

## Cvičení z PDR1 (NDIR044)

ZS 2010/11

č. 2

6.10.2010

M. Rokyta, KMA MFF UK

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/>

## 3 Odvození některých základních PDR

## 3.1 Odvození rovnice vedení tepla

Odvození rovnice vedení tepla - viz rukopisné poznámky k přednášce, str. 13.

## 3.2 Odvození rovnice minimální plochy

Buď  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  oblast s hladkou hranicí  $\partial\Omega$ . Hledáme funkci  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  takovou, že je na hranici  $\partial\Omega$  rovna předepsané (hladké) funkci  $\varphi$  a přitom plocha grafu (tj. dvourozměrná míra množiny  $\{y = u(x); x \in \Omega, u = \varphi \text{ na } \partial\Omega\}$ ) je minimální. Odvoďte rovnici, kterou musí nutně hladké (tak hladké, jak je potřeba)  $u$  v oblasti  $\Omega$  splňovat (tzv. rovnici minimální plochy):

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0. \quad (3.1)$$

Návod: Vyjděte z toho, že velikost uvedené plochy dané grafem  $u$  je dána jako

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, dx$$

a jde tedy o minimalizaci funkcionálu  $\Phi$  na prostoru  $\{u(x) \text{ „dostatečně hladká“}; u = \varphi \text{ na } \partial\Omega\}$ . Nutnou podmínkou pro to je, aby

$$\left. \frac{d}{ds} \Phi(u + sv) \right|_{s=0} = 0, \quad (3.2)$$

kde  $v(x)$  je libovolná hladká funkce na uzávěru  $\Omega$  taková, že  $v = 0$  na  $\partial\Omega$ .<sup>1</sup> Spočtete tedy (3.2) (vyjde vám, doufám,  $\int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, dx = 0$ ), dále použijte jednu z Gauss-Green-Ostrogradského formulí a odvoďte odtud

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) v \, dx = 0.$$

Konečně se zamyslete nad tím, že pokud toto má platit pro všechna  $v$  výše zmíněných vlastností, musí pro dostatečně hladká  $u$  platit (3.1) ve všech bodech. Provedte všechny kroky podrobně!

<sup>1</sup>Znalci variačního počtu jistě postřehli, že na levé straně výrazu (3.2) počítáme tzv. Gâteauxovu derivaci  $\delta\Phi(u; v)$ , tj. „derivaci  $\Phi$  v bodě  $u$  a směru  $v$ “. Fyzici zobrazení  $\delta\Phi(u; \cdot)$  někdy říkají „variaci  $\Phi$ “. Jde o zobecnění klasického pojmu derivace ve směru.