem jako výše odvodíme, že pro $\gamma_{mn} = \frac{2}{a} \int_0^a g_m(x) \sin\left(x \frac{n\pi}{a}\right) dx$ jsou funkce

$$u_m(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{mn} \frac{e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)}}{e^{-\frac{n\pi}{a}b} - e^{\frac{n\pi}{a}b}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (10.16)$$

řešením Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici na obdélníku $(0, a) \times (0, b)$ s okrajovou podmínkou $g_m(x)$ pro $y = 0, x \in \langle 0, a \rangle$, a jinde nulovou.

- Lze ukázat (viz přednáška - například 1. věta Harnackova nebo princip maxima), že potom $u_m \rightrightarrows u$ na $\langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle$, přičemž u je klasickým řešením úlohy (10.1) a tím je náš problem vyřešen.⁷

10.3 Dirichletova okrajová podmínka „na všech stranách obdélníka“

Máme zadaný problém

$$\begin{aligned} \text{rovnice} \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pro } [x, y] \in (0, a) \times (0, b), \\ \text{okrajová podmínka} \quad & \begin{aligned} u(x, 0) &= g_1(x), \quad x \in \langle 0, a \rangle, \\ u(x, b) &= g_2(x), \quad x \in \langle 0, a \rangle, \\ u(0, y) &= g_3(x), \quad y \in \langle 0, b \rangle, \\ u(a, y) &= g_4(x), \quad y \in \langle 0, b \rangle. \end{aligned} \end{aligned} \quad (10.17)$$

Opět předpokládáme, že $a > 0, b > 0$, a že v rozích obdélníka $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ platí tzv. podmínky souhlasu, tj. platí $g_1(0) = g_3(0), g_1(a) = g_4(0), \dots$, tedy že funkce definované na sousedních stranách obdélníka se rovnají ve společném vrcholu. Okrajovou podmínku pak můžeme pro zkrácení zapisovat $u(x, y)|_{\partial\Omega} = g(x)$, kde $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$.

Úlohu vyřešíme ve dvou krocích. Nejprve přičteme k funkci $g(x, y)$ vhodnou funkci $c(x, y)$ tak, aby platilo $\Delta c(x, y) = 0$ uvnitř obdélníka a navíc aby hodnota rozdílu $g(x, y) - c(x, y)$ v rozích obdélníka byla nulová. Toho lze vždy dosáhnout: zvolíme-li funkci c tvaru

$$c(x, y) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy, \quad (10.18)$$

bude pro libovolnou volbu konstant c_0, c_1, c_2, c_3 platit $\Delta c(x, y) = 0$ uvnitř obdélníka. Konstanty pak najdeme takové, aby hodnota rozdílu $g(x, y) - c(x, y)$ v rozích obdélníka byla nulová (rozmyslete si, že to vždy lze⁸).

Nyní budeme funkci $u(x, t)$ hledat ve tvaru

$$u(x, t) = v(x, t) + c(x, t).$$

Díky vlastnostem funkce c máme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \iff \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

a úlohu pro u tedy vyřešíme, pokud najdeme funkci $v(x, y)$ takovou, že

$$\begin{aligned} \text{rovnice} \quad & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pro } [x, y] \in (0, a) \times (0, b) \\ \text{okrajová podmínka} \quad & \begin{aligned} v(x, 0) &= -c(x, 0) + g_1(x), \quad x \in \langle 0, a \rangle, \\ v(x, b) &= -c(x, b) + g_2(x), \quad x \in \langle 0, a \rangle, \\ v(0, y) &= -c(0, y) + g_3(x), \quad y \in \langle 0, b \rangle, \\ v(a, y) &= -c(a, y) + g_4(x), \quad y \in \langle 0, b \rangle. \end{aligned} \end{aligned} \quad (10.19)$$

⁷Ovšem pozor, tato limitní funkce u pouze „existuje“, ale pro obecné $g \in \mathcal{C}(\langle 0, a \rangle)$ nemusí být vyjádřitelná řadou tvaru (10.7). Pokud chcete mít řešení v tomto tvaru, musíte takjakotak zadat okrajovou podmínku g „o něco lepší“ než pouze spojitou. Tak co, sílí ve vás pocit, zmíněný v poznámce pod čarou číslo 5? ☺

⁸Ukažte: označíme-li $h_1 := g(0, 0), h_2 := g(a, 0), h_3 := g(0, b), h_4 := g(a, b)$ hodnoty okrajové podmínky g v rozích obdélníka $(0, a) \times (0, b)$, pak hledanou funkci c je funkce tvaru (10.18), kde $c_0 := h_1, c_1 := \frac{1}{a}(h_2 - h_1), c_2 := \frac{1}{b}(h_3 - h_1), c_3 := \frac{1}{ab}(h_4 - h_3 - h_2 + h_1)$.

Zbývá tedy nalézt řešení problému pro funkci $v(x, y)$. To je ale jednoduché. Využijeme toho, že okrajová podmínka pro funkci v má díky naší konstrukci nulové hodnoty ve všech rozích obdélníka, a napíšeme $v(x, y)$ jako součet čtyř funkcí

$$v(x, y) = v_1(x, y) + v_2(x, y) + v_3(x, y) + v_4(x, y),$$

kde každá z funkcí $v_i(x, y)$ řeší problém typu „Dirichletova okrajová podmínka na jedné straně obdélníka“ (viz minulé cvičení). Například problém pro $v_1(x, y)$ je

$$\begin{array}{ll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pro } [x, y] \in (0, a) \times (0, b) \\ \text{okrajová podmínka} & \begin{array}{ll} v(x, 0) = -c(x, 0) + g_1(x), & x \in \langle 0, a \rangle, \\ v(x, b) = 0, & x \in \langle 0, a \rangle, \\ v(0, y) = 0, & y \in \langle 0, b \rangle, \\ v(a, y) = 0, & y \in \langle 0, b \rangle, \end{array} \end{array}$$

pro $v_2(x, y)$ by okrajové podmínky byly

$$\begin{array}{ll} v(x, 0) = 0, & x \in \langle 0, a \rangle, \\ v(x, b) = -c(x, b) + g_2(x), & x \in \langle 0, a \rangle, \\ v(0, y) = 0, & y \in \langle 0, b \rangle, \\ v(a, y) = 0, & y \in \langle 0, b \rangle, \end{array}$$

a obdobně pro zbývající dvě funkce. Z linearity rovnice je zřejmé, že součet funkcí $v(x, y) = v_1(x, y) + v_2(x, y) + v_3(x, y) + v_4(x, y)$ je řešením úlohy pro $v(x, y)$.

Tím jsme si rozmysleli, že problém (10.17) umíme řešit.

10.4 Nulová Dirichletova okrajová podmínka, nenulová pravá strana

Řešte Dirichletovu úlohu pro Laplace-Poissonovu rovnici na obdélníku.

Návod:

1. Předně lze předpokládat, že Dirichletova podmínka je nulová: pokud by tomu tak nebylo, hledali bychom řešení jako součet dvou funkcí, kde jedna by splňovala rovnici s nenulovou pravou stranou a nulovou Dirichletovou podmínkou, a druhá by splňovala řešení s nulovou pravou stranou a nenulovou okrajovou podmínkou (takovou úlohu již umíme řešit).
2. Zbývá tedy řešit úlohu typu

$$\begin{array}{ll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad \text{pro } [x, y] \in (0, a) \times (0, b) \\ \text{okrajová podmínka} & \begin{array}{ll} u(x, 0) = 0, & x \in \langle 0, a \rangle, \\ u(x, b) = 0, & x \in \langle 0, a \rangle, \\ u(0, y) = 0, & y \in \langle 0, b \rangle, \\ u(a, y) = 0, & y \in \langle 0, b \rangle. \end{array} \end{array} \quad (10.20)$$

Přirozeně předpokládáme, že $a > 0$, $b > 0$, $f \in C((0, a) \times (0, b))$.

3. Předpokládejme, že funkci $f(x, y)$ lze rozvést (alespoň pro skoro všechna $y \in (0, b)$) do sinové Fourierovy řady⁹ vzhledem k proměnné x

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad \text{kde } f_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx.$$

Řešení $u(x, y)$ budeme hledat ve tvaru

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Právě zavedená funkce zřejmě splňuje okrajové podmínky $u(0, y) = 0$ a $u(a, y) = 0$. Dosadíme-li takto definovanou funkci $u(x, y)$ do rovnice, dostaneme (derivujeme nejprve formálně člen po členu)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 c_n(y)}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 c_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right),$$

⁹Viz „Diskusi formálního výsledku“ v minulém cvičení.

odkud plyne požadavek

$$\frac{d^2 c_n(y)}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 c_n(y) = f_n(y). \quad (10.21)$$

Okrajové podmínky k této obyčejné diferenciální rovnici získáme z okrajových podmínek původního problému $u(x, 0) = 0$ a $u(x, b) = 0$, požadujeme proto $c_n(0) = 0$ a $c_n(b) = 0$.

4. Dořešíme celou úlohu: obyčejnou diferenciální rovnici vyřešíme metodou variace konstant, řešení homogenní rovnice je

$$c_n(y) = a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + b_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

variací konstant získáme rovnice

$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dy} \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + \frac{db_n}{dy} \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) &= 0, \\ \frac{n\pi}{a} \left(\frac{da_n}{dy} \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + \frac{db_n}{dy} \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \right) &= f_n(y), \end{aligned}$$

odkud

$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dy} &= \frac{a}{n\pi} f_n(y) \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \implies a_n(y) = \frac{a}{n\pi} \int_0^y f_n(s) \cosh\left(\frac{n\pi}{a}s\right) ds, \\ \frac{db_n}{dy} &= -\frac{a}{n\pi} f_n(y) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \implies b_n(y) = -\frac{a}{n\pi} \int_0^y f_n(s) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}s\right) ds. \end{aligned}$$

Právě získané vyjádření "konstant" a_n a b_n dosadíme do tvaru homogenního řešení $c_n(y)$ a dostaneme (použili jsme součtový vzorec pro hyperbolické funkce) obecné řešení rovnice (10.21)

$$c_n(y) = \alpha_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + \beta_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + \frac{a}{n\pi} \int_0^y f_n(s) \sinh\left((y-s) \frac{n\pi}{a}\right) ds,$$

Použitím okrajových podmínek $c_n(0) = 0$ a $c_n(b) = 0$ určíme konstanty α_n a β_n

$$\begin{aligned} c_n(0) = 0 &\implies \beta_n = 0 \\ c_n(b) = 0 &\implies \alpha_n = -\frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \frac{a}{n\pi} \int_0^b f_n(s) \sinh\left((b-s) \frac{n\pi}{a}\right) ds, \end{aligned}$$

čímž jsme vyřešili obyčejnou diferenciální rovnici pro $c_n(y)$. Získané $c_n(y)$ dosadíme zpět do vyjádření funkce $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ a dostaneme řešení původního problému (10.20)

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{a}{n\pi} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \int_0^b f_n(s) \sinh\left((b-s) \frac{n\pi}{a}\right) ds + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{n\pi} \int_0^y f_n(s) \sinh\left((y-s) \frac{n\pi}{a}\right) ds \right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \end{aligned} \quad (10.22)$$

kde

$$f_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin\left(x \frac{n\pi}{a}\right) dx.$$