

Cvičení z PDR1 (NDIR044)

ZS 2010/11

č. 3

13.10.2010

M. Rokyta, KMA MFF UK

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/>4 Sférické souřadnice v $\mathbb{R}^m$

1. Dokažte multinomickou větu:

Je-li $k, m \in \mathbb{N}$ a $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, pak

$$(x_1 + \dots + x_m)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}, \quad (4.1)$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ je multiindex a $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ jeho výška.Návod: Postupujte indukcí dle m a použijte binomickou větu (kterou považujeme za dokázanou) na výraz $((x_1 + \dots + x_m) + x_{m+1})^k$.

2. Spočítejte hodnotu Gaussova integrálu

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2} dx = \pi^{\frac{m}{2}}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Návod:

- (a) Nejprve spočítejte onu hodnotu pro $m = 1$. Označíme $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ a dále použijeme následující trik (předávaný od jisté generace z generace na generaci): spočítejte I^2 převodem na dvojnou integraci přes $\mathbb{R}^2$, a dále užijeme polární souřadnice $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$. Kdo si ještě nevzpomněl, pak zde má podrobnější návod:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} d\varphi dr \stackrel{[r^2=t]}{=} \frac{2\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \pi,$$

tedy $I = \sqrt{\pi}$ což dává výsledek pro $m = 1$. Z důvodů symetrie dále máme

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (4.3)$$

- (b) Pro
- $m = 2, 3, \dots$
- uvažte, že

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} \dots e^{-x_m^2} dx_1 \dots dx_m = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^m = (\sqrt{\pi})^m \quad \text{c.b.d.}$$

3. Definujeme tzv. gamma-funkci předpisem

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx. \quad (4.4)$$

Ukažte:

- (a)
- $\Gamma(s) \in \mathbb{R}$
- pro všechna
- $s > 0$
- .

Návod: Studujte chování integrálu (4.4) v okolí nuly a v okolí ∞ .

- (b)
- $\Gamma(s) \in \mathcal{C}^\infty((0, \infty))$
- .

Návod: Integrál (4.4) je integrál s parametrem a na to má pan Lebesgue techniku integrabilních majorant – pomocí nich ukažte, že Γ i všechny její derivace jsou spojité.

- (c)
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
- pro všechna
- $s > 0$
- .

Návod: Použijte per partes v integrálu pro $\Gamma(s+1)$.

- (d) Pro
- $n \in \mathbb{N}$
- je
- $\Gamma(n) = (n-1)!$
- .

Návod: $\Gamma(1)$ spočítejte přímo z (4.4), a dále použijte vztah $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ z předchozího bodu.

- (e) Platí také

$$\Gamma(s) = 2 \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2s-1} dy, \quad s > 0. \quad (4.5)$$

Návod: Substitute $x = y^2$.

- (f) Platí
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- .

Návod: Dosadte $s = \frac{1}{2}$ do (4.5) a užit (4.3). Odvoďte dále vyjádření Γ -funkce ve všech bodech typu $n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, s použitím vlastnosti (c). Mělo by vám vyjít

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)(2n-3) \cdots 1}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}. \quad (4.6)$$

V posledním kroku jsme zlomek rozšířili součinem $2n(2n-2) \cdots 2$, z kterého jsme pak ve jmenovateli vytknuli „všechny dvojky“.

4. Pomocí sférických souřadnic v
- $\mathbb{R}^m$
- spočítejte (pro PDR důležitý) povrch jednotkové sféry v dimenzi
- m
- , který se značí
- $\varkappa_m$
- a má hodnotu

$$\varkappa_m = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}. \quad (4.7)$$

Návod:

- Sférické souřadnice v $\mathbb{R}^m$ je možno zavést mnoha způsoby, jeden z nich je tento:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \vartheta_1, \\ x_2 &= r \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2, \\ x_3 &= r \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3, \\ &\dots \\ x_{m-1} &= r \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{m-2} \cos \vartheta_{m-1}, \\ x_m &= r \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{m-2} \sin \vartheta_{m-1}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

kde $r \in (0, \infty)$, $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{m-2} \in (0, \pi)$, $\vartheta_{m-1} \in (0, 2\pi)$. Jakobián této substituce je

$$J_m = r^{m-1} \underbrace{\sin^{m-2} \vartheta_1 \sin^{m-3} \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{m-2}}_{=: \tilde{J}_m} > 0. \quad (4.9)$$

Zkuste si dokázat (4.9) např. indukcí podle m . Udělejte si geometrickou představu o tom, jak se induktivně vytvářejí souřadnice (4.8). Úplně bude stačit, když si napíšete a porovnáte tyto souřadnice ve 2 a 3 dimenzích.

- Uvědomme si ještě, že pokud budeme uvažovat r v (4.8) rovno konstantní jedničce a necháme jinak všechny úhly probíhat své meze, „popíšeme“ tím přesně jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^m$. Tedy je

$$\varkappa_m = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \tilde{J}_m d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{m-2} d\vartheta_{m-1}, \quad (4.10)$$

plocha jednotkové sféry v dimenzi m . Tím jsme ji ještě nespočetli, jen popsali.

- Hlavní trik výpočtu $\varkappa_m$ spočívá v tom, že integrál z (4.2) se spočte znovu a jinak, tentokrát pomocí výše uvedených sférických souřadnic, a oba výsledky se porovnají. Máme

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2} dx = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi e^{-r^2} r^{m-1} \tilde{J}_m d\vartheta_1 \cdots d\vartheta_{m-2} d\vartheta_{m-1} dr \stackrel{(4.10)}{=} \varkappa_m \int_0^\infty e^{-r^2} r^{m-1} dr. \quad (4.11)$$

Ale na konci řádku (4.11) s ulehčením spatříme $\int_0^\infty e^{-r^2} r^{m-1} dr = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{m}{2})$ podle (4.4). Když navíc integrál vlevo v (4.11) nahradíme jeho hodnotou, kterou jsme spočetli v (4.2), dostaneme rovnost

$$\pi^{\frac{m}{2}} = \frac{1}{2} \varkappa_m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)$$

z které hned plyne (4.7).

5. S využitím (4.7) spočtěte objem $V_m(R)$ a povrch $S_m(R)$ koule v $\mathbb{R}^m$ s poloměrem R . Vyjádřete $\varkappa_m$, $V_m(R)$ a $S_m(R)$ zvlášť pro sudá a zvlášť pro lichá m .

Návod:

- Jste již zkušení s integrováním ve sférických m -dimenzionálních souřadnicích, proto vás tedy nepřekvapí, že

$$V_m(R) = \int_{|x| \leq R} \dots \int 1 \, dx \stackrel{(4.8)}{=} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi r^{m-1} \tilde{J}_m \, d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{m-2} d\vartheta_{m-1} \, dr \stackrel{(4.10)}{=} \varkappa_m \frac{R^m}{m}. \quad (4.12)$$

Podobně

$$S_m(R) = \int_{|x|=R} \dots \int 1 \, dx \stackrel{[(4.8) \text{ pro } r=R]}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi R^{m-1} \tilde{J}_m \, d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{m-2} d\vartheta_{m-1} \stackrel{(4.10)}{=} \varkappa_m R^{m-1}. \quad (4.13)$$

- Jistě jste si všimli (a snad si umíte i odůvodnit), že

$$\frac{d}{dR} V_m(R) = S_m(R), \quad V_m(R) = \int_0^R S_m(r) \, dr.$$

- Pro $m = 2k$, resp. $m = 2k + 1$ dostanete z (4.7), (4.12), (4.13), za použití vlastností Γ -funkce $\Gamma(k) = (k-1)!$ a (4.6) postupně

$$\begin{aligned} \varkappa_{2k} &= \frac{2\pi^k}{(k-1)!}, & \varkappa_{2k+1} &= \frac{2^{k+1} k! \pi^k}{(2k)!}, \\ V_{2k}(R) &= \frac{(\pi R^2)^k}{k!}, & V_{2k+1}(R) &= \frac{2^{k+1} k! \pi^k}{(2k+1)!} R^{2k+1}, \\ S_{2k}(R) &= \frac{2\pi^k}{(k-1)!} R^{2k-1}, & S_{2k+1}(R) &= \frac{2^{k+1} k! \pi^k}{(2k)!} R^{2k}. \end{aligned}$$