

Cvičení z PDR1 (NDIR044)

ZS 2010/11

č. 4+5

20.+27.10.2010

M. Rokyta, KMA MFF UK

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/>

5 Metoda charakteristik

1. Nalezněte charakteristiky a (metodou charakteristik) řešení následujících rovnic:

(a) $u_x + yu_y = 0, u(0, y) = \frac{1}{y}.$

Řešení: $u(x, y) = e^x/y.$

(b) $u_t + uu_x = 0, u(x, 0) = \varphi(x),$ kde

i. $\varphi(x) = 0$ pro $x \leq 0, \varphi(x) = x$ pro $x > 0,$

ii. $\varphi(x) = -x$ pro $x \leq 0, \varphi(x) = 0$ pro $x > 0.$

iii. $\varphi(x) = 0$ pro $x \leq 0, \varphi(x) = 1$ pro $x \geq 1, \varphi$ spojitá a po částech afinní funkce.

iv. $\varphi(x) = 1$ pro $x \leq 0, \varphi(x) = 0$ pro $x \geq 1, \varphi$ spojitá a po částech afinní funkce.

v. $\varphi(x) = \sin x.$

Řešení: Protože pro tuto rovnici mají charakteristiky, vycházející z bodu $[0, x_0]$, směrnici $1/\varphi(x_0)$ (to buď víte z přednášky nebo doporučuji, abyste si to spočetli), lze odtud odvodit, že v prvních třech případech existuje globální (tj. pro všechna $t > 0$) klasické řešení, zatímco v dalších dvou je klasické řešení definováno pouze lokálně.

2. Pro vaše soukromé počítání pár jednoduchých příkladů: nalezněte charakteristiky a (metodou charakteristik) řešení následujících rovnic:

(a) $u_x = 6x^2u_y.$

Řešení: $u(x, y) = F(2x^3 + y),$ kde F je libovolná hladká funkce.

(b) $u_t + au_x = 0, u(x, 0) = \sin x, (a \neq 0).$

Řešení: $u(x, t) = \sin(x - at).$ Pro zvědavé: Odvoďte, že řešení Cauchyovy úlohy $u_t + au_x = 0, u(x, 0) = \varphi(x), (a \neq 0)$ je toto: $u(x, t) = \varphi(x - at)$ ještě jinak, než metodou charakteristik.Návod: Zaveďte nové proměnné $\xi = x - at, \eta = x + at.$

(c) $u_t + xu_x + tu = 0, u(x, 0) = \sin x.$

Řešení: $u(x, t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \sin(xe^{-t}).$

(d) $(z + y - x)u_x + (z + x - y)u_y + zu_z = 0.$

Řešení: $u(x, y, z) = \Phi(x + y - 2z, z^2(x - y)),$ kde Φ je libovolná hladká funkce dvou proměnných.

3. Složitější příklady: nalezněte metodou charakteristik řešení následujících rovnic:

(a) $xzz_x + yzz_y = x^2 + y^2 + z^2, z(1, y) = y^2.$

Návod: Podrobný návod na řešení naleznete na konci zápisu tohoto paragrafu.¹Řešení: $z(x, y) = \sqrt{2(x^2 + y^2) \ln x + \frac{y^4}{x^2}}.$ Diskutujte podrobně jak je to s definičním oborem tohoto řešení.

(b) $(y + z)^2w_x - x(y + 2z)w_y + xzw_z = 0, w(x, 0, z) = x^2 + 2z^2, (\text{pro neznámou fci } w = w(x, y, z)).$

Návod: Příklad byl řešen na cvičení, metodou charakteristik.Řešení: $w(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 3yz.$ ¹To znamená, že byste to mohli nejprve zkusit sami. ☺

(c) $(y+z)^2 z_x - x(y+2z)z_y = xz$, $z(x,0) = x^2$, (pro neznámou funkci $z = z(x,y)$).

Návod: Příklad byl řešen na cvičení, metodou charakteristik. K vyřešení tohoto příkladu se hodí obecné řešení předchozího příkladu, jak záhy zjistíte, budete-li postupovat při řešení metodou, navrženou na přednášce.

Řešení: Řešení $z = z(x,y)$ je zadáno implicitně vztahem $(y^2 + yz + x^2)^2 - (z^2 + yz) = 0$. Diskutujte jak je to s definičním oborem tohoto řešení.

4.* Metodou charakteristik řešte následující úlohu² pro neznámou funkci $w = w(t,y)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw} \left(1 + sd \frac{\partial w}{\partial y}\right), & y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ w(0,y) &= 0, & y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

M, σ, s, d jsou kladné (známé) konstanty. Uvažujte $|y|$ a $t > 0$, obě dostatečně malé.

Návod: Podrobný návod na řešení naleznete na konci zápisu tohoto paragrafu.

Řešení: $w(t,y) = \frac{1}{s(d+1)}(\sigma - y - \sqrt{(\sigma - y)^2 - 2s(d+1)M\sigma t})$.

5. Nalezněte řešení systému rovnic

$$U_t(x,t) + A \cdot U_x(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

$$U(x,0) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.2)$$

kde $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, a $f(x), g(x)$ jsou dané funkce.

Návod: Najděte regulární matici P tak, že $P^{-1}AP = D$, kde D je diagonální matice. Zaveďte novou vektorovou funkci $V = P^{-1}U$ a ukažte, že pro tuto funkci se systém rovnic rozpadne na dvě separované rovnice pro v_1 a v_2 , které vyřešte každou zvlášť metodou charakteristik. Vyjde

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{1}{2}f(x-4t) + \frac{1}{2}f(x+4t) + g(x-4t) - g(x+4t), \\ u_2 &= \frac{1}{4}f(x-4t) - \frac{1}{4}f(x+4t) + \frac{1}{2}g(x-4t) + \frac{1}{2}g(x+4t).\end{aligned}$$

6. Pro obecný systém s rovnic tvaru (5.1) ukažte, že pokud A je konstantní $s \times s$ diagonalizovatelná matice, lze postup z předchozího případu vždy použít a nalézt řešení takového systému. Připomeňte si, že matice, mající různá reálná vlastní čísla, je diagonalizovatelná.

Návody k řešení některých složitějších příkladů z tohoto paragrafu.

Netvrdím, že uvedený postup je jediný možný. Je však konzistentní s postupem, který byl podrobně vysvětlen na přednášce.

- $xzz_x + yzz_y = x^2 + y^2 + z^2$, $z(1,y) = y^2$.

Návod: Zaveďte novou funkci $u = z^2$ a zjistěte, že původní (kvazilineární) úloha je pro klasická řešení ekvivalentní úloze $xu_x + yu_y = 2x^2 + 2y^2 + 2u$, $u(1,y) = y^4$ pro neznámou funkci $u = u(x,y)$. Řešte pomocnou (lineární) úlohu (teorie k tomu — viz přednáška) pro $w = w(x,y,u)$ tvaru $xw_x + yw_y + (2x^2 + 2y^2 + 2u)w_u = 0$, $w(1,y,u) = u - y^4$. Řešíme např. pro $x > 0, y > 0$ (diskutujte proč musí být $x \neq 0, y \neq 0$). Charakteristiky této úlohy splňují rovnice $\frac{dx}{dt} = x$, $\frac{dy}{dt} = y$, $\frac{du}{dt} = 2x^2 + 2y^2 + 2u$, což dává řešení $x = x_0 e^t$, $y = y_0 e^t$, $u = 2te^{2t}(x_0^2 + y_0^2) + u_0 e^{2t}$ (kde $x_0 = x(0)$ atd.). Vyloučením proměnné t lze získat charakteristickou přímku, procházející bodem $[x_0, y_0, u_0]$, jako průsečík dvou ploch $\frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0}$ a $u = 2(x_0^2 + y_0^2)\frac{x^2}{x_0^2} \ln \frac{x}{x_0} + u_0 \frac{x^2}{x_0^2}$. Tato přímka protíná rovinu, na které je dána počáteční podmínka, v bodě $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}]$, který je charakterizován podmínkou $x = \bar{x} = 1$, což dá $\bar{y} = \frac{y_0}{x_0}$, $\bar{u} = -2(x_0^2 + y_0^2)\frac{1}{x_0^2} \ln x_0 + u_0 \frac{1}{x_0^2}$. Hodnota řešení $w(x_0, y_0, u_0)$ je podle teorie rovna hodnotě $w(1, \bar{y}, \bar{u})$, tedy

²Výsledek této úlohy se uplatní v důkazu věty Cauchyho-Kowalevské.

$w(x_0, y_0, u_0) = w(1, \bar{y}, \bar{u}) = \bar{u} - \bar{y}^4 = -2(x_0^2 + y_0^2) \frac{1}{x_0^2} \ln x_0 + u_0 \frac{1}{x_0^2} - \frac{y_0^4}{x_0^2}$, což platí v libovolném bodě $[x_0, y_0, u_0]$ na charakteristice, tedy je možno index „nula“ nepsat. Na závěr z rovnice $w(x, y, u) = 0$ vypočteme u jako implicitně zadanou funkci.

- $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw} \left(1 + sd \frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad w(0, y) = 0.$

Návod: Řešíme tedy rovnici $w_t - \frac{M\sigma sd}{\sigma - y - sw} w_y = \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw}$. Řešíme nejprve pomocnou lineární úlohu pro $z = z(t, y, w)$, a sice $z_t - \frac{M\sigma sd}{\sigma - y - sw} z_y + \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw} z_w = 0$ s počáteční podmínkou $z(0, y, w) = w$. Charakteristiky této úlohy jsou popsány rovnicemi $\frac{d}{d\tau} t = 1, \frac{d}{d\tau} y = -\frac{M\sigma sd}{\sigma - y - sw}, \frac{d}{d\tau} w = \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw}$. První z těchto rovnic má triviální řešení $t = \tau + c$, proměnnou parametrizace τ však můžeme vhodně posunout, a proto bez újmy na obecnosti předpokládat, že $t = \tau$, tj. $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}$, a psát

$$\frac{d}{dt} y = -\frac{M\sigma sd}{\sigma - y - sw}, \quad \frac{d}{dt} w = \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw}. \quad (5.3)$$

Úspěch při řešení tohoto systému bude záviset na tom, jestli budeme umět například vyjádřit y pomocí w a dosadit to do rovnice pro $\frac{d}{dt} w$. Udělejme to: z tvaru rovnic pro $\frac{d}{dt} y$ a $\frac{d}{dt} w$ je vidět, že $\frac{d}{dt}(y + sdw) = 0$, odkud máme pro $y(0) = y_0, w(0) = w_0$,

$$y + sdw = y_0 + sdw_0 \quad (= : c_0). \quad (5.4)$$

Vypočítáme odtud y , dosadíme do druhé rovnice v (5.3), a obdržíme $\frac{d}{dt} w = \frac{M\sigma}{\sigma - c_0 + s(d-1)w}$, odkud dostaneme $(\sigma - c_0)w + \frac{s(d-1)}{2}w^2 = M\sigma t + C$. Pro $t = 0$ získáme hodnotu konstanty C a s její pomocí upravíme tento vztah na

$$(\sigma - y)w - \frac{s(d+1)}{2}w^2 - M\sigma t = (\sigma - y_0)w_0 - \frac{s(d+1)}{2}w_0^2. \quad (5.5)$$

Rovnice (5.4), (5.5) nejen popisují charakteristiku, ale zároveň říkají, že $y + sdw, (\sigma - y)w - \frac{s(d+1)}{2}w^2 - M\sigma t$ jsou konstantní na charakteristice. Odtud plyne, že

$$z(t, y, w) = F\left(y + sdw, (\sigma - y)w - \frac{s(d+1)}{2}w^2 - M\sigma t\right) \quad (5.6)$$

(kde F je dostatečně hladká) je obecným řešením problému $z_t - \frac{M\sigma sd}{\sigma - y - sw} z_y + \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw} z_w = 0$ (zkuste si dosadit). Uvažujme počáteční podmínku pro z tvaru $z(0, y, w) = w$. Tedy

$$w = F\left(\underbrace{y + sdw}_{:=a}, \underbrace{(\sigma - y)w - \frac{s(d+1)}{2}w^2}_{:=b}\right). \quad (5.7)$$

Z rovnic $a = y + sdw, b = (\sigma - y)w - \frac{s(d+1)}{2}w^2$ spočteme w — vypočtením y z první a dosazením do druhé rovnice dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici pro w , jejíž řešení je

$$w = F(a, b) = \frac{-(\sigma - a) \pm \sqrt{(\sigma - a)^2 + 2bs(d-1)}}{s(d-1)}, \quad (5.8)$$

což dává (až na jedno znaménko, které za chvíli určíme) tvar funkce F . Použitím tohoto tvaru funkce F v (5.6) dostaneme po úpravě

$$z(t, y, w) = \frac{-(\sigma - y - sdw) \pm \sqrt{(\sigma - y - sw)^2 - 2s(d-1)M\sigma t}}{s(d-1)}, \quad (5.9)$$

pro dostatečně malá $|y|$ však má platit $z(0, y, w) = w$ a tedy před odmocninou v (5.9) musí být znaménko „plus“, čímž dostáváme jediné řešení úlohy $z_t - \frac{M\sigma sd}{\sigma - y - sw} z_y + \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw} z_w = 0$ s počáteční podmínkou $z(0, y, w) = w$. Na závěr musíme ještě z rovnice $z(t, y, w) = 0$ vypočítat $w = w(y, t)$, což opět vede na kvadratickou rovnici pro w . Jejím formálním řešením dostaneme

$$w(t, y) = \frac{(\sigma - y) \pm \sqrt{(\sigma - y)^2 - 2s(d+1)M\sigma t}}{s(d+1)}. \quad (5.10)$$

Uvažujeme však $|y|$ malá (viz zadání), tj. $\sqrt{(\sigma - y)^2} = (\sigma - y)$. Pak ovšem z okrajové podmínky $w(0, y) = 0$ plyne, že ve vztahu (5.10) je potřeba brát před odmocninou znaménko „mínus“, a tedy je

$$w(t, y) = \frac{(\sigma - y) - \sqrt{(\sigma - y)^2 - 2s(d+1)M\sigma t}}{s(d+1)}. \quad (5.11)$$