

Cvičení z PDR1 (NDIR044)

ZS 2010/11

Č. 9

24.11.2010

M. Rokyta, KMA MFF UK

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/>**Poznámka.** Cvičení č. 8 se nekonalo, protože 17.11. byl státní svátek.

9 Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici na kouli

9.1 Odvození Poissonova vzorce metodou kulové inverze v dimenzi $d \geq 3$

Základem Poissonova vzorce je následující lemma.

Lemma 9.1 *Bud' $B_R(0) \subset \mathbb{R}^d$ koule se středem 0 a poloměrem $R > 0$, $d \geq 3$. Bud' dále $u \in C^2(\overline{B_R(0)})$, taková, že $\Delta u = 0$ v $B_R(0)$. Potom pro všechna $x \in B_R(0)$ je*

$$u(x) = \frac{1}{\kappa_d R} \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^d} dS(\xi), \quad (9.1)$$

kde $\kappa_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ je povrch jednotkové sféry v dimenzi d .**Poznámka 9.2** Vztah (9.1) je tedy nutnou podmínkou pro to, aby funkce uvedené hladkosti byla řešením Laplaceovy rovnice na kouli. Zároveň tento vztah říká, že hodnoty takové (harmonické, dostatečně hladké) funkce u uvnitř koule $B_R(0)$ lze vyjádřit pomocí hodnot funkce na hranici této koule. Vzhledem k tomu, že k existenci integrálu vpravo v (9.1) není nutné, aby $u \in C^2(\partial B_R(0))$, vzniká přirozená otázka, jaké vlastnosti bude mít funkce u , definovaná předpisem

$$u(x) = \frac{1}{\kappa_d R} \int_{\partial B_R(0)} \varphi(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^d} dS(\xi), \quad (9.2)$$

pro (např.) $\varphi \in C(\partial B_R(0))$. Skutečně lze dokázat, že takto definovaná funkce je klasickým řešením Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici na kouli, s hraničními hodnotami $\varphi \in C(\partial B_R(0))$. Příslušná věta byla součástí přednášky. Zde prezentované lemma tvoří k této větě jakousi komplementární, motivační část, ukazující, že (Poissonův) vzorec (9.2) „nespadl z nebe“.

Dokažme nyní Lemma 9.1.

Důkaz. Použijeme větu o třech potenciálech pro $u \in C^2(\overline{B_R(0)})$ (odtud hladkost, požadovaná na u), $d \geq 3$:

$$u(x) = \frac{1}{(d-2)\kappa_d} \left(\underbrace{- \int_{B_R(0)} \frac{\Delta u(\xi)}{|x - \xi|^{d-2}} d\xi}_{=0} + \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{d-2}} dS(\xi) - \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{|x - \xi|^{d-2}} \right) dS(\xi) \right). \quad (9.3)$$

První integrál je nulový, protože $\Delta u = 0$ v $B_R(0)$. Třetí integrál pracuje s hodnotami funkce u na množině $\partial B_R(0)$, je tedy stejného typu jako integrál vpravo v (9.1). Druhý integrál způsobuje jisté obtíže, protože pracuje s hodnotami $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ na množině $\partial B_R(0)$, které se vpravo v (9.1) nevyskytují. Naším cílem bude nyní tento integrál nějakým vhodným způsobem přepsat, abychom tuto obtíž odstranili. Využijeme k tomu druhou Greenovu větu, ze které plyne, že pro funkce $v, w \in C^1(\overline{B_R(0)})$ je

$$\int_{B_R(0)} (v \Delta w - w \Delta v) dx = \int_{\partial B_R(0)} v \frac{\partial w}{\partial \nu} dS - \int_{\partial B_R(0)} w \frac{\partial v}{\partial \nu} dS. \quad (9.4)$$

Položíme $v = u$ a pokusíme se nalézt $w \in C^1(\overline{B_R(0)})$ takovou, že $\Delta w = 0$ v $B_R(0)$. Pro takovou volbu funkcí v, w plyne z (9.4) rovnost

$$\int_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{\partial w}{\partial \nu}(\xi) dS(\xi) = \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) w(\xi) dS(\xi), \quad (9.5)$$

což umožní nahradit integrál, ve kterém vystupuje $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)$, integrálem, ve kterém vystupuje $u(\xi)$. Zbývá najít vhodnou funkci w . Porovnáme-li druhý integrál v (9.3) s pravou stranou (9.5), mohli bychom dojít k názoru, že by touto funkcí mohla být funkce $w(\xi) = \frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}$. Tato funkce však (pro pevné $x \in B_R(0)$) není harmonická (v proměnné ξ) v celém $B_R(0)$, jak je nutné. Použijeme proto (podobnou) funkci $w(\xi) = c \cdot \frac{1}{|x'-\xi|^{d-2}}$ s vhodně zvoleným bodem $x' \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{B_R(0)}$ a vhodnou konstantou $c \in \mathbb{R}$. Taková funkce splňuje podmínku $w \in C^1(\overline{B_R(0)})$ a $\Delta w = 0$ v $B_R(0)$ a lze ji použít v identitě (9.5).

K nalezení bodu $x' \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{B_R(0)}$, který je „vhodně přiřazen“ bodu $x \in B_R(0)$ použijeme kulovou inverzi: Buď $x \in B_R(0)$, $x = (x_1, \dots, x_d) \neq 0$. Řekneme, že bod $x' = (x'_1, \dots, x'_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{B_R(0)}$ je kulově inverzní k bodu x (vzhledem ke kouli $B_R(0)$), pokud

$$x'_k = x_k \frac{R^2}{|x|^2}, \quad k = 1, \dots, d, \quad (9.6)$$

tedy (kreslete si) pokud x' leží na polopřímce vycházející ze středu koule $B_R(0)$ a procházející bodem x , a navíc platí

$$|x| \cdot |x'| = R^2. \quad (9.7)$$

Pro kulově inverzní body lze navíc poměrně jednoduše dokázat následující identita: jsou-li $x \in B_R(0)$, $x \neq 0$, a x' kulově inverzní k x vzhledem ke kouli $B_R(0)$, potom

$$|x' - \xi| = \frac{R}{|x|} |x - \xi|, \quad \forall \xi \in \partial B_R(0). \quad (9.8)$$

(Návod k důkazu (9.8): umocněte (9.8) na druhou a použijte (9.7)). Položíme nyní pro $x \neq 0$,

$$w(\xi) = \frac{1}{|x' - \xi|^{d-2}} \frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}} \quad \left(\stackrel{(9.8)}{=} \frac{1}{|x - \xi|^{d-2}} \right). \quad (9.9)$$

Tato funkce je harmonická v $B_R(0)$, protože bod x' leží mimo $B_R(0)$, navíc je $w \in C^2(\overline{B_R(0)})$. S použitím (9.5) a (9.9) dostaneme z (9.3):

$$u(x) = \frac{1}{(d-2)\kappa_d} \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) \underbrace{\frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} \left(\frac{1}{|x' - \xi|^{d-2}} \frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}} - \frac{1}{|x - \xi|^{d-2}} \right)}_{:=A_d} dS(\xi). \quad (9.10)$$

Zbývá v A_d spočítat příslušné normálové derivace a poté přejít k původní proměnné x . Máme:

$$\frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} \left(\frac{1}{|x - \xi|^{d-2}} \right) = \nabla_\xi (|x - \xi|^{2-d}) \cdot \nu(\xi) = \frac{2-d}{2} |x - \xi|^{-d} 2(x - \xi) (-1) \cdot \nu(\xi) = (d-2) \frac{x - \xi}{|x - \xi|^d} \cdot \frac{\xi}{R},$$

neboť $\nu(\xi) = \frac{\xi}{R}$ pro $\xi \in \partial B_R(0)$. Podobně

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} \left(\frac{1}{|x' - \xi|^{d-2}} \frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}} \right) &= (d-2) \frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}} \frac{x' - \xi}{|x' - \xi|^d} \cdot \frac{\xi}{R} \stackrel{(9.6), (9.8)}{=} (d-2) \frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}} \frac{x \frac{R^2}{|x|^2} - \xi}{\frac{R^d}{|x|^d} |x - \xi|^d} \cdot \frac{\xi}{R} \\ &= (d-2) \frac{R^2 x - |x|^2 \xi}{R^2 |x - \xi|^d} \cdot \frac{\xi}{R}. \end{aligned}$$

Celkově je, pro $\xi \in \partial B_R(0)$,

$$A = \frac{d-2}{R^2 |x - \xi|^d} (R^2 x - |x|^2 \xi - R^2 x + R^2 \xi) \cdot \frac{\xi}{R} = (d-2) \frac{R^2 - |x|^2}{R^2 |x - \xi|^d} \cdot \underbrace{\frac{\xi \cdot \xi}{R}}_{= \frac{R^2}{R}} = (d-2) \frac{R^2 - |x|^2}{R |x - \xi|^d},$$

a tedy, dle (9.10),

$$u(x) = \frac{1}{\kappa_d R} \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^d} dS(\xi), \quad x \in B_R(0) \setminus \{0\}, \quad (9.11)$$

(bod $x = 0$ jsme vyloučili v okamžiku, kdy jsme začali používat kulovou inverzi). Funkce vpravo v (9.11) je však spojitá (jako funkce proměnné x) na kompaktním okolí $\overline{U_\varepsilon(0)}$ – integrabilní majorantou spojitě funkce na kompaktní množině je vhodná konstanta. Vztah (9.11) tedy platí i pro $x = 0$, cbd. $\square$

Poznámka 9.3 Jako bonus dostáváme ze vztahu (9.11) pro $x = 0$ identitu

$$u(0) = \frac{1}{\kappa_d R} \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{R^2}{|\xi|^d} dS(\xi) = \frac{1}{\kappa_d R^{d-1}} \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) dS(\xi), \quad (9.12)$$

což je vlastnost průměru pro harmonické funkce.

9.2 Poissonův vzorec ve dvou dimenzích

Odvoďme analogii vztahu (9.1) ve dvou dimenzích. Buď $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ kruh se středem 0 a poloměrem $R > 0$. Buď dále $u \in C^2(\overline{B_R(0)})$ taková, že $\Delta u = 0$ v $B_R(0)$. Potom věta o třech potenciálech dává pro tuto funkci

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) \ln|x - \xi| d\gamma(\xi) + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu}(\ln|x - \xi|) d\gamma(\xi), \quad (9.13)$$

kde uvedené integrály jsou křivkovými integrály přes obvod kruhu $B_R(0)$. Postupujeme zcela analogicky jako v důkazu lemmatu 9.1: definujeme bod kruhově inverzní k bodu $x \in B_R(0)$, $x \neq 0$, splňující (9.6)–(9.8), a pomocnou funkci

$$w(\xi) = \ln\left(\frac{|x|}{R}|x' - \xi|\right) = \ln|x| - \ln R + \ln|x' - \xi|,$$

pro kterou tedy platí (9.5). Navíc z předchozího vztahu plyne

$$\frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} w(\xi) = \frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} (\ln|x' - \xi|). \quad (9.14)$$

Odtud plyne analogie vztahu (9.10), neboli

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) \underbrace{\frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} (\ln|x - \xi| - \ln|x' - \xi|)}_{:=A_2} d\gamma(\xi). \quad (9.15)$$

Rutinní (doufejme) výpočty dále dají

$$\frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} (\ln|x - \xi|) = \frac{1}{|x - \xi|} \nabla_\xi (|x - \xi|) \cdot \frac{\xi}{R} = -\frac{(x - \xi) \cdot \xi}{R|x - \xi|^2} = \frac{R^2 - x \cdot \xi}{R|x - \xi|^2},$$

a podobně

$$\frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} (\ln|x' - \xi|) = \frac{R^2 - x' \cdot \xi}{R|x' - \xi|^2} = \frac{R^2 - x \frac{R^2}{|x|^2} \cdot \xi}{R \frac{R^2}{|x|^2} |x - \xi|^2} = \frac{|x|^2 - x \cdot \xi}{R|x - \xi|^2}.$$

Proto $A_2 = \frac{R^2 - |x|^2}{R|x - \xi|^2}$ a, uvážíme-li navíc, že $\kappa_2 = 2\pi$, dostaneme z (9.15)

$$u(x) = \frac{1}{\kappa_2 R} \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^2} d\gamma(\xi), \quad (9.16)$$

nejprve pouze pro $x \in B_R(0) \setminus \{0\}$, stejnou úvahou jako výše však ukážeme platnost (9.16) i pro $x = 0$. Všimněte si, že vztah (9.16) je speciálním případem vztahu (9.1) pro $d = 2$ (s konvencí, že plošný integrál se pro $d = 2$ chápe jako křivkový integrál). V tomto smyslu tedy platí (9.1) pro $d \geq 2$. Zkuste si jako cvičení rozmyslet, jak by tomu bylo v dimenzi $d = 1$.

Cvičení 9.4 Vyjádřete křivkový integrál (9.16) pomocí vhodné (polární) parametrizace jako jednorozměrný integrál přes interval $(0, 2\pi)$. Hodnoty funkce u vyjádřete také v polárních souřadnicích.

Návod: Použijeme parametrizaci obvodu kruhu $\partial B_R(0)$ ve formě $\xi_1 = R \cos \alpha$, $\xi_2 = R \sin \alpha$, $\alpha \in (0, 2\pi)$. Metrický člen je $\sqrt{\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial \alpha}\right)^2} = R$. Označíme dále $g(\alpha) = u(R, \alpha) = u(\xi_1, \xi_2)$ hodnoty funkce u na obvodu kruhu a, pro $x \neq 0$, $u(x) = u(r, \beta)$ hodnoty funkce uvnitř kruhu $B_R(0)$, tj. pro $x_1 = r \cos \beta$, $x_2 = r \sin \beta$, $r \in (0, R)$, $\beta \in (0, 2\pi)$. Pak $|x|^2 = r^2$, $|x - \xi|^2 = (R \cos \alpha - r \cos \beta)^2 + (R \sin \alpha - r \sin \beta)^2 = R^2 - 2rR \cos(\beta - \alpha) + r^2$, a

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{R|x - \xi|^2} d\gamma(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\beta - \alpha) + r^2} d\alpha = u(r, \beta). \quad (9.17)$$

Zvlášť ke potřeba si rozmyslet případ $x = 0$ resp. $r = 0$. Na vztah (9.17) narazíme ještě při řešení Laplaceovy rovnice na kruhu tzv. Fourierovou metodou rozdělení proměnných.