

Máme nyní

$$u_x = -\sqrt{|x|} u_y' \quad u_y = u_x'$$

$$u_{xx} = -x u_y' y' + u_y' / 2\sqrt{|x|}$$

$$u_{yy} = u_{x'x'},$$

takže rovnice přejde na tvar

$$u_{x'x'} + u_{y'y'} = -\frac{u_y'}{y'}$$

/v oblasti $y' > 0$ /.

Body $x = 0$ jsou body parabolichnosti /a rovnice má v nich tvar

$$u_{yy} = 0 / .$$

k.6. CVIČENÍ

k.6.1

Převedte na kanonický tvar následující rovnice:

$$1. \quad u_{xx} - 4 u_{xy} + 2 u_{xz} + 4 u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

$$2. \quad u_{xx} + u_{tt} + u_{zz} - 2 u_{tx} + u_{xz} + u_{ty} - 2 u_{yz} = 0. \quad (\text{Zjednodušená rovnice})$$

$$3. \quad u_{xy} + u_{xz} - u_{tx} - u_{yz} + u_{ty} + u_{tz} = 0.$$

$$4. \quad u_{xx} + u_{yy} + 2 u_{xy} + 2 u_x + 6 u_y = 0.$$

$$5. \quad u_{xx} - 2 u_{yy} + 2 u_{xy} + u = 0.$$

k.6.2

Ukažte, že Laplaceův operátor je invariantní vůči otočení.

k.6.3

Ukažte, že vlnový operátor v R_{3+1}

$$\square u = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz}$$

je invariantní vůči transformaci

$$\tau = \frac{t + \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \xi = \frac{\beta t + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\eta = y, \quad \xi = z$$

($\beta \in (-1, 1)$) /speciální případ Lorentzovy transformace/.

k.6.4

Převedte na kanonický tvar rovnice

$$1. \quad \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i < k}}^n u_{x_i x_k} = 0,$$

$$2. \quad \sum_{i < k} u_{x_i x_k} = 0.$$

k.6.5

Následující rovnice zjednodušte převedením na kanonický tvar a zavedením nové neznámé funkce v:

$$1. \quad a u_{xx} + 4 a u_{xy} + a u_{yy} + b u_x + c u_y + u = 0.$$

$$2. \quad 2 a u_{xx} + 2 a u_{xy} + a u_{yy} + 2 b u_x + 2 c u_y + u = 0.$$

$$3. \quad a u_{xx} + 2 a u_{xy} + a u_{yy} + b u_x + c u_y + u = 0.$$

k.6.6

Převedte na kanonický tvar rovnici

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

$$\text{s maticí } (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$$

$$a > 0, \quad b > 0.$$

k.6.7

Odstraňte členy s prvními derivacemi v rovnici

$$\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + c u = f(x_1, \dots, x_n), \quad a_1 \neq 0.$$

k.6.8

Nalezněte oblast hyperbolicity, elipticity a parabolicity pro rovnici

$$(a + x) u_{xx} + 2xy u_{xy} - y^2 u_{yy} = 0.$$

Jak tyto oblasti závisí na číselném parametru a ?

k.6.9

Následující rovnice převedte na kanonický tvar v oblastech, v nichž zachovávají typ:

1. $u_{xx} + x u_{yy} = 0.$
2. $u_{xx} + y u_{yy} = 0.$
3. $u_{xx} + y u_{yy} + \frac{1}{2} u_y = 0.$
4. $y u_{xx} + x u_{yy} = 0.$
5. $x u_{xx} + y u_{yy} = 0.$
6. $u_{xx} + xy u_{yy} = 0.$
7. $u_{xx} \operatorname{sign} y + 2 u_{xy} + u_{yy} = 0.$
8. $u_{xx} + 2 u_{xy} + (1 - \operatorname{sign} y) u_{yy} = 0.$
9. $u_{xx} \operatorname{sign} y + 2 u_{xy} + u_{yy} \operatorname{sign} x = 0.$
10. $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0.$
11. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$
12. $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0.$
13. $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0.$
14. $y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + x^2 u_{yy} = 0.$
15. $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0.$
16. $4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} - 4y^2 u_x = 0.$
17. $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} - 3y^2 u_{yy} - 2xu_x + 4y u_y + 16x^4 u = 0.$

$$18. (1 + x^2) u_{xx} + (1 + y^2) u_{yy} + x u_x + y u_y = 0.$$

$$19. u_{xx} \sin^2 x - 2y u_{xy} \sin x + y^2 u_{yy} = 0.$$

k.6.10

Vyšetřujte rovnici

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g(|\nabla u|) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g(|\nabla u|) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0,$$

kde $g \in C^1((0, \infty))$ je klesající funkce taková, že funkce $h : h(t) = tg(t)$ roste na intervalu $(0, 1)$, klesá na intervalu $(1, \infty)$ a $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ /rovnice transsonického proudění/.

Ukažte:

1. V bodech, v nichž $|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} < 1$, je rovnice eliptická vzhledem k danému řešení;
2. v bodech, v nichž $|\nabla u| > 1$, je rovnice hyperbolická.

ŘEŠENÍ

k.6.1

1. $u_{\xi\xi} = u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi}, \quad \xi = x + \frac{1}{2}y - z, \quad \eta = -\frac{1}{2}y, \quad \xi = z.$
2. $u_{t't'} = u_{xx'} + u_{yy'} + u_{zz'}, \quad t' = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z,$
 $x' = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, \quad y' = -\frac{1}{2\sqrt{3}}t + \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}y - \frac{1}{2\sqrt{3}}z,$
 $z' = -\frac{1}{2\sqrt{5}}t + \frac{1}{2\sqrt{5}}x - \frac{1}{2\sqrt{5}}y + \frac{1}{2\sqrt{5}}z.$
3. $u_{\tau\tau} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi}, \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}t,$
 $\xi = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t, \quad \tau = \frac{1}{2\sqrt{3}}x - \frac{1}{2\sqrt{3}}y + \frac{1}{2\sqrt{3}}t.$
4. $u_{xx'} + u_{yy'} + 2u_{x'} + 4u_{y'} = 0, \quad x' = x, \quad y' = -x + y.$
5. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u = 0, \quad \xi = x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \quad \eta = \frac{\sqrt{2}}{2}y.$

k.6.2

Otočení je dáno vzorcí $x'_i = d_{ij}x_j$, $i = 1, \dots, n$, kde d_{ij} je ortogonální matice, tj. $d_{ij}d_{kj} = d_{ji}d_{jk} = \delta_{ik}$ /Kronekerovo delta/.

Laplaceův operátor $\Delta u = \delta_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ přejde na operátor

$$a'_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x'_i \partial x'_j}, \quad a'_{ij} = d_{ik}d_{jl} \delta_{kl} = d_{ik}d_{jk} = \delta_{ij},$$

k.6.3

Matice koeficientů A a matice transformace D jsou:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vynásobením dostaneme novou matici ve tvaru $A' = DAD^T = DAD = A$.

k.6.4

$$u_{x'_1 x'_1} \pm \sum_{i=2}^n u_{x'_i x'_i} = 0, \quad x'_1 = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} (x_1 + \dots + x_n),$$

$x'_i = a_{ij} x_j$, $i = 2, \dots, n$ ($j=1, \dots, n$), kde $a_{i1}, \dots, a_{in}$,

$i = 1, \dots, n$ je libovolný ortonormální systém řešení rovnice $a_1 + \dots + a_n = 0$; v případě 1. platí znaménka +, v případě 2. platí znaménka -.

k.6.5

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{4bc - b^2 - c^2 - 12a}{144 a^2} v = 0, \quad \xi = y + (\sqrt{3}-2)x,$$

$$\eta = y - (\sqrt{3}+2)x, \quad u(\xi, \eta) = e^{\alpha\xi + \beta\eta} v(\xi, \eta),$$

$$\alpha = \frac{c - (\sqrt{3}+2)b}{12a}, \quad \beta = \frac{c + (\sqrt{3}-2)b}{12a}.$$

$$2. \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{2}{a} \left(\frac{2bc - b^2 - 2c^2}{a} + 1 \right) v = 0, \quad \xi = y - x/2,$$

$$\eta = x/2, \quad u(\xi, \eta) = e^{\alpha\xi + \beta\eta} v(\xi, \eta), \quad \alpha = \frac{b-2c}{a}, \quad \beta = -\frac{b}{a}.$$

$$3. \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{c-b}{a} \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = y - x, \quad \eta = x, \quad u(\xi, \eta) = e^{\alpha\xi + \beta\eta} v(\xi, \eta),$$

$$\alpha = \frac{b^2 - 4a}{4a(c-b)}, \quad \beta = -\frac{b}{2a}.$$

k.6.6

$$u_{y_1 y_1} = u_{y_2 y_2} + u_{y_3 y_3}, \quad y_1 \sqrt{a+b} = x_1 + x_2, \quad y_2 \sqrt{a+b} = x_1 - x_2, \quad y_3 \sqrt{a+b} = -x_1 - x_2 + x_3.$$

k.6.7

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \left(c - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{a_i} \right) v = e^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i} x_i} f(x_1, \dots, x_n),$$

$$u(x_1, \dots, x_n) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i} x_i} v(x_1, \dots, x_n).$$

k.6.8

$$\text{Označme } x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}. \text{ Pak: pro } a < \frac{1}{4} \text{ je}$$

rovnice hyperbolická pro $x < x_1$ resp. $x > x_2$, eliptická pro

$x_1 < x < x_2$ a přímky $x = x_1$, $x = x_2$ jsou body parabolicity; pro $a = \frac{1}{4}$ mizí oblast elipticity; pro $a > \frac{1}{4}$ je rovnice hyperbolická všude.

k.6.9

1. Pro $x < 0$ je rovnice hyperbolická a substitucí

$\xi = \frac{3}{2} y + (\sqrt{-x})^3, \eta = \frac{3}{2} y - (\sqrt{-x})^3$ přejde na tvar

$u - \frac{1}{6(\xi - \eta)} (u_\xi - u_\eta) = 0, \xi > \eta$; pro $x > 0$ je rovnice

eliptická a substitucí $\xi' = \frac{3}{2} y, \eta' = -\sqrt{x^3}$ přejde na tvar

$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta'} u_{\eta'} = 0, \eta' < 0$.

2. Pro $y < 0$ je rovnice hyperbolická a substitucí $x' = x +$

$+ 2\sqrt{-y}, y' = x - 2\sqrt{-y}$ přejde na tvar

$u_{x'y'} + \frac{1}{2(x' - y')} (u_{x'} + u_{y'}) = 0, x' > y'$. Pro $y > 0$ je rov-

nice eliptická a substitucí $x'' = x, y'' = 2\sqrt{y}$ přejde na

tvar $u_{x''x''} + u_{y''y''} - \frac{1}{y''} u_{y''} = 0, y'' > 0$.

3. Stejnými substitucemi jako v předchozím příkladě přejde rovnice v oblasti hyperboličnosti ($y < 0$) na tvar $u_{x'y'} = 0$ a v oblasti eliptičnosti ($y > 0$) na tvar $u_{x'x'} + u_{y'y'} = 0$. Všimněte si, že v předchozím případě měly koeficienty v kanonickém tvaru singularity, v tomto případě nikoliv.

4. V druhém a čtvrtém kvadrantu je rovnice hyperbolická a převádí se na kanonický tvar $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\xi} u_\xi - \frac{1}{3\eta} u_\eta = 0$

substitucí $\xi = (-x)^{3/2}, \eta = (y)^{3/2}$ ve druhém kvadrantu, resp.

$\xi = x^{3/2}, \eta = (-y)^{3/2}$ ve čtvrtém kvadrantu; v prvním a třetím kvadrantu je rovnice eliptická a přejde na kanonický tvar $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\xi} u_\xi + \frac{1}{3\eta} u_\eta = 0$ substitucí $\xi = x^{3/2},$

$\eta = y^{3/2}$ v prvním kvadrantu, resp. $\xi = (-x)^{3/2}, \eta = (-y)^{3/2}$ ve třetím kvadrantu. Osy x, y se skládají z bodů parabolicity.

5. Rovnice je eliptická v prvním a třetím kvadrantu, hyperbolická ve druhém a čtvrtém kvadrantu a substitucí $\xi = \sqrt{|x|}, \eta = \sqrt{|y|}$ přejde v prvním, resp. ve třetím kvadrantu na tvar

$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$, a ve druhém, resp. čtvrtém

kvadrantu přejde na tvar $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$.

Osy x a y jsou body parabolicity.

6. Rovnice je v prvním a třetím kvadrantu eliptická, ve druhém a čtvrtém kvadrantu je hyperbolická a substitucí

$\xi = \frac{2}{3}|x|^{3/2}, \eta = 2|y|^{1/2}$ se převádí na tvar

$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\xi} u_\xi + \frac{1}{\eta} u_\eta = 0$.

7. Rovnice je v prvním a druhém kvadrantu parabolická a substitucí $\xi = x+y, \eta = x-y$ přejde na kanonický tvar $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$.

Ve třetím a čtvrtém kvadrantu je rovnice hyperbolická a substitucí $\xi = (1+\sqrt{2})x + y, \eta = (1-\sqrt{2})x + y$ přejde na rovnici $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

8. Rovnice je v prvním a druhém kvadrantu hyperbolická a substitucí $\xi = x-2y, \eta = y$ přejde na tvar $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Ve třetím a čtvrtém kvadrantu je eliptická a substitucí $\xi = x - y, \eta = x$ přejde na tvar $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$.

9. V prvním a třetím kvadrantu je rovnice parabolická a substitucí $\xi = x+y, \eta = x-y$ přejde na tvar $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$ v prvním kvadrantu a $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$ ve třetím kvadrantu. Ve druhém a čtvrtém kvadrantu je rovnice hyperbolická a substitucí

$\xi = -(1+\sqrt{2})x + y, \eta = -(1-\sqrt{2})x + y$ ve druhém kvadrantu, resp. $\xi = (1+\sqrt{2})x + y, \eta = (1-\sqrt{2})x + y$ ve čtvrtém kvadrantu přejde na tvar $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

10. Rovnice je hyperbolická všude kromě souřadných os, které jsou tvořeny body parabolicity. Převádí se na kanonický

tvar $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta}{2(\eta^2 - \xi^2)} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\xi}{2(\eta^2 - \xi^2)} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$ substitucí $\xi = y^2 - x^2, \eta = y^2 + x^2$.

11. Rovnice je všude kromě souřadných os hyperbolická, na souřadných osách je parabolická a převádí se na kanonický tvar $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ substitucí $\xi = xy, \eta = \frac{y}{x}$.

12. Rovnice je parabolická na souřadných osách, všude jinde je eliptická a převádí se na kanonický tvar $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - u_{\xi} - u_{\eta} = 0$ substitucí $\xi = \ln|x|, \eta = \ln|y|$,

13. Rovnice je parabolická na souřadných osách, jinde je eliptická a substitucí $\xi = x^2, \eta = y^2$ přejde na tvar $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$.

14. Rovnice je všude parabolická a substitucí $\xi = \frac{x^2 + y^2}{2}, \eta = \frac{x^2 - y^2}{2}$ přejde na tvar $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$.

15. Rovnice je všude parabolická a substitucí $\xi = \frac{y}{x}, \eta = y$ přejde na tvar $u_{\eta\eta} = 0$.

16. Rovnice je hyperbolická a substitucí $\xi = e^x + y^2, \eta = -e^x + y^2$ přejde na tvar $u_{\xi\eta} = \frac{1}{8(\xi + \eta)^2} (u_{\xi} + u_{\eta})$.

17. Rovnice je hyperbolická všude kromě souřadných os, na kterých je parabolická. Substitucí $\xi = xy, \eta = \frac{x}{y}$ přejde na tvar $u_{\xi\eta} + \frac{1}{4\eta} u_{\xi} - \frac{1}{\xi} u_{\eta} + u = 0$.

18. Rovnice je všude eliptická a přejde na kanonický tvar $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$ substitucí $\xi = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \eta = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.

19. Rovnice je parabolická a substitucí $\xi = y \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \eta = y$ se převádí na tvar $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$.

k.6.10

Označíme-li $t = |\nabla u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ a provedeme-li v rovnici naznačené derivování, přejde rovnice na tvar

$$\left[\frac{g'(t)}{t} u_x^2 + g(t) \right] u_{xx} + 2 \frac{g'(t)}{t} u_x u_y u_{xy} + \left[\frac{g'(t)}{t} u_y^2 + g(t) \right] u_{yy} = 0.$$

Linearizací koeficientů podle k.3 a užitím odstavce k.4

bod III dostaneme $B^2 - AC = -t^2 g(t) [g(t) + tg'(t)] = -th(t)h'(t)$, což je větší nebo menší než nula podle toho, zda funkce h je klesající nebo rostoucí.

h.2. UŽITÍ "OBECNÉHO" ŘEŠENÍ

Známe-li obecné řešení rovnice (2), tj. řešení, závisící na dvou libovolných funkcích, je možné pro tuto rovnici najít řešení různých úloh /uvedených v úvodu/, a to tak, že funkce, na kterých závisí obecné řešení, určíme tak, abychom splnili dodatečné /okrajové nebo počáteční/ podmínky. Po formálním nalezení "řešení" je opět třeba provést jeho analýzu.

Příklad. Najděte řešení Cauchyovy úlohy

- 1/ $u_{tt} - u_{xx} = 0$ pro $t > 0$, $x \in E_1$
- 2/ $u(x, 0) = \varphi_0(x)$, $u_t(x, 0) = \varphi_1(x)$, $x \in E_1$.

Podle úlohy /h.1.1/ má obecné řešení tvar

$$u(x, t) = f(x-t) + g(x+t).$$

První podmínka z (2) dává

$$\text{/i/} \quad \varphi_0(x) = f(x) + g(x), \quad x \in E_1$$

druhá

$$\text{/ii/} \quad \varphi_1(x) = -f'(x) + g'(x), \quad x \in E_1$$

Integrací /ii/ od 0 do x dostaneme

$$\text{/iii/} \quad \int_0^x \varphi_1(\xi) d\xi = -f(x) + f(0) + g(x) - g(0)$$

Protože funkce f a g jsou určeny s přesností na konstantu /viz úvod/, můžeme volit $f(0) = 0$. Pro g pak z /i/ dostaneme $g(0) = \varphi_0(0)$ a z /i/ a /iii/ dostáváme

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(\varphi_0(0) + \varphi_0(x) + \int_0^x \varphi_1(\xi) d\xi \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\varphi_0(x) - \varphi_0(0) - \int_0^x \varphi_1(\xi) d\xi \right)$$

což tedy dává funkci

$$\text{(+)} \quad u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\varphi_0(x+t) + \varphi_0(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(\xi) d\xi \right]$$

/tzn. D'Alembertův vzorec/.

Proveďme analýzu vzorce (+).

Zřejmě pro $\varphi_0 \in C^k(E_1)$, $\varphi_1 \in C^{k-1}(E_1)$, $k \geq 1$ je $u \in C^k(E_2)$, pro $\varphi_0 \in C(E_1)$, $\varphi_1 \in L_1, loc(E_1)$ je $u \in C(E_2)$. Pro $k \geq 2$ dává proto (+) klasické řešení rovnice, pro $k \geq 1$ jsou přirozeným způsobem splněny počáteční podmínky. Pro $k = 1$ je (+) řešením ve smyslu integrální identity

$$\int_{E_2} -u_t v_t + u_x v_x = 0 \quad \text{pro } \forall v \in C^1(E_2)$$

s kompaktním nosičem v E_2 ,

pro $k = 0$ je řešením ve smyslu distribucí

$$\int_{E_2} u (v_{tt} - v_{xx}) dx dt = 0 \quad \text{pro } \forall v \in \mathcal{D}(E_2)$$

/viz úloha h.1.3 /.

Nabývání počátečních podmínek pro $k = 0$: první podmínka je bez problémů, druhá se nabývá ve smyslu integrální identity

$$\int_{E_2 \cap \{t>0\}} u (v_{tt} - v_{xx}) dx dt - \int_{E_1} \varphi_1(x) v(x, 0) dx + \int_{E_1} \varphi_0(x) v_t(x, 0) dx = 0$$

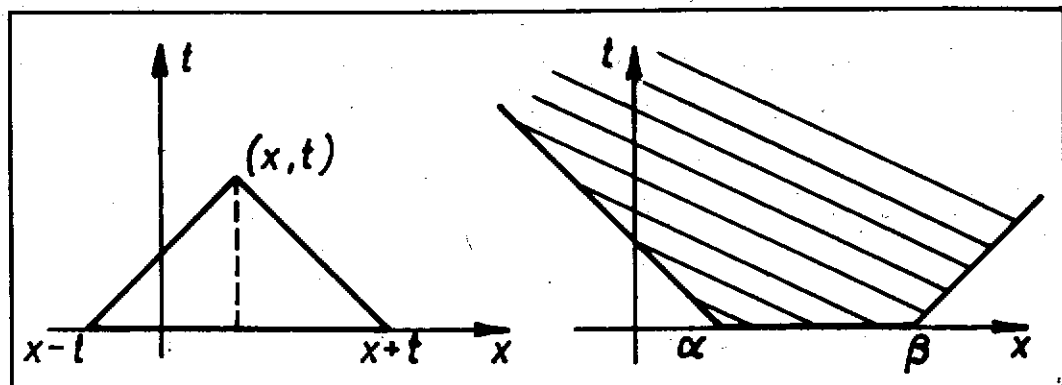
pro každé $v \in \mathcal{D}(E_2)$, vše se opět dokáže aproximací φ_0 a φ_1 hladkými funkcemi.

Podle úlohy h.1.3 je (+) řešením ve smyslu distribucí pro $\varphi_0, \varphi_1 \in L_{1,loc}(\mathbb{R})^{*/}$. Pro takové φ_1 je druhý člen v (+) dokonce spojitý a dá se očekávat, že řešení v distribucích dá (+) pro obecnější φ_1 /viz úloha h.2.1 dále/.

Ze vzorce (+) je také vidět oblast závislosti řešení Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici a oblast vlivu:

Oblast závislosti Z_{xt} řešení v bodě x, t je interval $(x-t, x+t)$ na ose $t = 0$.

Oblast vlivu intervalu (α, β) na ose $t = 0$ je množina omezená charakteristikami $\mathcal{L} = x+t, \beta = x-t$:



h.2.1 Necht $\varphi_{1n}(x) = \frac{2}{n}$ pro $|x| < 1/n$, a jinde 0, $n \in \mathbb{N}$.

Necht $u_n(x, t)$ jsou určeny vzorcem (+) s $\varphi_0 = 0, \varphi_1(x) = \varphi_{1n}(x)$.

Najděte limitu u posloupnosti u_n a ukažte, že je řešením vlnové rovnice ve smyslu distribucí.

h.2.2 Najděte řešení rovnice $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ splňující $u(x, 0) = \varphi_0(x), u_t(x, 0) = \varphi_1(x)$.

h.2.3 Najděte řešení rovnice $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$ splňující $u(x, 0) = 3x^2, u_y(x, 0) = 0$.

*/ $L_{1,loc}(\Omega)$ je množina funkcí, které jsou v $L_1(K)$ pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset \Omega$.

h.2.4 Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$4y^2 u_{yy} + 2(1-y^2) u_{xy} - u_{yy} - \frac{2}{1+y^2} (2u_x - u_y) = 0$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), u_y(x, 0) = \varphi_1(x), x \in \mathbb{R}_1.$$

h.2.5 Najděte řešení rovnice

$$u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0$$

splňující podmínky

$$u(x, \sin x) = \varphi_0(x), u_y(x, \sin x) = \varphi_1(x), x \in \mathbb{R}_1$$

h.2.6 Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$u_y(x, 0) = F(x).$$

h.2.7 Najděte řešení rovnice

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

splňující

$$u(0, x, y, z) = \varphi_0(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), u_t(0, x, y, z) = \varphi_1(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

kde $\varphi_0(r), \varphi_1(r)$ jsou zadané funkce pro $r \geq 0$. Ukažte, že k tomu, aby řešení bylo v $C^2(\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}^3)$, je nutné a stačí, aby $\varphi_0 \in C^2(< 0, +\infty)$, $\varphi_1 \in C^1(< 0, +\infty)$ a $\varphi_0'(0) = \varphi_1'(0) = 0$.

h.2.8 Najděte řešení rovnice

$$u_{xxxx} - 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$$

splňující

$$u(x, 0) = \tau(x), u_y(x, 0) = \gamma(x), u_{yy}(x, 0) = \gamma_1(x), u_{yyy}(x, 0) = \gamma_2(x), x \in \mathbb{R}_1.$$

h.2.9 Řešte Goursatovu úlohu pro rovnici

$$u_{tt} = u_{xx}$$

- a/ $u(t,t) = \varphi(t)$, $t \geq 0$, $u(t,-t) = \bar{\varphi}(t)$, $t \geq 0$
 b/ Uvažte případ, kdy hodnoty funkce jsou předepsány pouze na konečných úsečkách obou charakteristik (tj. pro $t \in \langle 0, T^+ \rangle$, resp. $t \in \langle 0, T^- \rangle$),
 c/ uvažte případ, kdy jsou zadány tyto podmínky na celých charakteristikách, procházejících počátkem.

Ve všech případech se předpokládá splnění podmínky souhlasu

$$\varphi^+(0) = \varphi^-(0)$$

Vyjasněte hladkost řešení v závislosti na hladkosti funkcí $\varphi^\pm$.

h.2.10 Najděte řešení rovnice

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0$$

nabývající předepsaných hodnot na charakteristikách této rovnice, procházejících počátkem.

h.2.11 Najděte řešení rovnice

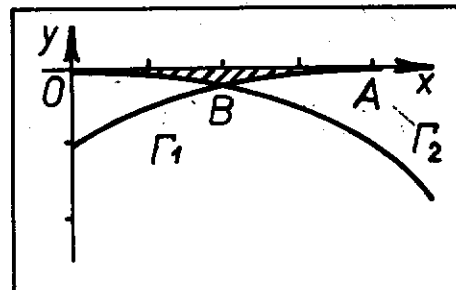
$$u_{xx} + y u_{yy} + \frac{1}{2} u_y = 0 \quad (y < 0)$$

nabývající zadaných hodnot na části OB charakteristiky

$\Gamma_1: x - 2\sqrt{-y} = 0$ a na části AB charakteristiky

$\Gamma_2: x + 2\sqrt{-y} = 1: u(x,y)|_{\Gamma_1} = \varphi_1(x)$, $x \in \langle 0, 1/2 \rangle$,

$u(x,y)|_{\Gamma_2} = \varphi_2(x)$, $x \in \langle 1/2, 1 \rangle$ /viz obr./. Předpokládá se $\varphi_1(1/2) = \varphi_2(1/2)$.



h.2.12 Najděte řešení rovnice

$$u_{\xi\eta} = 0 \quad \xi, \eta > 0$$

splňující

$$u(\xi, 0) = \varphi(\xi), \quad \xi \geq 0$$

$$(*) \quad u(X(\eta), \eta) = \psi(\eta), \quad \eta \geq 0,$$

kde X je nezáporná funkce na $\langle 0, +\infty \rangle$, $X(0) = 0$

$$\text{a} \quad \varphi(0) = \psi(0).$$

/Darbouxova úloha/.

Vyjasněte, kde bude jednoznačně určeno řešení, jsou-li podmínky (*) zadány pouze pro $\xi \in \langle 0, X \rangle$, $\eta \in \langle 0, Y \rangle$.

h.2.13 Najděte řešení Darbouxovy úlohy

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > |x|, \quad x \in E_1$$

$$u(t,t) = \varphi^+(t), \quad t \geq 0$$

$$u(\xi(t), t) = \varphi^-(t), \quad t \geq 0, \quad \varphi^+(0) = \varphi^-(0)$$

kde $\xi(t)$ je zadaná spojitá funkce pro $t \geq 0$, $-t \leq \xi(t) < t$ pro $t > 0$, $\xi(0) = 0$ a každá charakteristika $x - t = c = \text{const} < 0$ protíná křivku $x = \xi(t)$ právě v jednom bodě.

Zkoumejte hladkost řešení v závislosti na φ^+ , φ^- , ξ .

Speciálně vyjasněte případ $\xi(t) = k \cdot t$, $k \in \langle -1, 1 \rangle$.

h.2.14 Řešte úlohu, kterou dostaneme, když v úloze h.2.11 podmínku na Γ_2 nahradíme podmínkou $u(x,0) = \varphi_2(x)$, $1 \geq x \geq 0$, splňující podmínku souhlasu $\varphi_2(0) = \varphi_1(0)$. Kde bude řešení určeno jednoznačně?

h.2.15 Necht $\varphi_0, \varphi_1, \psi \in C^2(\langle 0, +\infty \rangle)$, $\varphi_0(0) = \psi_0(0)$, $k \in \langle -1, 1 \rangle$. Najděte funkci $u(x,t)$ spojitou na oblasti $t \geq 0$, $x \geq kt$, která

- 1/ je řešením ve smyslu distribucí na oblasti $t > 0, x > kt$
 2/ splňuje $u(x, 0) = \varphi_0(x), u_t(x, 0) = \varphi_1(x), x \geq 0$
 $u(kt, t) = \psi(t), t \geq 0.$

Najděte podmínky, na $\varphi_0, \varphi_1, \psi$, aby tato funkce byla $\in C^1$ na uvedené oblasti.

h.2.16 1. Ukažte, že řešení smíšené úlohy

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x, t > 0$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), u_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x \geq 0$$

$$u(0, t) = \psi(t), \quad t \geq 0$$

lze převést na řešení Cauchyovy a Darbouxovy úlohy.

2. Ukažte, že smíšenou úlohu

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in (0, l), t > 0$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), u_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x \in (0, l)$$

$$u(0, t) = \psi_0(t), u(l, t) = \psi_1(t)$$

lze převést na řešení Cauchyovy úlohy a posloupnosti Darbouxových a Goursatových úloh.

h.2.17 Ukažte, že řešení první úlohy /h.2.16/ s $\psi(t) \equiv 0$

lze dostat jako řešení Cauchyovy úlohy s počátečními podmínkami $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1$, kde $\tilde{\varphi}_1$ jsou lichá prodloužení φ_1 na celé E_1 .

Zkoumejte hladkost řešení v závislosti na hladkosti funkcí φ_1 a podmínkách souhlasu v bodě $(0, 0)$. Dokažte např., že pro to, aby řešení bylo v $C^2(t \geq 0, x \geq 0)$ je nutné a stačí, aby $\varphi_0 \in C^2(\langle 0, +\infty \rangle), \varphi_1 \in C^1(\langle 0, +\infty \rangle)$ a byly splněny podmínky souhlasu $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = \varphi_0'(0) = 0$. Nebudou-li podmínky souhlasu splněny, pak řešení bude z $C^2(E_2 \setminus \Omega)$, kde Ω je množina bodů, ležících na charakteristikách procházejících bodem $(0, 0)$.

h.2.18 Proveďte podobné úvahy pro smíšenou úlohu

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{na } (0, l) \times \langle 0, +\infty \rangle$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), u_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x \in (0, l)$$

a okrajové podmínky

$$a/ \quad u(0, t) = u(l, t) = 0$$

$$b/ \quad u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$$

$$c/ \quad u(0, t) = u_x(l, t) = 0$$

Počáteční podmínky prodlužte takto:

a/ liše na $(-l, 0)$ a $2l$ -periodicky na E_1

b/ sudě na $(-l, 0)$ a $2l$ -periodicky na E_1

c/ sudě na $(l, 2l)$, liše na $(-2l, 0)$ a $4l$ -periodicky na E_1 .

Aby řešení bylo z $C^2(\langle 0, l \rangle \times \langle 0, +\infty \rangle)$ je nutné a stačí, aby $\varphi_0 \in C^2(\langle 0, l \rangle), \varphi_1 \in C^1(\langle 0, l \rangle) +$ splnění jistých podmínek souhlasu v bodech $(0, 0)$ a $(l, 0)$, které dostaneme z požadavku, aby příslušná prodloužení byla $\in C^2$ resp. C^1 na E_1 .

Řešení Cauchyovy úlohy pro nehomogenní rovnice se dá převést na řešení dokonce speciálního případu Cauchyovy úlohy pro homogenní rovnici pomocí tzv. Duhamelova principu:

h.2.19 Nechť je dána rovnice

$$(1) \quad \frac{\partial^k u}{\partial t^k} - Lu = f(x, t)$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, L je lineární operátor stupně m tvaru

$$(*) \quad Lu = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha_0 \leq k-1}} a_\alpha(x, t) D^\alpha u$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{i=0}^n \alpha_i.$$

Nechť $U(x, t; \tau)$ je řešení rovnice

$$\frac{\partial^k U}{\partial t^k} - L U = 0 \quad \text{pro } \tau \leq t \leq T, \quad 0 \leq \tau \leq T,$$

splňující podmínky

$$\frac{\partial^j U}{\partial t^j}(x, \tau, \tau) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-2$$

$$\frac{\partial^{k-1} U}{\partial t^{k-1}}(x, \tau, \tau) = f(x, \tau).$$

Pak funkce

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t; \tau) d\tau$$

je pro $t \in (0, T)$ řešením rovnice (1) a splňuje počáteční podmínky

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x, 0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

h.2.20 Necht koeficienty operátoru L a pravá strana f v (1) v /h.2.19/ nezávisí na t . Pak je-li $u(x, t)$ řešení (1) na $E_n \times \langle 0, T \rangle$ pak pro každé $\tau \in E_1$ je funkce

$$v_\tau(x, t) = u(x, t - \tau)$$

řešením (1) na $\langle \tau, T + \tau \rangle$ a $\frac{\partial^j v}{\partial t^j}(x, \tau) = \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x, 0)$.

h.2.21 Najděte řešení rovnice

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t) \quad t > 0, x \in E_1$$

splňující

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0.$$

Ukažte dále, že toto řešení lze zapsat ve tvaru

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\tau d\xi$$

kde $G(x, t) = 1/2$ pro $|x| < t$ a 0 jinde.

Ukažte, že je-li f spojitá na $\{t \geq 0, x \in E_1\} = E_2^+$ a f_t nebo f_x spojitá E_2^+ , pak je $u \in C^2(E_2^+)$.

$$\text{h.2.22} \quad \text{Necht } Lu = \sum_{\substack{|k| \leq m \\ k_0 = 0}} a_k(x) D^k u.$$

Je-li u dostatečně hladké řešení rovnice

$$(1) \quad \frac{\partial^k u}{\partial t^k} - Lu = 0,$$

splňující

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x, 0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k-2$$

$$\frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x, 0) = \varphi(x),$$

pak

$$v_s = \frac{\partial^s u}{\partial t^s} \quad (s = 0, 1, \dots, k-1) \text{ je také řešením této}$$

rovnice, které splňuje počáteční podmínky

$$\frac{\partial^j v_s}{\partial t^j} = 0 \quad \text{pro } j \neq k-1-s$$

$$\frac{\partial^{k-1-s} v_s}{\partial t^{k-1-s}} = \varphi.$$

Označíme-li toto $\dot{u} = u_\varphi$, pak funkce $w = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{\partial^s}{\partial t^s} u_\varphi$

je řešením rovnice (1) a splňuje počáteční podmínky

$$\frac{\partial^j w}{\partial t^j}(x, 0) = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

K řešení nehomogenní lineární rovnice stačí najít jedno /jakékoli/ její řešení $\hat{u}$ a řešení u rovnice, splňující nějaké dodatečné podmínky, pak lze hledat ve tvaru $u = \hat{u} + v$, kde v splňuje již homogenní rovnici a nějaké pozměněné dodatečné podmínky. Čím více podmínek splníme při volbě řešení $\hat{u}$, tím jednodušší podmínky nám zbudou pro v .

Příklad. Máme-li např. najít řešení úlohy

$$1/ u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x) \quad /f \text{ nezávisí na } t/$$

$$2/ u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in \langle 0, l \rangle$$

$$3/ u(0,t) = u(l,t) = 0$$

pak můžeme najít $\hat{u}$ jako nezávislé na t řešení rovnice 1/ splňující 3/ - to vede na okrajovou úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici

$$a^2 \hat{u}'' = f, \quad \hat{u}(0) = \hat{u}(l) = 0;$$

pro v pak dostaneme homogenní rovnici

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0$$

homogenní okrajové podmínky

$$v(0,t) = v(l,t) = 0$$

a počáteční podmínky

$$\varphi_0(x) = u(x,0) = \hat{u}(x) + v(x,0), \quad \text{tj.}$$

$$v(x,0) = \varphi_0(x) - \hat{u}(x)$$

$$\varphi_1(x) = u_t(x,0) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(x) + v_t(x,0) = v_t(x,0), \quad \text{tj.}$$

$$v_t(x,0) = \varphi_1(x).$$

Užitečný je i následující fakt z obyčejných rovnic, který se dokáže přímým výpočtem:

h.2.22a Necht $\hat{y}(t)$ je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$L\hat{y}(t) = a_n \hat{y}^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \hat{y}^{(k)} = 0, \quad a_n \neq 0, \quad a_1 = \text{const},$$

splňující

$$\hat{y}^{(k)}(t_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-2,$$

$$\hat{y}^{(n-1)}(t_0) = \frac{1}{a_n}.$$

Pak funkce

$$\tilde{y}(t) = \int_{t_0}^t \hat{y}(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

je řešením rovnice $L\tilde{y} = f(t)$

a splňuje nulové počáteční podmínky v $t=t_0$.

Smíšenou úlohu pro nehomogenní rovnici s homogenními okrajovými podmínkami lze vhodným prodloužením pravé strany převést na Cauchyovu úlohu pro nehomogenní rovnici:

h.2.23 Najděte řešení úlohy

$$u_{tt} = u_{xx} + f(x,t) \quad \text{na } Q_T = \langle 0, l \rangle \times \langle 0, T \rangle$$

splňující nulové počáteční podmínky na $\langle 0, l \rangle$ a okrajové podmínky

$$a/ \quad u(0,t) = u(l,t) = 0$$

$$b/ \quad u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$$

$$c/ \quad u(0,t) = u_x(l,t) = 0$$

tak, že prodloužíte funkci f na $E_1 \times \langle 0, T \rangle$ takto:

a/ liše na $(-l, 0)$ a $2l$ periodicky (v x)

b/ sudě na $(-l, 0)$ a $2l$ periodicky (v x)

c/ sudě na $(l, 2l)$, liše na $(-2l, 0)$, a $4l$ periodicky.

Abychom dostali hladké řešení, musí f /kromě hladkosti/ splňovat nějaké podmínky pro $x = 0, l$, např. v případě

$$a/ \quad f(0,t) = f(l,t) = 0.$$

h.2.24 Řešte úlohu /h.2.23/ s

$$a/ \quad f = x \quad \text{na } Q_T$$

$$b/ \quad f = x \cdot t \quad \text{na } Q_T$$

$$c/ \quad f = \sinh x$$

$$d/ \quad f = x(x-l)$$

$$e/ \quad f = x(x-l) \cdot t^2$$

Všimněte si jak se nesplnění podmínek "souhlasu" v $x=0, l$ projeví na hladkosti řešení.

h.2.25 Určete kondensaci plynu /viz [T S]/ $s(x, y, z, t)$ pro $t > 0$, a $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > R$, jestliže v okamžiku $t=0$ byla rovná konstantě $S_0 > 0$ pro $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < R$ a rovná 0 jinde a počáteční rychlosti plynu byly rovné nule.

h.2.26 Polonekonečná struna $0 \leq x < +\infty$ s upevněným koncem $x=0$ má v okamžiku $t=0$ tvar

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq l \\ -\sin \frac{\pi x}{l} & l \leq x \leq 2l \\ 0 & 2l \leq x < +\infty \end{cases} = \varphi_0(x)$$

a nulové počáteční rychlosti. Nakreslete tvar struny v okamžicích

$$t = \frac{l}{4a}, \frac{l}{a}, \frac{5l}{4a}, \frac{3l}{2a}, \frac{7l}{4a}, \frac{9l}{4a}, \text{ kde } a = \sqrt{To/\rho}, \text{ To je napjato-}$$

tost struny a ρ lineární hustota.

h.2.27 Polonekonečná struna $0 \leq x < +\infty$ s upevněným koncem $x=0$ má v okamžiku $t=0$ tvar $u(x, 0) = 0$. V tomto okamžiku do ní v bodě $x = c > 0$ udeříme tak, že počáteční rychlosti bodů struny budou

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} v_0 \cos \frac{\pi}{a} (x-c) & \text{pro } (x-c) < h/2 \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases} = \varphi_1(x), x \geq 0$$

kde $h = \text{const} < 2c$

Určete tvar struny v čase $t > 0$.

h.2.28 Polonekonečná struna $0 \leq x < +\infty$ byla v okamžiku $t = 0$ v rovnovážné poloze. /tj. $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, x > 0$ /. Pro $t > 0$ její konec $x=0$ kmitá podle zákona

$$u(0, t) = A \sin \omega t$$

kde A, ω jsou konstanty. Najděte tvar struny pro $t > 0$.

h.2.29 Polonekonečná trubice $x > 0$ o průřezu S je naplněna plynem. Na konci $x=0$ je do ní vložen píst hmotnosti M , který nárazem v okamžiku $t=0$ dostane rychlost v_0 . Najděte posunutí $u(x, t) = U(x, t) - x$ pro $t > 0$, kde $U(x, t)$ je souřadnice v okamžiku t řezu, který v čase $t=0$ měl souřadnici x , za předpokladu, že počáteční posunutí i počáteční rychlosti jsou rovny 0.

h.2.30 Nekonečná struna má v bodě $x=0$ soustředěnu hmotu M a je v čase $t=0$ v rovnovážné poloze /tj. $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ /. V čase $t=0$ úderem do hmoty M ji udělíme rychlost v_0 . Najděte tvar struny pro $t > 0$.

h.2.31 Homogenní struna hustoty ρ_0 a napjatosti To a délky l je na obou koncích upevněna. V okamžiku $t = 0$ je v bodě $x = l/3$ vytažena na malou vzdálenost h od osy x a povolena bez přidání počáteční rychlosti. Najděte tvar struny pro $0 \leq t \leq l/3a$. ($a^2 = To/\rho_0$).

h.2.32 Odvoďte rovnici a okrajové podmínky pro podélné kmity tyče, je-li jeden konec upevněn a druhý volný. Najděte kmity takové tyče s obecnými počátečními podmínkami.

h.2.33 Je dána nekonečná tyč, vzniklá spojením v bodě $x=0$ dvou polonekonečných homogenních tyčí majících hustotu a Youngův modul rovné ρ_1, E_1 resp. ρ_2, E_2 . Nechť po tyči se v oblasti $x < 0$ šíří vlna $u_1(x, t) = f(t - \frac{x}{a_1})$, kde $f(x)$ je zadaná funkce na E_1 , rovná nule pro $x < 0$, tj. stav tyče pro $t \leq 0$ je popsán funkcí $u_1(x, t)$. Najděte kmity tyče pro $t > 0$ a $x > 0$ /"lomená" vlna/ a $x < 0$ /odražená vlna/.

h.2.34 Válec délky l z homogenního materiálu s hustotou ρ a Youngovým modulem E se pohybuje rovnoměrně a přímočaře rychlostí v_1 a v okamžiku $t=0$ dostihne stejný válec, který se pohybuje rovnoměrně a přímočaře rychlostí $v_2 < v_1$. Určete podélné kmity obou válců pro $0 < t < 2l/a$, $a^2 = E/\rho$. Ukažte, že v okamžiku $t=2l/a$ se válce od sebe oddělí.

h.2.35 Na volný konec ($x=l$) tyče délky l s průřezem S , hustotou ρ a Youngovým modulem E narazí těleso hmotnosti M rychlostí v ve směru podélné osy tyče. Najděte podélné kmity tyče v případě

a/ druhý konec ($x=0$) je upevněn

b/ druhý konec ($x=0$) je volný

pro $0 < t < t_0$, kde t_0 je okamžik, kdy se těleso od tyče oddělí. Určete t_0 .

h.2.36 Na dolní konec svisle upevněné /na horním konci/ tyče délky l , průřezu S , hustoty ρ a Youngovým modulem E pověsíme na okamžik těleso hmoty M . Najděte podélné kmity tyče.

V úvodu jsme ukázali, že je-li u řešením vlnové rovnice, pak jeho Riemannovy invarianty $r_1 = u_t - u_x$ a $r_2 = u_t + u_x$ jsou konstantní na charakteristikách $x-t = \text{const}$ resp. $x+t = \text{const}$. Užijme toho k řešení Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici:

Známe-li řešení u a jeho derivaci u_t na přímce $t=0$, pak v těchto bodech známe i jeho invarianty r_1 a r_2 . Protože ty jsou konstantní podle charakteristiky, určíme tyto invarianty v libovolném bodě $x^0, t^0, t^0 \neq 0$ tak, že tímto bodem provedeme charakteristiky až do jejich průsečíků A_1, A_2 s přímkou $t=0$. Pak je $r_1(x^0, t^0) = r_1(A_1)$, $i=1,2$, a tedy v bodě x^0, y^0 jsme určili i derivace u_t a u_x tohoto řešení. Nakonec pomocí hodnoty řešení v jednom bodě osy $t=0$ určíme jednoznačně řešení všude jako potenciál v poli u_t, u_x . Matematik by se jistě obával, proč takto získané pole opravdu potenciál má a proč tento potenciál je řešením vlnové rovnice. Snadno by si ale zformuloval následující úlohu /a vyřešil ji/, čímž by si tento problém odstranil:

h.2.37 Nechtě funkce $r_1, r_2 \in C^1(E_2)$ jsou konstantní na přímkách $x-t = \text{const}$ resp. $x+t = \text{const}$. Potom vekt. pole $T_1 = r_1 + r_2$, $T_2 = r_2 - r_1$ má potenciál, který řeší vlnovou rovnici.

h.2.38 Proveďte podobný rozbor, jaký jsme udělali pro Cauchyovu úlohu pro Goursatovu, Darbouxovu a smíšené úlohy pro vlnovou rovnici.

ŘEŠENÍ A NÁVODY

h.2.1

$$u(x,t) = \begin{cases} 1/2 & \text{pro } t > |x| \\ -1/2 & \text{pro } -t > |x| \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

u_n jsou řešení ve smyslu distribucí, a protože jsou omezené a konvergují k u skoro všude, můžeme v integrální identitě pro u_n přejít při pevném v k limitě pro $n \rightarrow \infty$. Protože $\varphi_{1,n}$ je tzv. δ^- posloupnost, tj. posloupnost konvergující k δ^- funkci, pak na získané řešení se můžeme dívat jako na řešení Cauchyovy úlohy s počátečními podmínkami $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \delta^-$.

h.2.2

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\xi) d\xi$$

h.2.3

$$u(x,y) = 3x^2 + y^2$$

h.2.4

$$u(x,y) = \varphi_0(x - \frac{2}{3}y^3) + \frac{1}{2} \int_{x-2/3 y^3}^{x+2y} \varphi_1(\xi) d\xi$$

h.2.5

$$u(x,y) = \frac{1}{2} [\varphi_0(x - \sin x + y) + \varphi_0(x + \sin x - y)] + \frac{1}{2} \int_{x+\sin x-y}^{x-\sin x+y} \varphi_1(\xi) d\xi$$

h.2.6

$$u(x,y) = f(x+y) + \frac{5}{6} e^{-\frac{x-y}{6}} \left[\int_{x+y}^{x-\frac{y}{5}} e^{z/6} f'(z) dz - \int_{x+y}^{x-y/5} e^{z/6} F(z) dz \right]$$

h.2.7

$$u(x,y,z,t) = \left[(r-at) \tilde{\varphi}_0(r-at) + (r+at) \tilde{\varphi}_0(r+at) \right] / 2r + \frac{1}{2ar} \int_{r-at}^{r+at} \varphi \tilde{\varphi}_1(\varrho) d\varrho, \text{ kde } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$\tilde{\varphi}_1$ jsou sudá prodloužení φ_1 , na celé E_1 .

Návod. Řešení bude záviset pouze na r . Přejděte ke sférickým souřadnicím, nové neznámé funkci $v = r u$. Pro $v = v(r,t)$ dostaneme rovnici $v_{tt} = a^2 v_{rr}$ a počáteční podmínky pro $r > 0$. Musíme proto uvážit, že z $v = r \cdot u$ pro $r > 0$, u omezené v nule plyne $v(0,t) = 0$. Pro v tedy máme smíšenou úlohu. Tu převedeme na počáteční lichým prodloužením počátečních podmínek /viz úloha h.2.17/.

h.2.8

$$8u(x,y) = 4 [\tau(x+y) + \tau(x-y)] - 2y [\tau'(x+y) - \tau'(x-y)] - 2y [\nu(x+y) + \nu(x-y)] + 6 \int_{x-y}^{x+y} \nu(\varrho) d\varrho + 2y \int_{x-y}^{x+y} \nu_1(\varrho) d\varrho - \int_{x-y}^{x+y} [(x-\varrho)^2 - y^2] \nu_2(\varrho) d\varrho.$$

Viz úlohu h.1.11.

h.2.9

$$u(x,t) = \varphi^+\left(\frac{x+t}{2}\right) + \varphi^-\left(\frac{x-t}{2}\right) - \varphi^+(0).$$

Jsou-li $\varphi^\pm \in C^k$ na uvedených intervalech, pak $u(x,t) \in C^k$ na množinách a/ $t \geq |x|$, b/ na obdélníku, jehož dvě strany tvoří příslušné úsečky charakteristik, c/ na E_2 .

h.2.10

$u(x,t) = \varphi\left(\frac{5x-y}{4}\right) + \psi\left(\frac{y-x}{4}\right) - \varphi(0)$ kde funkce φ a ψ zadávají řešení na charakteristikách.

h.2.11

$$u(x,y) = \varphi_1\left(\frac{x+2\sqrt{-y}}{2}\right) + \varphi_2\left(\frac{x-2\sqrt{-y}+1}{2}\right) - \varphi_1(1/2).$$

h.2.12

$$u(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta) - \varphi(\chi(\eta)).$$

h.2.13

$$u(x,t) = \varphi^-\left(\chi^{-1}(x-t)\right) - \varphi^+\left(\frac{\chi^{-1}(x-t)}{2}\right) + \varphi^+\left(\frac{x+t}{2}\right), \chi(t) = \xi(t) - t$$

Pro $\xi(t) = kt, k \in \langle -1, 1 \rangle$

$$u(x,t) = \varphi\left(\frac{t-x}{1-k}\right) - \varphi^+\left(\frac{t-x}{2(1-k)}\right) + \varphi^+\left(\frac{x+t}{2}\right).$$

h.2.14

$$u(x,y) = \varphi_1(x-2\sqrt{-y}) - \varphi_2\left(\frac{x}{2} - \sqrt{-y}\right) + \varphi_2\left(\frac{x}{2} + \sqrt{-y}\right)$$

Řešení bude určeno ve stejné oblasti jako u úlohy h.2.11.

h.2.15

Návod. Na množině $t \geq 0, x \geq t$ najděte u jako řešení Cauchyovy úlohy. Se získanou hodnotou na přímce $x=t$ a hodnotou na přímce $x=kt$ řešte Darbouxovu resp. Goursatovu úlohu. Dostaneme spojitou funkci na $t > 0, x > 0$ která zřejmě nabývá požadovaných hodnot a je řešením v distribucích. Aby byla spojitě derivovatelná na této oblasti, je nutné a stačí, aby

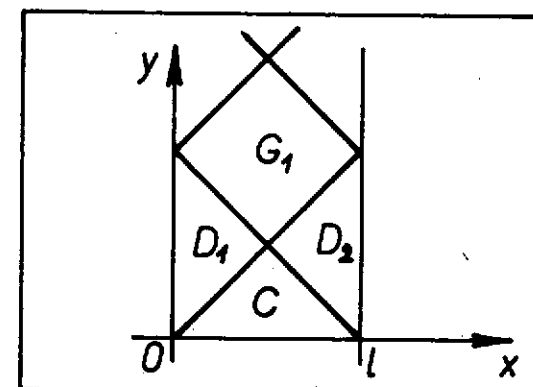
$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ t \rightarrow x_0^+}} \frac{\partial u}{\partial n} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ t \rightarrow x_0^-}} \frac{\partial u}{\partial n}, \quad x_0 > 0,$$

$$\begin{matrix} x \rightarrow x_0^- & x \rightarrow x_0^+ \\ t \rightarrow x_0^+ & t \rightarrow x_0^- \end{matrix}$$

kde n je jednotkový normálový vektor k přímce $x=t$. To bude v případě, že $\psi'(0) = k\varphi_1(0) + \varphi'(0)$.

h.2.16

Na oblasti C řešíme Cauchyovu úlohu, na $G_1, G_2, \dots, D_1, D_2, \dots$ Goursatovy resp. Darbouxovy úlohy; viz obrázek:



h.2.17

Aby řešení Cauchyovy úlohy s podmínkami φ_0, φ_1 bylo rovné 0 pro $x=0$ a $t \in E_1$ je nutné a stačí aby φ_0, φ_1 byly liché. V případě, že jedna z funkcí φ_0, φ_1 je identicky nulová, pak k tomu, aby řešení Cauchyovy úlohy bylo rovné nule pro $x=0$ a $t \geq 0$, je nutné a stačí, aby druhá funkce byla lichá. Obecně k tomu aby pro $\varphi_0(x) = \varphi_1(x) = 0$ pro $x \geq 0$ bylo příslušné řešení Cauchyovy úlohy rovné 0 pro $x=0$ a $t \geq 0$ je nutné a stačí aby $\varphi_0'(x) = \varphi_1(x)$ pro $x \leq 0$.

h.2.18

$\varphi_0 = \varphi_0'' = \varphi_1 = 0$ na kraji, kde je podmínka $u = 0, \varphi_0' = \varphi_1' = 0$ na kraji, kde je podmínka $u_x = 0$.

h.2.19

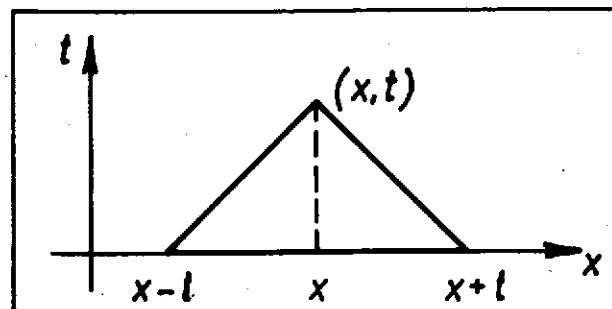
Návod: Užijte větu o derivování integrálu s proměnnou horní mezí funkce závisující na parametru:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^t f(t, \tau) d\tau \right) = f(t, t) + \int_0^t f_t(t, \tau) d\tau.$$

h.2.21

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\tau d\xi = \int_{\Delta_{x,t}} f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

kde $\Delta_{x,t}$ je charakteristický trojúhelník s vrcholem v bodě (x,t) :



Návod. Užijte úloh h.2.19, h.2.20 a D'Allembertova vzorce.

h.h.23 Návod. Užijte výsledku úlohy h.2.21.

h.2.25

pro $t \in (0, \frac{r-R}{a}) \cup (\frac{r+R}{a}, +\infty)$ je kondenzace rovná nule, pro $t \in (\frac{r-R}{a}, \frac{r+R}{a})$, je rovná $s(r,t) = \frac{S_0(r-at)}{2r}$.

Návod. Úloha vede na řešení rovnice

$$s_{tt} = a^2 \Delta s$$

s počátečními podmínkami

$$s(r,0) = \begin{cases} S_0 & \text{pro } r < R \\ 0 & \text{pro } r > R \end{cases}$$

$$s_t(r,0) = 0.$$

Užijte úlohy h.2.7.

h.2.26

Tvar struny je dán funkcí

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}_0(x-at) + \tilde{\varphi}_0(x+at)],$$

kde $\tilde{\varphi}$ je liché prodloužení funkce φ_0 na E_1 .

Návod. Úloha vede na řešení rovnice

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

s podmínkami

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \geq 0$$

$$u(0,t) = 0.$$

Převeďte se na Cauchyovu úlohu s $\tilde{\varphi}_0$ a řeší D'Allembertovým vzorcem.

$$\text{h.2.27} \quad u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\varphi}_1(\xi) d\xi,$$

kde $\tilde{\varphi}_1$ je liché prodloužení φ_1 na E_1 .

h.2.28

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x - at > 0 \\ A \sin \omega(t - \frac{x}{a}) & \text{pro } x - at < 0 \end{cases}$$

Návod. K určení řešení rovnice

$$(1) \quad u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

s podmínkami $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = A \sin \omega t$ užijte obecný tvar řešení (1) $f(x-at) + g(x+at)$.

h.2.29

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{v_0 Ma}{S \gamma p_0} (1 - \frac{S \gamma p_0}{Ma^2} (x-at)) & x-at < 0 \\ 0 & x-at \geq 0 \end{cases}$$

kde $a^2 = \gamma p_0 / \rho_0$, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ je Poissonova konstanta,

$a^2 = \gamma p_0 / \rho_0$, p_0, ρ_0 je počáteční tlak a počáteční hustota plynu /konstanty/.

Návod. Užitím obecného tvaru řešení rovnice $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ najděte její řešení, splňující

$$M u_{tt}(0,t) = S \gamma p_0 u_x(0,t), \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \geq 0$$

$$u_t(x,0) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ v_0 & x = 0 \end{cases}$$

h.2.30

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{kde}$$

$$u_1 = \begin{cases} \frac{v_0 Ma}{2 To} (1 - e^{-\frac{2 To}{Ma^2} (x-at)}) & x-at > 0 \\ 0 & x-at < 0 \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} \frac{v_0 Ma}{2 To} (1 - e^{-\frac{2 To}{Ma^2} (x+at)}) & x+at > 0 \\ 0 & x+at < 0 \end{cases}$$

Užitím obecného řešení rovnice $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $a^2 = \frac{To}{\rho_0}$

najděte její řešení, splňující podmínky

$$u(x,0) = 0, \quad x \in E_1$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad x \neq 0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} u(x,t) &= \lim_{x \rightarrow 0-} u(x,t) \\ \lim_{x \rightarrow 0+} u_x(x,t) &= \lim_{x \rightarrow 0-} u_x(x,t) \end{aligned} \right\} \quad t > 0$$

$$M u_{tt}(0,t) = 2 To u_x(0,t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u_t(0,t) = v_0$$

h.2.31

$$u(x,t) = \begin{cases} 3h x/l & \text{pro } 0 < x < l/3 - at \\ 3h/4l + 9h(l/3 - at)/4l & \text{pro } l/3 - at < x < l/3 + at \\ 3h(l-x)/2l & \text{pro } l/3 + at < x < l \end{cases}$$

Je to řešení rovnice

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

splňující podmínky $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = 0$, $x \in (0,l)$,
 $u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad t \geq 0$

$$\text{kde } \varphi = \begin{cases} 3h x/l & 0 \leq x \leq l/3 \\ 3(l-x)h/2l & l/3 \leq x \leq l \end{cases}$$

Řešte převedením na Cauchyovu úlohu prodloužením počátečních podmínek.

h.2.32

Úloha vede na rovnici $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $a^2 = E/\rho$ / E - Youngův modul, ρ hustota / a okrajové podmínky $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$. Řešení viz úlohu h.2.18 c.

h.2.33

$$u(x,t) = \begin{cases} f(t - x/a_1) + \frac{\sqrt{E_1 \rho_1} - \sqrt{E_2 \rho_2}}{\sqrt{E_1 \rho_1} + \sqrt{E_2 \rho_2}} f(t + \frac{x}{a_1}) & x < 0 \\ \frac{2 \sqrt{E_1 \rho_1}}{\sqrt{E_1 \rho_1} + \sqrt{E_2 \rho_2}} f(t - x/a_2) & x > 0 \end{cases}$$

Návod. Úloha vede na nalezení funkce $u(x,t)$ splňující

$$u_{tt} - a_1^2 u_{xx} = 0, \quad x < 0$$

$$u_{tt} - a_2^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0$$

$$u(x,0) = f(-x/a_1)$$

$$u_t(x,0) = f'(-\frac{x}{a_1})$$

a podmínky přechodu

$$u(0+,t) = u(0-,t)$$

$$E_1 u_x(0-,t) = E_2 u_x(0+,t)$$

h.2.34

Rychlosti $v(x,t)$ v okamžiku t řezů válců, které měly v čase $t = 0$ souřadnice x ($x \in (0,l)$ pro první válec, $x \in (l,2l)$ pro druhý válec) jsou rovny

$$v(x,t) = \begin{cases} v_1 & 0 < t < \frac{l-x}{a} \\ 1/2(v_1+v_2) & \frac{l-x}{a} < t < \frac{l+x}{a} \\ v_2 & \frac{l+x}{a} < t < \frac{3l-x}{a} \end{cases} \quad x \in \langle 0, l \rangle$$

$$v(x,t) = \begin{cases} v_2 & 0 < t < \frac{l+x}{a} \\ 1/2(v_1+v_2) & \frac{l+x}{a} < t < \frac{3l-x}{a} \\ v_1 & \frac{3l-x}{a} < t < \frac{l+x}{a} \end{cases}, \quad x \in \langle l, 2l \rangle$$

Odtud je vidět, že v okamžiku $t = \frac{2l}{a}$ si válce vyměnily rychlosti a oddělí se od sebe.

Návod! Úloha vede na určení funkce $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ pro $t > 0$, $x \in \langle 0, l \rangle$ resp. $\langle l, 2l \rangle$, splňující na příslušných množinách rovnice

$$u_{1tt} = a^2 u_{1xx},$$

okrajové podmínky

$$u_{1x}(0,t) = 0, \quad u_{2x}(2l,t) = 0$$

podmínky přechodu

$$u_1(l,t) = u_2(l,t), \quad u_{1x}(l,t) = u_{2x}(l,t)$$

a počáteční podmínky

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = 0$$

$$u_{1t}(x,0) = v_i, \quad i = 1, 2 \quad \text{na } \langle 0, l \rangle \text{ resp. na } \langle l, 2l \rangle.$$

Řešení této úlohy přestává popisovat uvedený jev pro $t \geq 2l/a$, neboť pro tato t nebudou platit podmínky přechodu, ale podmínky volných konců.

h.2.35

Je třeba řešit rovnici $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

s podmínkami

$$m l u_{tt}|_{x=l} = -a^2 u_{x}|_{x=l}$$

$$u(x,0) = 0,$$

$$u_t(x,0) = 0 \text{ pro } x \in \langle 0, l \rangle \text{ a } -v \text{ pro } x = l.$$

$$u(0,t) = 0 \text{ resp. } u_x(0,t) = 0, \quad t > 0.$$

$$m = M/S \text{ l g.}$$

Řešíme užitím obecného řešení. Dostaneme v prvním případě

$$u(x,t) = \varphi(at - x) - \varphi(at + x),$$

kde $\varphi(z) = 0$ na $(-l, l)$

$$\varphi(z) = \frac{m l v}{a} \left(1 - l^{-\frac{z-l}{m l}} \right) \quad z \in (l, 3l), \text{ atd.}$$

Rovnice pro prodloužení funkce φ z intervalu $(-l, l)$ má tvar

$$\varphi''(z) + \frac{1}{m l} \varphi'(z) = \varphi''(z-2l) - \frac{1}{m l} \varphi'(z-2l)$$

pro $l < z < +\infty$.

Ve druhém případě je

$$u(x,t) = \varphi(at - x) = \varphi(at + x),$$

kde $\varphi(z) = 0$ na $(-l, l)$

$$\varphi(z) = \frac{m l v}{a} \left(1 - l^{-\frac{z-l}{m l}} \right), \quad l < z < 3l, \text{ atd.}$$

Rovnice pro prodloužení φ vně intervalu $(-l, l)$ má tvar

$$\varphi''(z) + \frac{1}{m l} \varphi'(z) = -\varphi''(z-2l) + \frac{1}{m l} \varphi'(z-2l), \quad l < z < +\infty.$$

Řešení se hodí do té doby, dokud $u_x(l,t) < 0$.

h.2.36

Úloha vede na určení řešení rovnice

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g$$

splňujícího podmínky

$$u(0,t) = 0, \quad u_{tt}(l,t) = g - \frac{a^2}{m l} u_x(l,t), \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \frac{g x (2l-x)}{2 a^2}, \quad u_t(x,0) = 0,$$

$$\text{kde } m = M/g \text{ S l.}$$

Poznamenejme, že počáteční hodnoty posunutí $u(x,0)$ nejsou nulové, neboť tyč je v okamžiku $t = 0$ v napjatém stavu pod vlivem síly gravitace. K určení počátečních podmínek je třeba určit funkci $\hat{u}(x)$ jako řešení $a^2 \hat{u}(x) = g$ splňující podmínky $u(0) = 0$, $u_x(l) = 0$. Funkce $\hat{u}$ pak splňuje požadovanou rovnici, obě počáteční podmínky a první okrajovou, proto hledáme-li u ve tvaru $u = \hat{u}_0 + w$, dostaneme pro w rovnici

$$w_{tt} = a^2 w_{xx}$$

$$w(0,t) = w(x,0) = w_t(x,0) = 0,$$

$$w_{tt}(l,t) = g - \frac{a^2}{m l} w_x(l,t),$$

které hledáme ve tvaru $f(x-at) + g(x+at)$

Výsledek: $u(x,t) = \frac{g x (2l-x)}{2 a^2} + \varphi(at-x) - \varphi(at+x)$

$$\varphi(z) = 0, \quad -l < z < l,$$

$$\varphi(z) = -\frac{g m l^2}{a^2} \left(\frac{z-l}{m l} - 1 + l^{-\frac{z-l}{m l}} \right), \quad l < z < 3l, \text{ atd.}$$

Rovnice pro prodloužení φ vně intervalu $(-l, l)$ má tvar

$$\varphi''(z) + \frac{1}{m l} \varphi'(z) = \varphi''(z-2l) - \frac{1}{m l} \varphi'(z-2l) - g/a^2$$

h.2.37

Užijte toho, že $r_1 = f(x-t)$, $r_2 = g(x+t)$, kde $f, g \in C^1$ a nutné a postačující podmínky potenciálnosti

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{\partial T_2}{\partial t},$$

jejíž splnění je ekvivalentní tomu, že příslušný potenciál pak splňuje vlnovou rovnici.

3. METODA FOURIEROVA /ROZDĚLENÍ PROMĚNNÝCH/

Tato metoda se hodí na řešení smíšených úloh s homogenními okrajovými podmínkami, přičemž sama rovnice může být homogenní i nehomogenní, ale v tzv. samoadjugovaném tvaru viz dále/.

Ukažme si nejdříve, jak úlohu s nehomogenními okrajovými podmínkami převedeme na úlohu s homogenními okrajovými podmínkami:

Uvažme např. úlohu

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \text{ na } Q_T = (0,l) \times (0,T)$$

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in (0,l)$$

$$u(0,t) = \psi_1(t), \quad u(l,t) = \psi_2(t), \quad t \geq 0.$$

kde $f, \varphi_0, \varphi_1, \psi_1, \psi_2$ jsou zadané funkce.

Nejjednodušší způsob: Najdeme jakoukoli /dostatečně hladkou/ funkci $v(x,t)$, která splňuje okrajové podmínky. Např. je možné volit

$$(*) \quad v(x,t) = \psi_0(t) + x \cdot [\psi_2(t) - \psi_1(t)]/l.$$

Jsou-li ψ_1 hladké, je taková i v .

Hledáme-li pak řešení úlohy ve tvaru

$$u = v + w,$$

dostaneme pro w úlohu

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = u_{tt} - a^2 u_{xx} - (v_{tt} - a^2 v_{xx}) = f - (v_{tt} - a^2 v_{xx}) = \tilde{f}(x,t)$$

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = \varphi_0 - v(x,0) = \tilde{\varphi}_0(x)$$

$$w_t(x,0) = u_t(x,0) - v_t(x,0) = \varphi_1 - v_t(x,0) = \tilde{\varphi}_1(x)$$

a homogenní okrajové podmínky

$$w(0,t) = u(0,t) - v(0,t) = \psi_1(t) - \psi_1(t) = 0$$

$$w(l,t) = u(l,t) - v(l,t) = \psi_2(t) - \psi_2(t) = 0.$$

Nejjednodušší je

Věta 1 Necht f je $2l$ periodická funkce na E_1 , $f \in C^s(E_1)$ pro nějaké $s \geq 0$ a má zobecněnou derivaci $f^{(s+1)} \in L_2(-l, l)$. Necht a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty této funkce podle systému

$$1, \cos \frac{k\pi}{l} x, \sin \frac{k\pi}{l} x, k \in \mathbb{N}. \text{ Potom řady}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) k^j \quad \text{pro } j = 0, 1, \dots, s$$

konvergují a Fourierova řada funkce f a řady z derivací řádu $\leq s$ konvergují stejnoměrně na E_1 .

/Ověřte, že funkce $\sin \frac{k\pi}{l} x$, $k \in \mathbb{N}$ jsou příslušné vlastní funkce úlohy $-u'' = \lambda u$, $u(0) = u(l) = 0$; analogicky $1, \cos \frac{k\pi}{l} x$, $k \in \mathbb{N}$ úlohy pro tutéž rovnici s podmínkami $u_x(0) = u_x(l) = 0$.

Věta 2 Necht p, p', q, q' jsou spojité na $\langle 0, l \rangle$, $p, q > 0$. Potom

1. Množina těch $\lambda \in E_1$ pro něž úloha (4), (2') má netriviální řešení je spočetná a má jediný hromadný bod $+\infty$. Lze ji tedy uspořádat do posloupnosti $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \lambda_n \rightarrow +\infty$.

2. Ke každému takovému λ_k existuje s přesností na multiplikativní konstantu právě jedno netriviální řešení $X_k(x) \in C^2(\langle 0, l \rangle)$ úlohy (4'), (2').

3. Řešení X_n , $n \in \mathbb{N}$ tvoří úplný ortogonální systém v $L_2(\langle 0, l \rangle)$ se skalárním součinem

$$(u, v) = \int_0^l q(x) u(x) v(x) dx$$

a také v prostoru $V = \{f, f \in W_2^1(0, l), f \text{ splňuje ty okrajové podmínky z (2'), neobsahující 1. derivace}\}$ s jistým skalárním součinem $((u, v))$, který na V generuje normu ekvivalentní s obvyklou normou ve W_2^1 .

4. Pro každou funkci $f \in V$ Fourierova řada podle systému X_n , $n \in \mathbb{N}$ konverguje ve $W_2^1(0, l)$ a tedy stejnoměrně na $\langle 0, l \rangle$. Pro $f \in W_2^2(0, l)$, splňující (2') tato řada konverguje dokonce ve W_2^2 a tedy v $C^1(\langle 0, l \rangle)$, přičemž v $C(\langle 0, l \rangle)$ konverguje i řada z absolutních hodnot členů této řady.

Tato věta se dá zobecnit /viz např. [T, S], [JN] / na případ, kdy p je pouze omezené a měřitelné, nebo kdy p se může anulovat v některém krajním bodě. V posledním případě se v příslušném krajním bodě místo podmínky (2') bere podmínka omezenosti.

Dají se také dokázat věty /viz např. [JN] nebo [La] / o konvergenci formálních řešení z odstavců A, B, např. pro $f = 0$, a podmínky Dirichletova typu:

$\varphi_0 \in \dot{W}_2^1(0, l)$, $\varphi_1 \in L_2 \Rightarrow$ řada (++) z odstavce A konverguje v prostoru $C(\langle 0, T \rangle, \dot{W}_2^1) \cap C_1(\langle 0, T \rangle, L_2)$;

$\varphi_0 \in W_2^2 \cap \dot{W}_2^1$, $\varphi_1 \in \dot{W}_2^1 \Rightarrow$ řada (++) konverguje v prostoru $C(\langle 0, T \rangle, W_2^2(0, l) \cap C^1(\langle 0, T \rangle, \dot{W}_2^1(0, l)) \cap C^2(\langle 0, T \rangle, L_2(0, l)))$.

Poznámka

V případě rovnice s více než dvěma nezávislými proměnnými, je možné nejdříve separovat jednu proměnnou, ve vzniklé úloze další atd. Místo úlohy na vlastní čísla a vlastní funkce obyčejné diferenciální rovnice se budou hledat vlastní čísla a vlastní funkce eliptického operátoru s nějakými okrajovými podmínkami.

h.3.1 Homogenní struna je upevněna na koncích $x = 0, l$. V okamžiku $t=0$ měla tvar

$$\varphi_0 = \frac{16}{5} h \left[\left(\frac{x}{l} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right) \right],$$

kde $h > 0$ je dost malé a začala kmitat bez počáteční rychlosti. Najděte kmity struny pro $t > 0$. Vyjasněte hladkost formálního řešení.

h.3.2 Řešte úlohu h.3.1 v případě, že v okamžiku $t = 0$ má struna tvar paraboly symetrické vzhledem k přímce $x = l/2$ a procházející body $(0,0)$, $(l/2, h)$, $(l, 0)$.

h.3.3 Řešte úlohu h.3.1 s počáteční podmínkou

$$u(x, 0) = \begin{cases} hx/c & \text{pro } 0 \leq x \leq c \\ h(x-l)/(c-l) & c \leq x \leq l, \end{cases}$$

kde $c \in (0, l)$, $h > 0$ /struna byla v okamžiku $t = 0$ vytažena v bodě c na vzdálenost h od rovnovážné polohy a puštěna bez počáteční rychlosti/.

h.3.4

Homogenní struna délky l je na koncích upevněná a v okamžiku $t=0$ je v rovnovážné poloze. V tomto okamžiku úderem kladívka udělíme tomuto bodu rychlost v_0 . Najděte kmity struny pro $t > 0$. Uvažte dva případy:

a/ počáteční rychlost struny je

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} v_0 & \text{pro } |x-c| < \pi/2h \\ 0 & \text{pro } |x-c| > \pi/2h, \end{cases}$$

což odpovídá plochému kladívku šířky π/h .

b/ počáteční rychlost struny je

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} v_0 \cos h(x-c) & \text{pro } |x-c| < \pi/2h \\ 0 & \text{pro } |x-c| > \pi/2h \end{cases}$$

což odpovídá oblému kladívku šířky π/h .

h.3.5

Homogenní struna je na konci $x=0$ upevněna a druhý konec je připevněn k nehmotnému kroužku, navlečenému na hladkou tyč. V okamžiku $t=0$ tento konec vychýlíme o malou vzdálenost $h > 0$ /ve směru tyče/. Najděte tvar struny pro $t > 0$ /vliv zemské tíže zanedbáváme/.

Užijte jednak Fourierovu metodu, jednak metodu převedení na Cauchyovu úlohu /viz odstavec h.2/ a porovnejte výsledky.

h.3.6

Najděte kmity homogenní struny $0 \leq x \leq l$ s upevněnými konci, která má v bodě $c \in (0, l)$ soustředěnu hmotu M a kmity jsou vyvolány počáteční výchylkou struny

$$u(x, 0) = \varphi_0(x) = \begin{cases} hx/c & 0 \leq x \leq c \\ h(l-x)/(l-c) & c \leq x \leq l \end{cases}$$

/počáteční rychlost nulová/.

h.3.7

Trubice délky l je na pravém konci ($x=l$) otevřená a na levém ($x=0$) uzavřená. Pohybuje se ve vzduchu rovnoměrně a přímočaře rychlostí $v > 0$ ve směru své podélné osy. V okamžiku $t=0$ se zastaví. Určete kmity vzduchového sloupce uvnitř trubice pro $t > 0$, tj. funkci $u(x, t)$ takovou, že $x + u(x, t)$ je vzdálenost od uzavřeného konce trubice v čase t řezu vzduchového sloupce, který v okamžiku $t=0$ měl od něj vzdálenost x .

h.3.8

Najděte malé podélné kmity tyče délky l , je-li jeden konec upevněný a druhý volný s obecnými počátečními podmínkami.

h.3.9

Najděte malé podélné kmity tyče, je-li jeden konec volný a druhý pružně upevněn. Počáteční podmínky obecné.

h.3.10

Jeden konec tyče je upevněn a na druhý působí síla Q . Najděte podélné kmity tyče pro $t > 0$, jestliže v okamžiku $t=0$ síla přestala působit.

h.3.11

Najděte podélné kmity tyče délky l s oběma konci volnými /při obecných počátečních podmínkách/.

h.3.12

Homogenní tyč délky $2l$ byla stlačena silami působícími na její konce tak, že její délka se zmenšila na $2l(1-\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,1)$. V okamžiku $t=0$ síly přestaly působit. Ukažte, že posunutí $u(x,t)$ řezu, který měl v nezatíženém stavu souřadnici x , je pro $t > 0$ dáno vzorcem

$$u(x,t) = \frac{8\varepsilon l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

h.3.13

Homogenní tyč délky l a průřezu σ má jeden konec ($x=0$) upevněný a na druhém konci soustředěnou hmotu m . Tyč byla natažena silou Q , která v okamžiku $t=0$ přestala působit. Najděte podélné kmity tyče.

h.3.14

Konce homogenní struny délky l se pomocí pružných sil udržují na přímkách $x=0, x=l$. Najděte kmity struny při obecných počátečních podmínkách.

h.3.15

Najděte kmity struny délky l s upevněnými konci v prostředí, které jejímu pohybu klade odpor úměrný 1. mocnině rychlosti.

h.3.16

Určete struny délky l , upevněné na konci $x=0$ a jejíž konec $x=l$ kmitá podle zákona $u(l,t) = A \sin \omega t$.

h.3.17

Tyč délky l s upevněným koncem $x=0$ je v klidu. Od okamžiku $t=0$ na jeho konec $x=l$ působí síla Q /na jednotku plochy průřezu/ ve směru podélné osy tyče. Najděte podélné kmity tyče

pro $t > 0$.

h.3.18

Tyč je svým horním koncem připevněna ve svislé poloze a dolní konec je podložen v takové poloze, aby /díky působení gravitace/ nedošlo k prodloužení tyče. V okamžiku $t=0$ se podložka odstraní. Najděte podélné kmity tyče.

h.3.19

Najděte podélné kmity tyče délky l , jejíž jeden konec ($x=0$) je upevněn a na druhý působí síla $F = A \sin \omega t$ ve směru podélné osy tyče.

h.3.20

Homogenní struna délky l upevněná na koncích kmitá v důsledku působení vnější síly $F(x,t) = q f(x) \cdot \sin \omega t$ /na jednotku délky/.

1. Najděte kmity struny při obecných počátečních podmínkách.
2. Vyjasněte, kdy nastane rezonance a najděte řešení v případě rezonance.

h.3.21 Řešte rovnici

$$u_{tt} = u_{xx} + f(x,t) \quad \text{na } (0,l) \times E_1$$

s podmínkami

$$u(0,t) = u(l,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$$

kde f je rovna

$$\begin{array}{ll} \alpha / & b \cdot \operatorname{sh} x \\ \beta / & bx(x-l) \\ \gamma / & x \cdot (x-l) t^2 \end{array}$$

h.3.22 Řešte rovnici

$$u_{xx} - a^2 u_{tt} - 2h u_t - b^2 u = 0 \quad \text{na } (0,l) \times E_1$$

s nulovými počátečními podmínkami a okrajovými podmínkami

$$u(0,t) = A, \quad u(l,t) = 0.$$

h.3.23

Homogenní čtvercová membrána ($0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq b$) má v okamžiku t tvar

$u(x,y,0) = \varphi_0(x,y) = Axy(b-x)(b-y)$, $A = \text{const.}$ a začala v tomto okamžiku kmitat bez počáteční rychlosti. Najděte její tvar pro $t > 0$.

V následujících úlohách vede Fourierova metoda na Besselovy funkce.

h.3.24

Najděte řešení rovnice

$$u_{tt} = t^\alpha u_{xx}, \quad \alpha > -1$$

splňující podmínky

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0.$$

h.3.25

Najděte kmity kruhové membrány $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R$ upevněné na kraji, jestliže v okamžiku $t = 0$ měla tvar rotačního paraboloidu $u(x,y,0) = A(1 - \frac{r^2}{R^2})$, $0 \leq r \leq R$ a nulové rychlosti.

h.3.26

Najděte kmity kruhové membrány $r \leq R$ upevněné na okraji v prostředí, které jejímu pohybu klade odpor úměrný první mocnině rychlosti. V okamžiku $t = 0$ měla membrána tvar

$$u(x,y,0) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}) \text{ a nulové rychlosti.}$$

ŘEŠENÍ A NÁVODY

h.3.1

$$u(x,t) = \frac{1536}{5\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi at}{l} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5},$$

kde $a^2 = T_0/\rho$, T_0, ρ napjatost a lineární hustota struny.

$u \in C^3$, 4-té derivace jsou z L_2 .

Návod. Řešte Fourierovou metodou úlohu

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (0,l) \times (0,\infty)$$

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in (0,l)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

h.3.2

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi at}{l} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^3},$$

$u \in C^1$, druhé derivace jsou z L_2 .

h.3.3

$$u(x,t) \in \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{l} \cos \frac{n\pi a t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$u \in C$, první derivace jsou z L_2 .

h.3.4

$$a/ u(x,t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi^2}{2hl} x$$

$$x \sin \frac{n\pi a t}{l} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$b/ \frac{4 h v_0}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{h \pi c}{l} \cos \frac{n \pi^2}{2 h l}}{n \left(h^2 - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right)} \sin \frac{n \pi a t}{l} \cdot \sin \frac{n \pi x}{l}$$

$u \in C$, první derivace z L_2 .

Návod: řešte $u_{tt} = a^2 u_{xx}$
s podmínkami

$$u(0, t) = u_x(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = \frac{h x}{l}, u_t(x, 0) = 0.$$

h.3.6

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(a \lambda_n t) \cdot X_n(x),$$

kde

$$X_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin \lambda_n x}{\sin \lambda_n c} & 0 \leq x \leq c \\ \frac{\sin \lambda_n (l-x)}{\sin \lambda_n (l-c)} & c \leq x \leq l \end{cases}$$

λ_n jsou kořeny rovnice

$$\operatorname{ctg} \lambda c + \operatorname{ctg} \lambda (l-c) = M \lambda / \varrho,$$

$$a_n = \langle \varphi_0, X_n \rangle / \langle X_n, X_n \rangle,$$

$$\langle v, w \rangle = \varrho \int_0^l v w \, dx + M v(c) w(c).$$

Návod. Je třeba najít funkci u rovnou $u^{(1)}$ pro $0 \leq x \leq c$, $u^{(2)}$ pro $c \leq x \leq l$ splňující

$$u_{tt}^{(1)} = a^2 u_{xx}^{(1)} \text{ na } (0, c) \times (0, +\infty) \text{ resp. } (c, l) \times (0, +\infty)$$

počáteční podmínky $u(x, 0) = \varphi_0(x)$, $u_t(x, 0) = 0$

okrajové podmínky $u(0, t) = u(l, t) = 0$
podmínky přechodu $u^{(1)}(c, t) = u^{(2)}(c, t)$

$$u_x^{(2)}(c, t) - u_x^{(1)}(c, t) = \frac{M}{T} u_{tt}(c, t),$$

/poslední podmínka je Newtonův pohybový zákon pro hmotu M , neb na ni působí síla $T(u_x^{(2)}(c, t) - u_x^{(1)}(c, t))$. Hledáme řešení ve tvaru $\sum T_n(t) X_n(x)$, kde $T_n(t) X_n(x)$ jsou řešení uvedených rovnic splňující podmínky v bodech $(0, t)$, (c, t) , (l, t) . To znamená, že T_n splňují $T_n'' = -a^2 \lambda_n^2 T_n$ a $X_n = X_n^{(1)}$ resp. $X_n^{(2)}$ na příslušných množinách

$$X_n^{(1)''} = -\lambda_n^2 X_n^{(1)}$$

a okrajové a přechodové podmínky v bodech $0, c, l$. Funkce

$X_n \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, l)$ jsou ortogonální ve smyslu skalárního součinu $\langle v, w \rangle$ a skalárního součinu $((v, w)) = \varrho \int_0^l v' w' \, dx$ a jsou úplné ve $\overset{\circ}{W}_2^1$, neb jsou to právě všechny zobecněné vlastní funkce

$$\text{úlohy B } (u, v) = \varrho \int_0^l u' v' \, dx = \lambda \left[\int_0^l u v \, dx + M u(c) v(c) \right] - \text{viz [J.N].}$$

h.3.7

$$u(x, t) = \frac{8 v l}{a \pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1) \pi a t}{2 l} \sin \frac{(2n+1) \pi x}{2 l}$$

Návod. Úloha vede na stejnou matematickou úlohu jako h.3.5 s počátečními podmínkami $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = v$; pochopitelně a má jiný význam: $a^2 = p_0^k / \varrho_0$, kde p_0 a ϱ_0 je počáteční tlak a hustota vzduchu a $k = p/c_v$ je Poissonova konstanta - viz [TS], [BTS].

h.3.8

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{(2n+1) \pi a t}{2 l} + b_n \sin \frac{(2n+1) \pi a t}{2 l} \right] \cdot \sin \frac{(2n+1) \pi x}{2 l}$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{(2n+1) \pi x}{2 l} \, dx,$$

kde φ_0, φ_1 jsou počáteční posunutí a rychlosti řezů.
 Návod. Úloha vede formálně na stejnou úlohu, jako h.3.7
 s $a^2 = E/\rho$, kde ρ je lineární hustota a E Youngův modul.

h.3.9

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\mu_n at}{l} + b_n \sin \frac{\mu_n at}{l} \right) \cos \frac{\mu_n x}{l},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \frac{\mu_n^2 + \beta^2}{\mu_n^2 + \beta^2 + \beta} \int_0^l \varphi_0(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} dx$$

$$b_n = \frac{2(\mu_n^2 + \beta^2)}{a \mu_n (\mu_n^2 + \beta^2 + \beta)} \int_0^l \varphi_1(x) \cos \frac{\mu_n x}{l} dx,$$

kde $\mu_1, \mu_2, \dots$ jsou kladné kořeny rovnice

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \beta,$$

$\beta = hl$, $h = \frac{k}{E\sigma}$, kde σ je plocha řezu tyče, a k je koefi-

cient, charakterizující pružné upevnění. $u(x,t)$ je řešením úlohy

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) + h u(l,t) = 0, u(x,0) =$$

$$= \varphi_0(x), u_t(x,0) = \varphi_1(x)$$

h.3.10

$$u(x,t) = \frac{8 Q l}{E \sigma \pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{(2n+1)^2}.$$

Úloha vede na speciální případ úlohy h.3.9 s počátečními podmínkami $\varphi_0(x) = Qx/E\sigma$, $\varphi_1(x) = 0$. Síla Q roztáhne tyč.

Prodlouží-li se úsek $\langle 0, x \rangle$ o $\varphi_0(x)$, pak φ_0 je řešením rovnice

$$a^2 \varphi_0'' = 0, \varphi_0(0) = 0, \varphi_0'(l) = Q/E\sigma.$$

h.3.11

$$u(x,t) = \frac{1}{l} \int_0^l (\varphi_0(x) + x \varphi_1(x)) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) x$$

$$x \cos \frac{n\pi x}{l},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \varphi_1(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Je to řešení úlohy

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, u(x,0) = \varphi_0(x), u_t(x,0) = \varphi_1(x)$$

h.3.12

Řešte úlohu

$$(*) \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

s podmínkami $u_x(-l,t) = u_x(l,t) = 0$, $u(x,0) = \xi x$, $u_t(x,0) = 0$.

První počáteční podmínku dostaneme podobně jako v h.3.8 jako nezávislé na t řešení $(*)$ splňující okrajové podmínky

$u_x = -q_1/E\sigma$ pro $x = (-l, l)$, kde q_1 resp. $-q_1$ jsou síly, působící na tyto konce, E - Youngův modul, σ - plocha řezu.

h.3.13

$$u(x,t) = \frac{2Ql}{E\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2 \sin \beta_n (\alpha^2 + \alpha + \beta_n^2)} \cos \frac{\beta_n at}{l} \sin \frac{\beta_n x}{l}$$

kde $\alpha = \frac{\rho \sigma l}{m}$, β_n jsou kladné kořeny rovnice

$$\beta \operatorname{tg} \beta = \alpha.$$

Návod: užijte Fourierovu metodu na řešení úlohy

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, u(0,t) = 0, m u_{tt}(l,t) = -E\sigma u_x(l,t) u(x,0) =$$

$$= Qx/E\sigma, u_t(x,0) = 0.$$

h.3.14

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\mu_n t}{l} + b_n \sin \frac{\mu_n t}{l} \right) X_n(x),$$

$$\text{kde } a_n = \int_0^l \varphi_0(x) X_n(x) dx / \int_0^l X_n^2(x) dx$$

$$b_n = l \int_0^l \varphi_1(x) X_n(x) dx / \mu_n a \int_0^l X_n^2(x) dx,$$

$$X_n(x) = \cos \frac{\mu_n x}{l} + \frac{2 h_1 l}{T_0 \mu_n} \sin \frac{\mu_n x}{l}$$

μ_n jsou kořeny rovnice

$$\operatorname{ctg} \mu = \alpha \left(\frac{\mu}{l} - \frac{4 h_1 h_2 l}{T_0 \mu} \right),$$

$$\alpha = T_0/2 (h_1 + h_2).$$

Návod. Je třeba řešit rovnici $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ s podmínkami

$$u(x,0) = \varphi_1(x), u_t(x,0) = \varphi_1(x), u_x(0,t) - \frac{2h_1}{T_0} u(0,t) = 0,$$

$$u_x(l,t) + \frac{2h_2}{T_0} u(l,t) = 0, \text{ kde } h_1, h_2 \text{ jsou kladné konstanty.}$$

h.3.15

$$u(x,t) = l^{-ht} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos q_n t + b_n \sin q_n t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$q_n = (n^2 a^2 \pi^2 / l^2 - h^2)^{1/2},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, b_n = \frac{h}{q_n} a_n + \frac{2}{l q_n} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Je třeba řešit úlohu: $u_{tt} + 2h u_t = a^2 u_{xx}$, h malé kladné,
 $u(0,t) = u(l,t) = 0$, $u(x,0) = \varphi_0(x)$, $u_t(x,0) = \varphi_1(x)$.

h.3.16

$$u(x,t) = \frac{A \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\sin \frac{\omega}{a} l} + \frac{2 A \omega a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2 - \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2} x$$

$$x \sin \frac{n\pi a t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Řešte:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, u(0,t) = 0, u(l,t) = A \sin \omega t, u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

Vzorec je správný pro $\omega \neq \frac{n\pi a}{l}$, $n \in \mathbb{N}$. Řešení hledejte

ve tvaru $u = v + w$, kde $v = V(x) \sin \omega t$ řeší rovnici a splňuje okrajové podmínky. Pro w pak dostaneme úlohu, na niž lze užít Fourierovu metodu.

h.3.17

$$u(x,t) = \frac{Q}{E} x - \frac{8Ql}{\pi^2 E} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{(2n+1)^2}$$

$$\text{Řešte } u_{tt} = a^2 u_{xx}, u(0,t) = 0, u_x(l,t) = Q/E, u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

h.3.18

$$u(x,t) = \frac{gx(2l-x)}{2a^2} - \frac{16gl^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} x$$

$$\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

g - gravitační zrychlení. Řešte $u_{tt} = a^2 u_{xx} + g$
s podmínkami $u(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = 0$, $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$.
Řešení hledejte ve tvaru $u = v + w$, kde v splňuje rovnici a okrajové podmínky /v lze hledat nezávislé na t /.

h.3.19

$$u(x,t) = \frac{aA}{E\sigma\omega} \frac{\sin \frac{\omega x}{a} \sin \omega t}{\cos \frac{\omega l}{a}} + \frac{2a\omega A}{E\sigma l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{k_n} x \times \frac{\sin k_n x}{\omega^2 - k_n^2 a^2} \sin(a k_n t),$$

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l} \text{ pro } \omega \neq a k_n.$$

Návod: Řešte $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $u(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = 0$, $u_x(l,t) = \frac{A}{E\sigma} x \sin \omega t$, $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$

Viz též návod k úloze h.3.16.

h.3.20

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)} (\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad \omega_n = \frac{a n \pi}{l}.$$

Rezonance nastane, je-li frekvence ω vnější síly rovná některé frekvenci

$$\omega_{n_1} = \frac{a n_1 \pi}{l}$$

vlastních harmonických kmitů upevněné struny. V tomto případě řešení má tvar

$$u(x,t) = \frac{f_{n_1}}{2\omega_{n_1}^2} (\sin \omega_{n_1} t - t \omega_{n_1} \cos \omega_{n_1} t) \sin \frac{n_1 \pi x}{l} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_1}}^{\infty} \frac{f_n}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)} (\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Řešte $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x) \sin \omega t$, $u(0,t) = u(l,t) = 0$,

$u(x,0) = \varphi_0(x)$, $u_t(x,0) = \varphi_1(x)$.

h.3.21

$$\alpha / u(x,t) = b \left(\frac{x}{l} \operatorname{sh} l - \operatorname{sh} x \right) + \frac{2b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos \frac{\pi n t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} -$$

$$- 2b\pi \operatorname{sh} l \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 l^2 + l^2} \cos \frac{n\pi t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\beta / u(x,t) = -\frac{bx}{12} (x^3 - 2x^2 l + l^3) + \frac{8l^4}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi t}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5}$$

$$\gamma / u(x,t) = -\frac{8l^4 t^2}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5} + \frac{16l^6}{\pi^7} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^7} -$$

$$- \frac{16l^6}{\pi^7} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi t}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^7}.$$

h.3.22

$$u(x,t) = A \frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} b l} - 2 A e^{-\mu t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 k \pi}{b^2 l^2 + k^2 \pi^2} x$$

$$(\operatorname{ch} n_k t + \frac{\mu}{n_k} \operatorname{sh} n_k t) \sin \frac{k \pi x}{l}, \quad \mu = \frac{h}{a^2},$$

$$n_k = \frac{1}{a^2 l} (-h^2 l^2 + a^2 (b^2 l^2 + k^2 \pi^2))^{1/2}$$

Návod. Řešení hledejte ve tvaru $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$, kde v splňuje rovnici a okrajové podmínky a w určete Fourierovou metodou: rozdělení proměnných proveďte tak, abyste pro funkce X_n dostali rovnici

$$\frac{X_n''}{X_n} = -\lambda_n.$$

h.3.23

$$u(x,y,t) = \frac{64 A b^4}{\pi^6} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{b}}{(2n+1)^3} \frac{\sin \frac{(2m+1)\pi y}{b}}{(2m+1)^3} x \cos \sqrt{(2n+1)^2 + (2m+1)^2} \frac{a\pi t}{b}.$$

Návod. Řešte rovnici

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$$

s podmínkami $u/x=0 = u/x=b = u/y=0 = u/y=b = 0$

$$u/t=0 = Axy(b-x)(b-y), \quad u_t/t=0 = 0.$$

Separujte nejdříve proměnnou t a vlastní funkce operátoru $u_{xx} + u_{yy}$ hledejte ve tvaru $X(x) \cdot Y(y)$. O tom, že tak najdete všechny vlastní funkce, se lze přesvědčit užitím věty:

Jsou-li: X_n úplný ortogonální systém v $L_2(0,b)$ a Y_n úplný ortogonální systém v $L_2(0,b)$, pak $X_n(x) Y_m(y)$ je úplný ortogonální systém v $L_2[(0,b)^2]$.

h.3.24

$$u(x,t) = t^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k J_p(2p\lambda_k t^{1/2p}) + B_k J_p(2p\lambda_k t^{1/2p}) \right] \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$p = \frac{1}{2+\alpha}, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{l},$$

$$A_k = \frac{2}{l} \Gamma(1-p) \left(\frac{k\pi p}{l} \right)^p \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

$$B_k = \frac{2}{l} \Gamma(1+p) \left(\frac{k\pi p}{l} \right)^{-p} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

h.3.25

$$u(r,t) = 8A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n \frac{r}{R})}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \cos \frac{a \mu_n t}{R},$$

kde $\mu_1, \mu_2, \dots$ jsou kladné kořeny rovnice $J_0(\mu) = 0$.

Návod: Užijte Fourierovu metodu k integraci rovnice

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = \frac{1}{a^2} u_{tt}$$

s podmínkami $u(0,t)$ je konečné, $u(R,t) = 0$, $u(r,0) = A\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$, $u_t(r,0) = 0$.

Při určování koeficientů rozkladu užijte vzorce

$$\int_0^x x J_0(x) dx = x J_1(x)$$

$$\int_0^x x^3 J_0(x) dx = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x)$$

h.3.26

$$u(r,t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-h t} \left(\cos q_n t + \frac{h}{q_n} \sin q_n t \right) x$$

$$x \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{J_1^2(\mu_n)} \int_0^R \varphi(\varrho) J_0\left(\frac{\mu_n \varrho}{R}\right) d\varrho,$$

kde $q_n = \left(\frac{a^2 \mu_n^2}{R^2} - h^2 \right)^{1/2}$, $\mu_1, \mu_2, \dots$ jsou kladné kořeny

Besselovy funkce J_0 .

Návod: Řešte rovnici

$$u_{tt} + 2h u_t = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) \quad (h > 0 \text{ malé})$$

s podmínkami

$$u(0,t) \text{ konečné, } u(R,t) = 0$$

$$u(r,0) = \varphi(r), \quad u_t(r,0) = 0.$$

e.3.17

$$1. y(x) = -\lambda \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi, \text{ kde}$$

$$G(x, \xi) = \arctg x, \quad 0 \leq x \leq \xi.$$

$$2. y(x) = -\lambda \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi, \text{ kde}$$

$$G(x, \xi) = (-e^{-x} + 1) e^{-\xi}, \quad 0 \leq x \leq \xi.$$

$$3. y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) y(\xi) d\xi + \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \text{ kde}$$

$$G(x, \xi) = \frac{-\xi + 1}{h + 1} (x + h), \quad 0 \leq x \leq \xi.$$

$$4. y(x) = -\lambda \int_0^1 G(x, \xi) \xi y(\xi) d\xi, \text{ kde}$$

$$G(x, \xi) = \log \xi, \quad 0 \leq x \leq \xi.$$

e.3.18

$$1. y(x) = \int_1^e G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \text{ kde}$$

$$G(x, \xi) = (x + \log x - 1) (\xi + \log \xi), \quad 0 \leq x \leq \xi.$$

$$2. y(x) = \int_1^2 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \text{ kde}$$

$$G(x, \xi) = \xi^{-2} (x^{-1} - x^{-2}), \quad 1 \leq x \leq \xi.$$

$$3. y(x) = \int_{-1}^0 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \text{ kde}$$

$$G(x, \xi) = \log|x| - x, \quad -1 \leq x \leq \xi.$$

$$4. y(x) = \int_0^{\sqrt{x}} G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \text{ kde}$$

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \right), \quad 0 \leq x \leq \xi$$

$$5. y(x) = \int_1^2 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \text{ kde}$$

$$G(x, \xi) = 3 \xi^{-1} x^2, \quad 1 \leq x \leq \xi.$$

e.4. METODA ROZDĚLENÍ PROMĚNNÝCH

A. ROVINNÉ ÚLOHY

CVIČENÍ

e.4.1.

Je dána tenká obdélníková deska OACB. Stranou OA se teplo rovnoměrně přivádí dovnitř desky, stranou OB se rovnoměrně odvádí. Zbývající dvě strany jsou tepelně izolovány. Nalezněte rozložení teploty v desce.

e.4.2.

Nalezněte řešení Laplaceovy rovnice v obdélníku $0 < x < a$, $0 < y < b$, které vyhovuje okrajovým podmínkám

$$u|_{x=0} = A \cdot \sin \frac{\pi y}{b}, \quad u|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=0} = B \sin \frac{\pi x}{a}, \quad u|_{y=b} = 0.$$

e.4.3.

Nalezněte funkci, harmonickou uvnitř jednotkového kruhu, která se dá spojitě prodloužit na uzávěr, přičemž platí

$$1. u(1, \varphi) = \cos^2 \varphi, \quad 2. u(1, \varphi) = \sin^3 \varphi, \quad 3. u(1, \varphi) = \cos^4 \varphi, \\ 4. u(1, \varphi) = \sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi.$$

e.4.4.

Nalezněte řešení Neumannovy úlohy pro Laplaceovu rovnici v kruhu o poloměru $R > 0$ a se středem v počátku. má-li okrajová podmínka tvar

$$1. \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = A \cos \varphi \quad 2. \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = A \cos 2 \varphi$$

$$3. \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = \sin^3 \varphi$$

e.4.5.

Nalezněte stacionární rozložení teploty $u(r, \varphi)$ uvnitř nekonečného kruhového válce o poloměru R , jestliže

1. na jeho povrchu je udržována teplota $A \sin \varphi$,
2. na jedné polovině povrchu ($0 \leq \varphi < \pi$) je udržována teplota $-T_0$ a na druhé polovině ($-\pi \leq \varphi < 0$) teplota T_0 .

e.4.6.

Nalezněte řešení vnějších okrajových úloh pro Laplaceovu rovnici, je-li Ω kruh se středem v počátku a poloměrem a . (Newtonovu okrajovou podmínku uvažujte ve tvaru $\frac{\partial u}{\partial r} - hu = -f$, $r = a$, kde h je dané reálné číslo, f funkce, definovaná na $\partial\Omega$).

e.4.7.

Řešte smíšenou okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici v mezikruží se středem v počátku $0 < R_1 < R_2$, mají-li okrajové podmínky tvar

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R_1} = f_1(\varphi), \quad u(R_2, \varphi) = f_2(\varphi).$$

e.4.8.

V mezikruží $\{(r, \varphi); r \in (1, 2), \varphi \in (0, 2\pi)\}$ řešte Dirichletovu úlohu s podmínkami $u(1, \varphi) = f_1(\varphi)$, $u(2, \varphi) = f_2(\varphi)$, kde

1. $f_1(\varphi) = u_1 = \text{const}$, $f_2(\varphi) = u_2 = \text{const}$
2. $f_1(\varphi) = 1 + \cos^2 \varphi$, $f_2(\varphi) = \sin^2 \varphi$

e.4.9.

Nalezněte řešení Poissonovy rovnice s pravou stranou $r(x, y) = -2$ na obdélníku $\Omega = \{(x, y); x \in (0, a), y \in (-\frac{b}{2}, \frac{b}{2})\}$, které je spojitě na $\overline{\Omega}$ a nulové na $\partial\Omega$.

e.4.10.

Nalezněte řešení Dirichletovy úlohy pro Poissonovu rovnici $\Delta u = -4$ v kruhu o poloměru a a se středem v počátku,

je-li okrajová podmínka nulová.

e.4.11.

Pro rovnici $\Delta u = -xy$ řešte úlohu, popsanou ve cvičení e.4.10.

e.4.12.

V mezikruží $a < r < b$ řešte smíšenou okrajovou úlohu pro Poissonovu rovnici $\Delta u = 12(x^2 - y^2)$, jestliže

$$u(a, \varphi) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=b} = 0.$$

e.4.13.

Nalezněte funkci harmonickou uvnitř kruhové výseče $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$, která splňuje okrajové podmínky

$$u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0, \quad u(R, \varphi) = A \cdot \varphi.$$

e.4.14.

Nalezněte stacionární rozložení teploty uvnitř nekonečného kruhového válce o poloměru l , jestliže na povrchu válce je udržována nulová teplota v bodech $\varepsilon < \varphi < 2\pi$ a teplota $\frac{2\pi u_0}{\varepsilon}$ v bodech $0 < \varphi < \varepsilon$. ($\varepsilon \dots$ malé kladné číslo).

e.4.15.

Nalezněte stacionární rozložení teploty uvnitř nekonečného kruhového válce o poloměru l , jestliže na jeho povrchu je udržována nulová teplota v bodech $\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon$, teplota $\left(-\frac{u_0}{\varepsilon^2}\right)$ v bodech, kde $2\pi - \varepsilon < \varphi < 2\pi$, a $\frac{u_0}{\varepsilon^2}$ v bodech $0 < \varphi < \varepsilon$. ($\varepsilon \dots$ malé kladné číslo).

B. ÚLOHY V PROSTORU

Následující dvě cvičení se týkají kruhových válců konečné výšky - při jejich řešení se užívá Besselových funkcí (viz m. 2).

e.4.16.

Najděte stacionární rozložení teploty $u(r, t)$ uvnitř kruhového válce o poloměru R a výšce h , jestliže platí jedna z následujících podmínek.

1. Teplota dolní základny a pláště je nulová, teplota horní základny závisí pouze na vzdálenosti r od osy válce.
2. Teplota dolní základny je nulová, plášť je tepelně izolován, teplota horní základny je funkcí proměnné r /vzdálenost od osy válce/.
3. Teplota dolní základny je nulová, plášť se ochlazuje ve vzduchu nulové teploty, teplota horní základny je funkcí proměnné r .
4. Teplota obou základen je nulová, teplota v každém bodě pláště závisí pouze od vzdálenosti bodu od dolní základny. /Souřadnice Z /.
5. Základny válce jsou tepelně izolovány, teplota pláště je funkcí proměnné Z .

e.4.17.

Nalezněte stacionární rozložení teploty uvnitř tělesa, které má tvar válce /kruhového/ poloměru základny R a výšky h , určené jednou z následujících dvou okrajových podmínek:

1. K dolní základně $Z = 0$ se přivádí konstantní tok tepla Q , plášť a horní základna jsou udržovány na nulové teplotě.
2. K dolní základně $Z = 0$ se přivádí konstantní tok tepla Q , horní základna se udržuje na nulové teplotě, na plášti probíhá výměna tepla s prostředím nulové teploty.

Další cvičení se týkají řešení Laplaceovy rovnice na kouli za podmínek, které zaručí, že řešení $u(r, \varphi, \Theta)$ nezávisí na úhlu φ . Návod naleznete v e.2, PŘÍKLAD 3.

e.4.18

Nalezněte řešení Dirichletovy úhly pro Laplaceovu rovnici v kouli se středem v počátku a poloměrem R za předpokladu, že

$$u(R, \varphi, \Theta) = f(\Theta),$$

kde

1. $f(\Theta) = \cos \Theta$, 2. $f(\Theta) = \cos^2 \Theta$, 3. $f(\Theta) = \cos 2\Theta$, 4. $f(\Theta) = \sin^2 \Theta$.

e.4.19.

Nalezněte funkci, harmonickou v $B(0, R) = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$ a spojitou v $\overline{B(0, R)}$, pro kterou platí

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial r}\right)\bigg|_{r=R} = 1 + \cos^2 \Theta.$$

e.4.20.

Nalezněte funkci, harmonickou v $R_3 \setminus \overline{B(0, R)}$, spojitou v $R_3 \setminus B(0, R)$ a takovou, že

1. $u(R, \varphi, \Theta) = \sin^2 \Theta$, 2. $\left(u - \frac{\partial u}{\partial r}\right)\bigg|_{r=R} = \sin^2 \Theta$, 3. $u(R, \varphi, \Theta) = A \cos \Theta$.

e.4.21.

Vyjasněte, zda je řešitelná Neumannova úloha pro kouli $B(0, R)$ v případě, že

1. $\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R} = A \cdot \cos \Theta$, 2. $\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \sin \Theta$.

Nalezněte řešení, pokud existuje!

e.4.22.

Řešte Dirichletovu úlohu v kulové vrstvě $1 < r < 2$ pro Laplaceovu rovnici, mají-li okrajové podmínky tvar

$$u(1, \varphi, \Theta) = f_1(\Theta), \quad u(2, \varphi, \Theta) = f_2(\Theta), \quad \text{kde}$$

1. $f_1(\Theta) = \cos^2 \Theta$, $f_2(\Theta) = \frac{1}{8}(\cos^2 \Theta + 1)$.
2. $f_1(\Theta) = \cos^2 \Theta$, $f_2(\Theta) = 4 \cos^2 \Theta - \frac{4}{3}$.

$$3. f_1(\theta) = 1 - \cos 2\theta, f_2(\theta) = 2 \cos \theta.$$

$$4. f_1(\theta) = \frac{1}{2} \cos \theta, f_2(\theta) = 1 + \cos 2\theta.$$

$$5. f_1(\theta) = 9 \cdot \cos 2\theta, f_2(\theta) = 3(1 - 7 \cos^2 \theta).$$

e.4.23.

Nalezněte stacionární rozložení teploty v polokouli o poloměru R , jestliže kulová část hranice se udržuje na stálé teplotě T_0 a základna má teplotu nula stupňů.

e.4.24.

Nalezněte stacionární rozložení teploty v homogenní a izotropní kouli poloměru R , jestliže se na kulové ploše udržuje teplota $u(R, \varphi, \theta) = u_1$ pro $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$,

$$u(R, \varphi, \theta) = u_2 \text{ pro } \frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi.$$

Následuje několik cvičení na metodu rozdělení proměnných v případě, že oblast Ω je koule $B(0, R)$ a podmínka na hranici má obecný tvar. Návod viz e.2, PŘÍKLAD 4.

e.4.25.

V jednotkové kouli řešte okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici, je-li dáno:

$$1. u(1, \varphi, \theta) = \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin^2 \theta.$$

$$2. u(1, \varphi, \theta) = (\sin \theta + \sin 2\theta) \cdot \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$3. u(1, \varphi, \theta) = \sin \theta \cdot (\sin \varphi + \sin \theta).$$

$$4. \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} = \sin^{10} \theta \sin 10\varphi, \quad u \Big|_{r=0} = 1.$$

e.4.26.

V kouli o poloměru R a se středem v počátku řešte okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici, je-li dáno:

$$1. u(R, \varphi, \theta) = \sin\left(2\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos \theta.$$

$$2. u(R, \varphi, \theta) = \sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin^3 \theta.$$

$$3. u(R, \varphi, \theta) = \sin^2 \theta \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin \theta \sin \varphi.$$

$$4. \left(u + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \Big|_{r=R} = \sin^2 \theta \cdot \left[\sqrt{2} \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos^2 \varphi\right].$$

$$5. \left(u + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \Big|_{r=R} = \sin \theta \cdot (\sin \varphi + \cos \varphi \cos \theta + \sin \theta).$$

e.4.27.

Nalezněte řešení vnější okrajové úlohy pro jednotkovou kouli, má-li okrajová podmínka tvar

$$1. \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \cdot \sin \theta.$$

$$2. u(1, \varphi, \theta) = \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right).$$

e.4.28.

Nalezněte funkci u harmonickou na $R_3 \setminus \overline{B(0, R)}$ a spojitou na $R_3 \setminus B(0, R)$, která splňuje okrajovou podmínku:

$$1. u(R, \varphi, \theta) = \sin^3 \theta \cdot \cos \theta \cdot \cos\left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$2. u(R, \varphi, \theta) = \sin 100\varphi \cdot \sin^{100} \theta.$$

$$3. \left(u - \frac{\partial u}{\partial r}\right) \Big|_{r=R} = \sin \theta \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right).$$

e.4.29.

Řešte Dirichletovu úlohu v kulové vrstvě $1 < r < 2$ pro Laplaceovu rovnici, mají-li okrajové podmínky tvar

$$1. u(1, \varphi, \theta) = \sin \varphi \sin \theta, \quad u(2, \varphi, \theta) = 0.$$

$$2. u(1, \varphi, \theta) = 3 \sin 2\varphi \sin^2 \theta, \quad u(2, \varphi, \theta) = 3 \cos \theta.$$

$$3. u(1, \varphi, \theta) = 7 \cos \varphi \sin \theta, \quad u(2, \varphi, \theta) = 7 \cos \theta.$$

$$4. u(1, \varphi, \theta) = (3 - \sin 2\varphi) \cdot \sin^2 \theta, \quad u(2, \varphi, \theta) = 4 u(1, \varphi, \theta).$$

$$5. u(1, \varphi, \theta) = 12 \cos \varphi \sin \theta \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad u(2, \varphi, \theta) = 0.$$

6. $u(1, \varphi, \theta) = \sin 2\varphi \sin^2 \theta$, $u(2, \varphi, \theta) = \cos 2\varphi \sin^2 \theta$.
 7. $u(1, \varphi, \theta) = \cos \varphi \sin 2\theta$, $u(2, \varphi, \theta) = \sin \varphi \sin 2\theta$.
 8. $u(1, \varphi, \theta) = 31 \sin \varphi \sin 2\theta$, $u(2, \varphi, \theta) = 31 \sin^2 \theta \cos 2\varphi$.
 9. $u(1, \varphi, \theta) = \cos \theta$, $u(2, \varphi, \theta) = \cos \varphi (12 \sin \theta - 15 \sin^3 \theta)$.

e.4.30.

V kulové vrstvě $1 < r < 2$ řešte následující okrajové úlohy pro Laplaceovu rovnici:

1. $\left(3u + \frac{\partial u}{\partial r}\right)\bigg|_{r=1} = 5 \sin^2 \theta \sin 2\varphi$, $u(2, \varphi, \theta) = -\cos \theta$.
 2. $u(1, \varphi, \theta) = \sin \theta \sin \varphi (5 + 6 \cos \theta)$, $\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=2} = 12 \sin \varphi \sin 2\theta$.
 3. $u(1, \varphi, \theta) = 1$, $\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=2} = 15 \cos \varphi (\cos^2 \theta \sin \theta + \sin \varphi \sin^2 \theta \cos \theta)$.

e.4.31.

V kulové vrstvě $\frac{1}{2} < r < 1$ řešte Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu rovnici s podmínkami

1. $u\left(\frac{1}{2}, \varphi, \theta\right) = 0$, $u(1, \varphi, \theta) = 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta$.
 2. $u\left(\frac{1}{2}, \varphi, \theta\right) = 30 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \cos \theta$, $u(1, \varphi, \theta) = 0$.

ŘEŠENÍ

e.4.1.

Zadání vede k řešení Neumannovy úlohy $\Delta u = 0$,

$$u_x|_{x=0} = \frac{Q}{kb}, \quad u_x|_{x=a} = 0, \quad u_y|_{y=0} = -\frac{Q}{ka}, \quad u_y|_{y=b} = 0, \quad \text{kde } Q$$

je množství tepla, vcházející stranou OA a vycházející stranou OB, k je koeficient vnitřní tepelné vodivosti. Řešení má tvar

$$u(x, y) = \frac{Q}{2kab} [(y-b)^2 - (x-a)^2] + C, \quad \text{kde } C \text{ je konstanta.}$$

e.4.2.

Návod: e.2.2, příklad 1. Řešení má tvar

$$u(x, y) = A \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{b}} \sin \frac{\pi y}{b} + B \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

e.4.3.

1. $\frac{1}{2} (1 + r^2 \cos 2\varphi)$.
 2. $\frac{r}{4} 3(\sin \varphi - r^2 \sin 3\varphi)$.
 3. $\frac{3}{8} + \frac{r^2}{2} \cos 2\varphi + \frac{r^4}{8} \cos 4\varphi$.
 4. $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} r^4 \cos 4\varphi$.

e.4.4.

1. $Ar \cos \varphi + C$.
 2. $\frac{A}{2R} r^2 \cos 2\varphi + C$.
 3. $\frac{1}{4} \left(3r \sin \varphi - \frac{r^3}{3R^2} \sin 3\varphi \right) + C$. / C - libovolná konstantní funkce./

e.4.5.

1. $\frac{Ar}{R} \sin \varphi$.
 2. $-\frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{2T_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R^2 - r^2}{2rR \sin \varphi} - T_0$.

e.4.6.

Dirichletova úloha:

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

$$\text{Neumannova úloha: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{nr^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + C,$$

Newtonova úloha:

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(a^n + h)r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) - \frac{A_0}{2h}$$

/A, B ... Fourierovy koeficienty okrajové funkce./

e.4.7

$$u(r, \varphi) = \alpha_0^{(2)} + \alpha_0^{(1)} R_1 \log \frac{r}{R_2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha_k^{(1)} R_2^{-k} + k R_1^{-k-1} \alpha_k^{(2)}) r^k + (k R_1^{k-1} \alpha_k^{(2)} - R_2^k \alpha_k^{(1)}) r^{-k}}{k(R_1^{k-1} R_2^{-k} + R_2^k R_1^{-k-1})} \cos k\varphi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta_k^{(1)} R_2^{-k} + k R_1^{-k-1} \beta_k^{(2)}) r^k + (k R_1^{k-1} \beta_k^{(2)} - R_2^k \beta_k^{(1)}) r^{-k}}{k(R_1^{k-1} R_2^{-k} + R_2^k R_1^{-k-1})} \sin k\varphi,$$

kde $\alpha_k^{(1)}$ a $\beta_k^{(1)}$ jsou Fourierovy koeficienty funkce f_1 , $\alpha_k^{(2)}$ a $\beta_k^{(2)}$ jsou Fourierovy koeficienty funkce f_2 .

e.4.8.

$$1. u_1 + (u_2 - u_1) \frac{\log r}{\log 2}$$

$$2. \frac{3}{2} - \frac{\log r}{\log 2} + \left(\frac{2}{3r^2} - \frac{r^2}{6} \right) \cos 2\varphi.$$

e.4.9.

$$u(x, y) = x(a-x) - \frac{\varepsilon a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi y}{a}}{(2n+1)^3} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi b}{2a}}$$

e.4.10. $u(x, y) = a^2 - (x^2 + y^2).$

e.4.11.

Řešení hledejte ve tvaru součtu partikulárního řešení Poissonovy rovnice a řešení rovnice Laplaceovy s nehomogenní Dirichletovou podmínkou.

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{24} r^4 \sin 2\varphi + \frac{R^4}{48\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2t \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t-\varphi) + r^2} dt.$$

e.4.12.

$$u(r, \varphi) = \left[(a^4 + b^4) r^4 - (a^6 + 2b^6) r^2 - (a^2 - 2b^2) \frac{a^4 b^4}{r^2} \right] \frac{\cos 2\varphi}{a^4 + b^4}.$$

e.4.13.

$$u(r, \varphi) = \frac{2A\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \frac{\sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha}}{n}$$

e.4.14.

Poissonův integrál má pro tento případ tvar

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\varepsilon \frac{2\pi u_0}{\varepsilon} \frac{l^2 - r^2}{l^2 - 2rl \cos(t-\varphi) + r^2} dt.$$

Odtud lze získat přechodem $\varepsilon \rightarrow 0+$ asymptotickou formuli

$$u(r, \varphi) \sim \frac{u_0 (l^2 - r^2)}{l^2 - 2rl \cos \varphi + r^2}.$$

e.3.15. Poissonův integrál má tvar

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\varepsilon \frac{u_0}{\varepsilon^2} \frac{l^2 - r^2}{l^2 - 2rl \cos(t-\varphi) + r^2} dt - \frac{1}{2\pi} \frac{u_0}{\varepsilon^2} \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} \frac{l^2 - r^2}{l^2 - 2rl \cos(t-\varphi) + r^2} dt.$$

Substitucí snadno dospějeme k výrazu

$$u(r, \varphi) = \frac{u_0(l^2 - r^2)}{2\pi \varepsilon^2} \int_0^\varepsilon \left[\frac{1}{l^2 - 2rl \cos(t - \varphi) + r^2} - \frac{1}{l^2 - 2rl \cos(t - \varphi) + r^2} \right] dt$$

Přechodem k limitě pro $\varepsilon \rightarrow 0+$ dostaneme

$$u(r, \varphi) \sim u_0 \frac{rl(l^2 - r^2) \sin \varphi}{(l^2 - 2rl \cos \varphi + r^2)^2}$$

e.4.16.

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\operatorname{sh} \mu_n z R^{-1}}{\operatorname{sh} \mu_n h R^{-1}} J_0(\mu_n r R^{-1}), \text{ kde}$$

$\mu_n, n=1, 2, \dots$ jsou kladné kořeny rovnice $J_0(\mu) = 0$,

$$a_n = 2R^{-2} J_1^{-2}(\mu_n) \int_0^R r u_0(r) J_0(\mu_n r R^{-1}) dr.$$

$$2. u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\operatorname{sh} \mu_n z R^{-1}}{\operatorname{sh} \mu_n h R^{-1}} J_0(\mu_n r R^{-1}), \text{ kde } \mu_n, n=1, 2, \dots$$

jsou kladné kořeny rovnice $J_1(\mu) = 0$, $a_n = 2R^{-2} J_0^{-2}(\mu_n) \times$

$$\times \int_0^R r u_0(r) J_0(\mu_n r R^{-1}) dr.$$

3. Tvar řady je stejný, jako v předcházejících dvou příkla-

dech. Přitom $\mu_n, n=1, 2, \dots$ jsou kladné kořeny rovnice

$$\mu J_1(\mu) - h_1 R J_0(\mu) = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{R^2} \left(1 + \frac{h_1 R^2}{\mu_n^2} \right)^{-1} \left[J_0(\mu_n) \right]^{-2} \int_0^R r u_0(r) J_0(\mu_n r R^{-1}) dr.$$

Návod: Okrajové podmínky mají tvar

$$|u|_{r=0} < \infty, u|_{z=0} = 0, (u_r + h_1 u)|_{r=R} = 0, u|_{z=h} = u_0(r).$$

$$4. u(r, z) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left[J_0(\pi n R h^{-1}) \right]^{-1} \int_0^h f(\xi) \sin \pi n \xi h^{-1} d\xi \times$$

$\times \sin \pi n z h^{-1} J_0(\pi n r h^{-1})$, kde $J_0(ix)$ je Besselova funkce
multého řádu ryze imaginárního argumentu.

$$5. u(r, z) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left[J_0(\pi n R h^{-1}) \right]^{-1} \times$$

$$\times \left(\int_0^h f(\xi) \cos \pi n \xi h^{-1} d\xi \right) \cos \pi n z h^{-1} J_0(\pi n r h^{-1}).$$

Návod: Okrajové podmínky mají tvar $u_z|_{z=0} = u_z|_{z=h} = 0$,

$$u|_{r=R} = f(z).$$

e.4.17.

$$1. u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\operatorname{sh} \mu_n (h-z) R^{-1}}{\operatorname{ch} \mu_n h R^{-1}} J_0(\mu_n r R^{-1}),$$

kde μ_n jsou kladné kořeny rovnice $J_0(\mu) = 0$, $a_n = \frac{2Rq}{k \mu_n^2 J_1(\mu_n)}$,

k - koeficient vedení tepla. Návod: Úloha vede na řešení
okrajové úlohy pro Laplaceovu rovnici s okrajovými podmínka-
mi $-ku_z|_{z=0} = q$, $u|_{r=R} = u|_{z=h} = 0$.

$$2. u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\operatorname{sh} \mu_n (h-z) R^{-1}}{\operatorname{ch} \mu_n h R^{-1}} J_0(\mu_n r R^{-1}), \text{ kde } \mu_n, n=1, 2, \dots$$

jsou kladné kořeny rovnice $\mu J_1(\mu) - R h_1 J_0(\mu) = 0$, h_1 je
koeficient výměny tepla,

$$a_n = 2h_1^2 R^3 q k^{-1} (R^2 h_1^2 + \mu_n^2)^{-1} [J_1(\mu_n)]^{-1} \mu_n^{-2}.$$

Návod: Okrajové podmínky mají tvar $-ku_z|_{z=0} = q$,
 $(u_r + h_1 u)|_{r=R} = 0$, $u|_{z=h} = 0$.

e.4.18.

1. $rR^{-1} \cos \theta$.

2. $3^{-1} (1 - r^2 R^{-2}) + r^2 R^{-2} \cos^2 \theta$.

3. $\frac{4}{3} (r^2 R^{-2}) P_2(\cos \theta) - \frac{1}{3}$.

4. $\frac{2}{3} - \frac{2}{3} r^2 R^{-2} P_2(\cos \theta)$.

e.4.19. $\frac{4}{3} + \frac{2r^2}{3R(R+2)} P_2(\cos \theta)$.

e.4.20.

1. $-\frac{2}{3} \frac{R^2}{r} + \frac{R^4}{9r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) + C$, kde C je libovolná

konstanta.

2. $C + \left(\frac{2}{3} - C\right) \frac{R^2}{r(R+1)} - \frac{R^4}{(R+3)r^3} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3}\right)$, kde

C je libovolná konstanta.

3. $C - \frac{A}{2} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta$, kde C je libovolná konstanta.

e.4.21.

1. Úloha má řešení: $u = \text{Arcos } \theta + C$, kde C je libovolná konstanta.

2. Úloha nemá řešení.

e.4.22.

1. $\frac{1}{3r} + \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{3r^3}$.

2. $\frac{1}{3} \left[\frac{2}{r} - 1 + r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \right]$.

3. $\frac{8}{3r} - \frac{4}{3} + \left(\frac{8}{7} r - \frac{8}{7r^2}\right) P_1(\cos \theta) + \left(\frac{4}{93} r^2 - \frac{128}{93r^3}\right) P_2(\cos \theta)$.

4. $\frac{4}{3} (1 - r^{-1}) + \frac{1}{14} \left(\frac{8}{r^2} - r\right) P_1(\cos \theta) + \frac{32}{93} (r^2 - r^{-3}) P_2(\cos \theta)$.

5. $\frac{2}{r} - 5 + 4 \left(\frac{4}{r^3} - r^2\right) P_2(\cos \theta)$.

e.4.23.

$$u(r, \theta) = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} (4n+3) \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1} \times \\ \times P_{2n+1}(\cos \theta), \theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

e.4.24.

$$u(r, \theta) = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} \times \\ \times (4n+3) P_{2n+1}(\cos \theta) \left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1}$$

e.4.25.

1. $r^2 \cos \left(2\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \sin^2 \theta$.

2. $(r \sin \theta + r^2 \sin 2\theta \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right))$.

3. $\frac{2}{3} - \frac{r^2}{6} (3 \cos 2\theta + 1) + r \sin \theta \sin \varphi$.

4. $1 + \frac{r^{10}}{10} \sin^{10} \theta \sin 10\varphi$.

e.4.26.

1. $r^3 R^{-3} \sin \left(2\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \sin^2 \theta \cos \theta$.

2. $r^3 R^{-3} \sin \left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \sin^3 \theta$.

3. $r^2 R^{-2} \sin^2 \theta \cos \left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + r R^{-1} \sin \theta \sin \varphi$.

4. $\frac{2}{3} + \frac{r^2}{R^2} \left[-\frac{R}{3(2+R)} (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{R}{2+R} (2 \cos 2\varphi - \sin 2\varphi) \times \right. \\ \left. \times \sin^2 \theta \right]$.

Návod:

$$(u_r + u)|_{r=R} = \frac{1}{3} P_2^{(2)}(\cos \theta) (2 \cos 2\varphi - \sin 2\varphi) + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} P_2(\cos \theta) .$$

Hledejte řešení ve tvaru

$$u = A + Br^2 P_2(\cos \theta) + r^2 (C \cos 2\varphi + D \sin 2\varphi) P_2^{(2)}(\cos \theta) .$$

$$5. \frac{2}{3} + \frac{r}{R+1} \sin \varphi \sin \theta + \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi}{R(R+2)} - \frac{r^2}{3} \frac{3 \cos^2 - 1}{R(R+2)} .$$

Návod:

$$(u + u_r)|_{r=R} = \sin \varphi P_1^{(1)}(\cos \theta) + \frac{1}{3} \cos \varphi P_2^{(1)}(\cos \theta) + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} P_2(\cos \theta) .$$

Řešení hledejte ve tvaru

$$u = A + B \frac{r}{R} \sin \varphi \sin \theta + C \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cos \varphi P_2^{(1)}(\cos \theta) + D \left(\frac{r}{R}\right)^2 P_2(\cos \theta) .$$

e.4.27.

$$1. C - \frac{1}{2r^2} \sin \theta \sin \left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right), \text{ kde } C \text{ je libovolná konstanta.}$$

$$2. \left[\frac{2}{15} r^{-4} P_3^{(1)}(\cos \theta) + \frac{1}{5} r^{-2} P_1^{(1)}(\cos \theta) \right] \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) .$$

Návod:

$$u|_{r=1} = \left[\frac{2}{15} P_3^{(1)}(\cos \theta) + \frac{2}{3} P_1^{(1)}(\cos \theta) \right] \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) .$$

e.4.28.

$$1. R^5 r^{-5} \sin^3 \theta \cos \theta \cos \left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right) .$$

$$2. \left(\frac{R}{r}\right)^{101} \sin 100\varphi \sin^{100} \theta .$$

$$3. \left[\frac{R}{2+R} \left(\frac{R}{r}\right)^2 P_1^{(1)}(\cos \theta) + \frac{R}{6(R+3)} \left(\frac{R}{r}\right)^3 P_2^{(1)}(\cos \theta) \right] \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) ,$$

Návod:

$$(u - u_r)|_{r=R} = \left[\frac{1}{2} P_1^{(1)}(\cos \theta) + \frac{1}{6} P_2^{(1)}(\cos \theta) \right] \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) .$$

Řešení hledejte ve tvaru

$$u = \left[A \left(\frac{R}{r}\right)^2 P_1^{(1)}(\cos \theta) + B \left(\frac{R}{r}\right)^3 P_2^{(1)}(\cos \theta) \right] \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) .$$

e.4.29.

$$1. \frac{1}{7} \left(-r + \frac{8}{r^2}\right) \sin \varphi \sin \theta .$$

$$2. \frac{12}{7} (r - r^{-2}) \cos \theta + \left(\frac{96}{31r^3} - \frac{3r^2}{31}\right) \sin 2\varphi \sin^2 \theta .$$

$$3. 4(r - r^{-2}) \cos \theta + (8r^{-2} - r) \sin \theta \cos \varphi .$$

$$4. (14 - 12r^{-1}) P_0(\cos \theta) + r^2 (1 - 3\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \sin 2\varphi) .$$

$$5. \frac{12}{7} \cos \varphi \sin \theta \left(\frac{4}{r^2} - \frac{r}{2}\right) + \frac{12}{31} \left(\frac{8}{r^3} - \frac{r^2}{4}\right) \cos \varphi \sin 2\theta .$$

$$6. \left[\left(\frac{8}{31} \cos 2\varphi - \frac{1}{31} \sin 2\varphi\right) r^2 + \frac{1}{r^3} \left(-\frac{8}{31} \cos 2\varphi + \frac{32}{31} \sin 2\varphi\right) \right] \sin^2 \theta .$$

$$7. \left[r^2 \left(\frac{-1}{31} \cos \varphi + \frac{8}{31} \sin \varphi\right) + r^{-3} \left(\frac{32}{31} \cos \varphi - \frac{8}{31} \sin \varphi\right) \right] \sin 2\theta .$$

$$8. \left(\frac{32}{r^3} - r^2\right) \sin 2\theta \sin \varphi + (8r^2 - 8r^{-3}) \sin^2 \theta \cos 2\varphi .$$

$$9. \frac{1}{7} \left(\frac{8}{r^2} - r\right) \cos \theta + \frac{32}{127} (r^3 - r^{-4}) \frac{12 \sin \theta - 15 \sin^3 \theta}{2} \cos \varphi .$$

e.4.30.

$$1. (4r^{-2} - r) \cos \theta + (r^2 - 32r^{-3}) \sin^2 \theta \sin 2\varphi .$$

$$2. (r + 4r^{-2}) \sin \theta \sin \varphi + 3r^2 \sin 2\theta \sin \varphi .$$

$$3. 1 + \frac{12}{5} (r - r^{-2}) P_1^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi + \frac{16}{97} (r^3 - r^{-4}) \cos \varphi P_3^{(1)}(\cos \theta) + \\ + \frac{4}{97} (r^3 - r^{-4}) \sin 2\varphi P_3^{(2)}(\cos \theta) .$$

Návod:

$$u_r|_{r=2} = 2P_3^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi + \frac{1}{2} P_3^{(2)}(\cos \theta) \sin 2\varphi + 3P_1^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi .$$

Hledejte řešení ve tvaru

$$u = (ar + br^{-2}) \sin \theta \cos \varphi + C + dr^{-1} + (fr^3 + hr^{-4}) P_3^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi + \\ + (lr^3 + mr^{-4}) P_3^{(2)}(\cos \theta) \sin 2\varphi .$$

e.4.31.

$$1. \quad 4 - 2r^{-1} + \frac{2}{31}(r^{-3} - 32r^2)P_2(\cos\theta) + \frac{1}{31}\left(32r^2 - \frac{1}{r^3}\right)P_2^{(2)}(\cos\theta)\cos 2\varphi.$$

Návod:

$$u|_{r=1} = 2 - 2P_2(\cos\theta) + P_2^{(2)}(\cos\theta)\cos 2\varphi.$$

$$2. \quad \frac{12}{7}(r^{-2} - r)\cos\theta + \frac{8}{127}(r^{-4} - r^3)P_3^{(2)}(\cos\theta)\cos 2\varphi + \frac{48}{127} \times$$

$$\times (r^3 - r^{-4})P_3(\cos\theta).$$

Návod:

$$u|_{r=1/2} = -6P_3(\cos\theta) + 6P_1(\cos\theta) + P_3^{(2)}(\cos\theta)\cos 2\varphi.$$

Řešení hledejte ve tvaru

$$u = (ar + br^{-2})P_1(\cos\theta) + (cr^3 + dr^{-4})P_3^{(2)}(\cos\theta)\cos 2\varphi +$$

$$+ (gr^3 + hr^{-4})P_3(\cos\theta).$$

e.5. METODA GREENOVY FUNKCE

Pokud nebude řečeno jinak, budeme vždy pod Greenovou funkcí rozumět Greenovu funkci pro Dirichletovu úlohu v dané oblasti.

CVIČENÍ

e.5.1.

Sestrojte Greenovu funkci pro následující oblasti v R_3 :

1. Poloprostor $x_3 > 0$
2. Průnik poloprostorů $x_3 > 0$ a $x_2 > 0$.
3. Oktant $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$.

e.5.2.

Sestrojte Greenovu funkci pro následující oblasti v R_3 :

1. Koule $|x| < R$.
2. Polokoule $|x| < R, x_3 > 0$.
3. Čtvrtkoule $|x| < R, x_2 > 0, x_3 > 0$.
4. Osmina koule $|x| < R, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$.

e.5.3.

Užitím metody odrazů sestrojte Greenovu funkci pro část prostoru, danou vztahem $0 < x_3 < 1$.

e.5.4.

Nalezněte řešení Dirichletovy úlohy

$$\Delta u = -f(x), x_3 > 0; u|_{x_3=0} = u_0(x)$$

pro následující f a u_0 :

1. f, u_0 jsou spojitě a omezené.
2. $f=0, u_0 = \cos x_1 \cos x_2$.
3. $f = \exp(-x_3) \cdot \sin x_1 \cdot \cos x_2$.
4. $f = 0, u_0 = \theta(x_2 - x_1)$.
5. $f = 0, u_0 = (1 + x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}$.
6. $f = 2[x_1^2 + x_2^2 + (x_3+1)^2]^{-2}, u_0 = (1 + x_1^2 + x_2^2)^{-1}$.

e.5.5.

Nalezněte řešení Dirichletovy úlohy

$$\Delta u = 0, x_2 > 0, x_3 > 0, u|_S = u_0(x),$$

(u_0 je po částech spojitá a omezená).

e.5.6.

Řešte úlohu e.5.5. s následujícími funkcemi u_0 :

1. $u_0|_{x_2=0} = 0, u_0|_{x_3=0} = e^{-4x_1} \sin 5x_2.$
2. $u_0|_{x_2=0} = 0, u_0|_{x_3=0} = x_2 (1 + x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}$
3. $u_0|_{x_2=0} = 0, u_0|_{x_3=0} = \theta(x_2 - |x_1|).$

e.5.7.

Nalezněte řešení Dirichletovy úlohy pro kouli $|x| < R$:

$$\Delta u = -f(x), |x| < R, u|_{|x|=R} = u_0(x).$$

e.5.8.

Řešte úlohu e.5.7. pro následující f a u_0 :

1. $f = a = \text{const}, u_0 = 0.$
2. $f = |x|^n, n=0,1,2, \dots, u_0 = a.$
3. $f = e^{|x|}, u_0 = 0.$

e.5.9.

Řešte Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu rovnici v polokouli $|x| < R, x_3 > 0.$

e.5.10.

Nalezněte řešení Poissonovy rovnice $\Delta u = -f(|x|)$, $f \in C(a \leq |x| \leq b)$ v kulové vrstvě $a < |x| < b$, splňující okrajové podmínky

$$u|_{|x|=a} = 1, u|_{|x|=b} = 0.$$

Poznámka

Greenova funkce Dirichletovy úlohy pro dvojrozměrnou oblast Ω má tvar

$$G(z, \xi) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|z - \xi|} + g(z, \xi),$$

kde $z = x + iy \in \overline{\Omega}, \xi = \xi + i\eta \in \Omega;$

Řešení Dirichletovy úlohy /pokud existuje/ má stejný tvar, jako v případě úlohy troj a vícerozměrné - tj. jde-li o rovnici Poissonovu, dostáváme

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(z, \xi)}{\partial n} u_0(\xi) ds_\xi + \int_{\Omega} G(z, \xi) f(\xi) d\xi.$$

V případě, že oblast Ω je jednoduše souvislá a má dosti hladkou hranici $\partial\Omega$ a že známe nějakou funkci $w = w(z)$, která zobrazuje konformně Ω na jednotkový kruh $|w| < 1$, lze vypočítat Greenovu funkci ze vzorců

$$G(z, \xi) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|\omega(z, \xi)|}, \omega(z, \xi) = \frac{w(z) - w(\xi)}{1 - \overline{w(z)} w(\xi)}.$$

e.5.11.

Nalezněte Greenovu funkci pro oblasti:

1. Polerovina $\text{Im } z > 0.$
2. Kvadrant $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}.$
3. Kruh $|z| < R.$
4. Půlkruh $|z| < R, \text{Im } z > 0.$
5. Čtvrtkruh $|z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}.$
6. Pás $0 < \text{Im } z < \pi.$
7. Množina $0 < \text{Im } z < \pi, \text{Re } z > 0.$

e.5.12.

Nalezněte řešení Dirichletovy úlohy

$$\Delta u = 0, y > 0; u|_{y=0} = u_0(x)$$

pro následující funkce $u_0(x)$:

1. $u_0(x)$ je po částech spojitá a omezená.

$$2. u_0(x) = \Theta(x-a).$$

$$3. u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle \\ 0 & \text{pro } x \notin \langle a, b \rangle. \end{cases}$$

$$4. u_0(x) = (1 + x^2)^{-1}.$$

$$5. u_0(x) = x(1 + x^2)^{-1}.$$

$$6. u_0(x) = \frac{x^2 - 1}{(1 + x^2)^2}.$$

$$7. u_0(x) = \cos x.$$

e.5.13.

Nalezněte řešení rovnice $\Delta u = 0$ v prvním kvadrantu $x > 0, y > 0$ s následujícími okrajovými podmínkami:

1. $u|_S = u_0(x, y)$ je po částech spojitá omezená funkce.

S je hranice kvadrantu, skládající se z polopřímek $\{x = 0, y \geq 0\}$ a $\{y = 0, x \geq 0\}$.

$$2. u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = 1.$$

$$3. u|_{x=0} = a, u|_{y=0} = b.$$

$$4. u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = \Theta(x-1).$$

$$5. u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

$$6. u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = \frac{x}{(1 + x^2)^2}.$$

$$7. u|_{x=0} = \sin y, u|_{y=0} = \sin x.$$

e.5.14.

Nalezněte řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici v pásu $0 < y < \pi$ s následujícími okrajovými podmínkami:

1. $u|_S = u_0(x)$, kde u_0 je po částech spojitá a omezená funkce, $/S$ je hranice pásu/.

$$2. u|_{y=0} = \Theta(x), u|_{y=\pi} = 0.$$

$$3. u|_{y=0} = \Theta(x), u|_{y=\pi} = \Theta(x).$$

$$4. u|_{y=0} = \Theta(x), u|_{y=\pi} = -\Theta(x).$$

$$5. u|_{y=0} = \Theta(x), u|_{y=\pi} = \Theta(-x).$$

$$6. u|_{y=0} = \cos x, u|_{y=\pi} = 0.$$

e.5.15.

Nalezněte řešení rovnice $\Delta u = 0$ v polopásmu $0 < y < \pi, x > 0$ s následujícími okrajovými podmínkami:

$$1. u|_{x=0} = 1, u|_{y=0} = 0, u|_{y=\pi} = 0.$$

$$2. u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = \sin x, u|_{y=\pi} = 0.$$

$$3. u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = \operatorname{th} x, u|_{y=\pi} = \operatorname{th} x.$$

$$4. u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = 0, u|_{y=\pi} = \operatorname{th} x.$$

e.5.16.

Nalezněte řešení Poissonovy rovnice $\Delta u = -f(z)$ v kruhu $|z| < R$ při okrajové podmínce $u|_{|z|=R} = u_0(z)$ pro následující funkce f a u_0 :

1. f, u_0 jsou spojitě funkce.

2. $f=a, u_0=b$.

3. $f = |z|^n, n=1,2, \dots, u_0 = 0$.

4. $f = \sin z, u_0 = 0$.

5. $f = 0, u_0 = \cos \varphi$, kde $\varphi = \arg z$.

e.5.17.

Nalezněte řešení Laplaceovy rovnice v půlkruhu $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$, za podmínky $u|_S = u_0(z)$, kde S je hranice půlkruhu, pro následující funkce $u_0(z)$:

1. $u_0(z)$ je po částech spojitá funkce.

$$2. u_0|_{r=1} = \sin \varphi, u_0|_{\varphi=0} = 0, u_0|_{\varphi=\pi} = 0 \text{ zde } r = |z|$$

a $\varphi = \arg z$;

$$3. u_0|_{r=1} = 0, u_0|_{\varphi=0} = 1, u_0|_{\varphi=\pi} = 1.$$

$$4. u_0|_{r=1} = \cos \frac{\varphi}{2}, u_0|_{\varphi=0} = \sqrt{r}, u_0|_{\varphi=\pi} = 0.$$

e.5.18.

Řešte Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu rovnici na množině $\text{Re } z > 0, |z-5| > 3$; $u|_{\text{Re } z=0} = 0, u|_{|z-5|=3} = 1$.

ŘEŠENÍ

V řešeních úloh e.5.1. - e.5.10. zavedeme označení:

$$y_{mnk} = ((-1)^m y_1, (-1)^n y_2, (-1)^k y_3).$$

e.5.1.

$$1. \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^1 \frac{(-1)^k}{|x - y_{00k}|}.$$

$$2. \frac{1}{4\pi} \sum_{n,k=0}^1 \frac{(-1)^{n+k}}{|x - y_{onk}|}.$$

$$3. \frac{1}{4\pi} \sum_{m,n,k=0}^1 \frac{(-1)^{m+n+k}}{|x - y_{mnk}|}.$$

e.5.2.

Označíme $y' = \frac{R^2}{|y|^2} y, |y'| |y| = R^2$ a analogicky y'_{mnk} .

$$1. \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x - y|} - \frac{R}{|y| |x - y'|} \right).$$

$$2. \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \left(\frac{1}{|x - y_{00k}|} - \frac{R}{|y| |x - y'_{00k}|} \right).$$

$$3. \frac{1}{4\pi} \sum_{n,k=0}^1 (-1)^{n+k} \left(\frac{1}{|x - y_{onk}|} - \frac{R}{|y| |x - y'_{onk}|} \right).$$

$$4. \frac{1}{4\pi} \sum_{m,n,k=0}^1 (-1)^{m+n+k} \left(\frac{1}{|x - y_{mnk}|} - \frac{R}{|y| |x - y'_{mnk}|} \right).$$

e.5.3.

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + [x_3 - (2n + y_3)]^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + [x_3 - (2n - y_3)]^2}}.$$

Návod k úloze e.5.4. a k dalším: Uvažte, že v případě, kdy funkce u_0 a f jsou po částech spojité a omezené a kdy hranice, na níž je zadána Dirichletova podmínka, je po částech hladká, může být Dirichletova úloha zobecněna takovým způsobem, že vyjádření jejího řešení prostřednictvím Greenovy funkce zůstane stejné, jako v případě, kdy data úlohy jsou spojitá (u_0, f) a hladká (hranice oblasti).

e.5.4.

$$1. \frac{x_3}{2\pi} \int_{y_3=0} \frac{u_0(y)}{|x-y|^3} dS_y + \int_{y_3>0} f(y) \left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y_{001}|} \right) dy.$$

$$2. e^{-\sqrt{2}x_3} \cos x_1 \cos x_2.$$

$$3. (e^{-\sqrt{2}x_3} - e^{-x_3}) \sin x_1 \cos x_2.$$

$$4. \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}x_3}.$$

$$5. [x_1^2 + x_2^2 + (x_3+1)^2]^{-1/2}.$$

$$6. [x_1^2 + x_2^2 + (x_3+1)^2]^{-1}.$$

e.5.5.

$$\frac{x_2}{2\pi} \int_{y_2=0, y_3 \geq 0} u_0(y) \left(\frac{1}{|x-y|^3} - \frac{1}{|x-y_{001}|^3} \right) dS_y +$$

$$+ \frac{x_3}{2\pi} \int_{y_2 \geq 0, y_3=0} u_0(y) \left(\frac{1}{|x-y|^3} - \frac{1}{|x-y_{010}|^3} \right) dS_y.$$

e.5.6.

1. $e^{-4x_1 - 3x_3} \sin 5x_2.$

2. $x_2 \left[x_1^2 + x_2^2 + (x_3+1)^2 \right]^{-3/2}.$

3. $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_2 + x_1}{x_3 \sqrt{2}} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_2 - x_1}{x_3 \sqrt{2}}.$

e.5.7.

$$\frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^3} u_0(y) dS_y + \frac{1}{4\pi} \int_{|y| \leq R} \left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{R}{|y| |x-y|} \right) f(y) dy.$$

e.5.8.

1. $\frac{a}{6} (R^2 - |x|^2).$

2. $a + \frac{R^{n+2} - |x|^{n+2}}{(n+2)(n+3)}.$

3. $e^R - e^{|x|} - \frac{2}{R} (e^R - 1) + \frac{2}{|x|} (e^{|x|} - 1).$

e.5.9.

$$\frac{x_3}{2\pi} \int_{|y| \leq R, y_3=0} u_0(y_1, y_2) \left(\frac{1}{|x-y|^3} - \frac{R^3}{|y|^3 |x-y'|^3} \right) dy_1 dy_2 +$$

$$+ \frac{R^2 - |x|^2}{4\pi R} \int_{|y|=R, y_3 > 0} u_0(y) \left(\frac{1}{|x-y|^3} - \frac{1}{|x-y''|^3} \right) dS_y.$$

kde $|x| < R, x_3 > 0$ a y', y'' jsou body symetrické k bodu y vzhledem ke sféře $|y| = R$ a rovině $y_3=0$.

e.5.10.

$$\frac{a(b-|x|)}{|x|(b-a)} - \frac{1}{|x|} \int_0^x (|x| - \varrho) \varrho f(\varrho) d\varrho + \frac{b-|x|}{|x|(b-a)} \int_0^a (a - \varrho) \varrho f(\varrho) d\varrho -$$

$$- \frac{a-|x|}{|x|(b-a)} \int_0^b (b - \varrho) \varrho f(\varrho) d\varrho.$$

e.5.11.

1. $\frac{1}{2\pi} \log \frac{|z - \bar{\xi}|}{|z - \xi|}$, kde $z = x + iy, \xi = \xi + i\eta.$

2. $\frac{1}{2\pi} \log \frac{|z^2 - \bar{\xi}^2|}{|z^2 - \xi^2|}.$

3. $\frac{1}{2\pi} \log \frac{|R^2 - z\bar{\xi}|}{R |z - \xi|}.$

4. $\frac{1}{2\pi} \log \frac{|z - \bar{\xi}| |R^2 - z\bar{\xi}|}{|z - \xi| |R^2 - z\xi|}.$

5. $\frac{1}{2\pi} \log \frac{|z^2 - \bar{\xi}^2| |R^4 - (z\bar{\xi})^2|}{|z^2 - \xi^2| |R^4 - (z\xi)^2|}.$

6. $\frac{1}{2\pi} \log \frac{|e^z - e^{\bar{\xi}}|}{|e^z - e^{\xi}|}.$

7. $\frac{1}{2\pi} \log \frac{|\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \bar{\xi}|}{|\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \xi|}.$

e.5.12.

/řešení příkladu je na konci odstavce/

e.5.13.

$$1. \frac{y}{\pi} \int_0^\infty u_0(\xi, 0) \left[\frac{1}{(x-\xi)^2 + y^2} - \frac{1}{(x+\xi)^2 + y^2} \right] d\xi + \\ + \frac{x}{\pi} \int_0^\infty u_0(0, \eta) \left[\frac{1}{x^2 + (y-\eta)^2} - \frac{1}{x^2 + (y+\eta)^2} \right] d\eta.$$

$$2. \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

$$3. \frac{2}{\pi} \left(a \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + b \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right).$$

$$4. \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y^2 - x^2 + 1}{2xy}.$$

$$5. \frac{x^2 + y^2 + y}{x^2 + (y+1)^2}.$$

$$6. \frac{x(y+1)}{[x^2 + (y+1)^2]^2}.$$

$$7. e^{-y} \sin x + e^{-x} \sin y.$$

e.5.14.

$$1. \sum_{k=0}^1 \frac{1}{\pi} e^3 \sin y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi, k\pi) e^{-\xi}}{e^{2(x-\xi)} - 2e^{x-\xi} \cos(y-k\pi) + 1} d\xi.$$

$$2. \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{-x} - \cos y}{\sin y}.$$

$$3. \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} x}{\sin y}.$$

$$4. \frac{1}{2} \operatorname{sign} \left(\frac{\pi}{2} - y \right) - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{-2x} + \cos 2y}{\sin 2y}.$$

$$5. \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{tg} y}.$$

$$6. \frac{\cos x \operatorname{sh}(\pi-y)}{\operatorname{sh} \pi}.$$

e.5.15.

$$1. \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin^2 y - \operatorname{sh}^2 x}{2 \sin y \operatorname{sh} x}.$$

$$2. \frac{\sin x \operatorname{sh}(\pi-y)}{\operatorname{sh} \pi}.$$

$$3. \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + \sin y}.$$

$$4. \frac{x \sin 2y + y \operatorname{sh} 2x - \pi \sin y \operatorname{sh} x}{\pi (\operatorname{ch} 2x + \cos 2y)}.$$

e.5.16.

$$1. \frac{1}{2\pi R} \int_{|\xi|=R} u_0(\xi) \frac{R^2 - |z|^2}{|z - \xi|^2} dS + \frac{1}{2\pi} r(\xi) \log \frac{|\xi| |z - \xi^*|}{R |z - \xi|} d\xi d\eta,$$

$$\text{kde } z = x+iy, \xi = \xi + i\eta, \xi^* = \xi \frac{R^2}{|\xi|^2}.$$

Návod k úlohám 2. - 4.: Užijte formule z řešení úlohy

e.5.16.1, v níž přejdete k polárním souřadnicím

$$z = re^{i\varphi}, \xi = \rho e^{i\theta}, 0 < \varphi, \theta < 2\pi.$$

$$2. \frac{a}{4} (R^2 - r^2) + b.$$

$$3. \frac{R^{n+2} - r^{n+2}}{(n+2)^2}.$$

$$4. \sin r - \sin R + \int_r^R \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi.$$

$$5. \frac{r}{R} \cos \varphi.$$

Příklad 2. Fourierova metoda pro rovnice s pravou stranou.
Buď $\Omega = (0, 2) \subset \mathbb{R}_1$. Řešte rovnici

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t x, \quad x \in (0, 2) \quad t > 0$$

s počáteční podmínkou

$$(6) \quad u(x, 0) = 0 \quad x \in (0, 2)$$

a s okrajovými podmínkami (3), tj.

$$u(t, 0) = u(t, 2) = 0.$$

Řešení. Pokusíme se rozvinout řešení úlohy (5), (6), (7) do řady podle vlastních funkcí úlohy (4), tj. hledáme $u(t, x)$ ve tvaru

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) v_n(x),$$

$$\text{kde } v_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{2}.$$

Jestliže rovněž pravou stranu $f(t, x) = tx$ rozvineme pro každé t ve Fourierovu řadu, tj. píšeme

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{\pi^2 n^2} t.$$

dostaneme porovnáním koeficientů v rozvoji obyčejnou diferenciální rovnici pro c_n :

$$(7) \quad c_n'(t) + \frac{\pi^2 n^2}{4} c_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2} 4 t, \quad n = 1, 2, \dots$$

s počátečními podmínkami

$$(8) \quad c_n(0) = 0$$

/které dostaneme rozvojem počáteční podmínky (2)/. Odsud dostaneme formální řešení úlohy (5), (6), (3)

$$u(t, x) = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left[\frac{4}{\pi^2 n^2} (1 - e^{-\frac{\pi^2 n^2}{4} t}) - t \right] \sin \frac{\pi n x}{2},$$

resp. po částečném sečtení

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{16}{\pi^5 n^5} (-1)^{n+1} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{4} t} \sin \frac{\pi n x}{2} \right) + \frac{t}{12} x (4 - x^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 (-1)^n}{\pi^5 n^5} \sin \frac{\pi n x}{2}.$$

Přesvědčete se, že tato funkce je i klasickým řešením!

Poznamenejme, že Fourierova metoda je použitelná i pro jiné okrajové úlohy, ale zásadně jen pro homogenní /nulové/ okrajové podmínky. Úlohu s nehomogenními okrajovými podmínkami lze převést na úlohu s nulou na hranici, jestliže se nám podaří najít funkci u_0 , řešící danou rovnici s danou okrajovou podmínkou, bez ohledu na podmínku počáteční. Pak můžeme Fourierovou metodou hledat funkci $v = u - u_0$. Rovněž funkci u_0 můžeme někdy hledat ve tvaru součtu $u_0 = u_1 + u_2$, kde u_1 vyhovuje okrajové podmínce, zatímco u_2 splňuje homogenní okrajovou podmínku a nějakou pozměněnou rovnici /rovnici s vhodnou pravou stranou/. Podobná situace je rozebrána v kapitole h.

Cvičení

p.2.1 Je dána tenká homogenní tyč délky l , izolovaná od okolí, jejíž počáteční teplota je rovna

$$f(x) = \frac{c x (l - x)}{l^2}.$$

Konce tyče jsou udržovány na nulové teplotě. Nalezněte teplotu v čase $t > 0$. /Rovnice pro vedení tepla viz kapitola f/.

p.2.2 Rozpustná látka s počáteční koncentrací c_0 difunduje z roztoku, uzavřeného mezi rovinami $x = 0$, $x = h$, do rozpouštědla, které se nachází mezi rovinami $x = h$, $x = l$, s koeficientem difuze D . Určete proces vyrovnávání koncentrace, jestliže roviny $x = 0$, $x = l$ jsou nepropustné.

p.2.3 Je dána koule o poloměru R , jejíž střed se nachází v počátku souřadnic. Víme, že počáteční teplota $f = f(r)$ závisí

pouze na vzdálenosti z bodu x od středu koule. Povrch koule udržujeme na nulové teplotě. Určete teplotu libovolného bodu v čase $t > 0$. /V rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

zaveďte polární souřadnice a položte $v = r u$.

p.2.4 Řešte rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad t > 0, x \in (0, l)$$

s podmínkami

$$u(0, x) = \varphi(x), u(t, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) + H u(t, l) = 0 \quad (H > 0).$$

p.2.5 Řešte předchozí úlohu s okrajovými podmínkami

$$\frac{\partial u}{\partial x} - H u \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x} + H u \Big|_{x=l} = 0.$$

p.2.6 Nalezněte rozdělení teploty v tyči $0 < x < l$ /s tepelně izolovanými boky/, jestliže na konci $x = 0$ je udržována nulová teplota a na konci $x = l$ se teplota mění podle vztahu

$$u(l, t) = A t, A \text{ konstantní } (0 < t < +\infty). \text{ Počáteční teplota tyče je rovna nule.}$$

p.2.7 Nalezněte teplotu tyče $0 \leq x \leq l$ s tepelně izolovanými boky, jestliže v tyči jsou spojitě rozloženy tepelné zdroje s hustotou $\phi(t) \sin \frac{\pi x}{l}$, počáteční teplota tyče je rovna dané /libovolné/ funkci f , a teplota na koncích je udržována na nule. /Návod: hledejte partikulární řešení rovnice s pravou stranou ve tvaru $\varphi(t) \sin \frac{\pi x}{l}$, kde φ je neznámá funkce./

p.2.8 Nalezněte řešení úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x \in (-\pi l, \pi l), t > 0$$

s okrajovými podmínkami $u(t, -\pi l) = u(t, \pi l) = 0 \quad (t > 0)$ a s počáteční podmínkou $u(0, x) = 0$ pro $|x| > h$, $u(0, x) = \frac{1}{2h}$ pro $|x| < h$.

V jakém smyslu je splněna okrajová podmínka?

p.2.9 Řešte úlohu p.2.6, jestliže teplota na konci $x = l$ se mění podle vztahu $u(t, l) = A \sin \omega t$.

p.2.10 Nalezněte řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

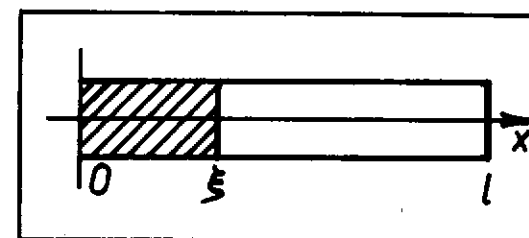
s počáteční podmínkou $u(0, x) = 0$ a s okrajovými podmínkami

$$u(t, 0) = A(1 - e^{\alpha t}), \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) + H u(t, l) = 0,$$

kde $A, H > 0$ a $\alpha > 0$ jsou konstanty.

p.2.11 Je dána neomezená deska tloušťky $2R$ s počáteční teplotou, rovnou nule. Deska je z obou stran stejně zahřívána konstantním proudem tepla q . Nalezněte rozdělení teploty podél tloušťky desky v libovolném okamžiku $t > 0$.

p.2.12 Je dána tenká tyč délky l , sestavená ze dvou částí z různého materiálu /viz obr./ Konec $x = 0$ tyče je udržován



na konstantní teplotě u_0 , konec $x = l$ na nulové teplotě. Počáteční teplota obou částí je nulová. Určete rozdělení teploty v libovolném čase $t > 0$.

Následující úlohy vyžadují užití Besselových funkcí.

p.2.13 Nalezněte rozložení teploty uvnitř nekonečného kruhového válce o poloměru R , jestliže počáteční teplota je rovna

$$u \Big|_{t=0} = u_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

a teplota pláště je udržována na nule.

p.2.14 Určete radiální rozložení teploty ve válci z úlohy p.2.13, jestliže počáteční teplota je rovna nule a teplota pláště je udržována na konstantní teplotě u_0 .

p.2.15 Difuzním prostředím je válec o poloměru R , na jehož povrchu je udržována konstantní koncentrace C_1 . V čase t_0 je koncentrace látky uvnitř válce nulová. Určete množství Q látky, které proniklo do úseku válce jednotkové délky v čase t .

p.2.16 Je dán neomezený válec o poloměru R , jehož počáteční teplota je rovna nule. Na plášti dochází k vyzařování tepla do okolí, jehož teplota je rovna nule. Určete rozdělení teploty uvnitř válce v čase $t > 0$.

ŘEŠENÍ A NÁVODY

p.2.1
$$u(t, x) = \frac{8c}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

p.2.2
$$C(x, t) = C_0 \left[\frac{h}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi h}{l}}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt} \cos \frac{n\pi x}{l} \right].$$

Řešíme rovnici

$$\frac{\partial c}{\partial t} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

s podmínkami

$$\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, c(x, 0) = c_0 \quad 0 < x < h$$

$$= 0 \quad h < x < l$$

p.2.3

$$u(r, t) = \frac{2}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{R^2}} \sin \frac{n\pi r}{R} \int_0^R \varphi(\rho) \frac{n\pi \rho}{R} d\rho.$$

p.2.4

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2 + \mu_n^2}{p(p+1) + \mu_n^2} e^{-\frac{\mu_n^2 t}{l^2}} \sin \frac{\mu_n x}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\mu_n x}{l} dx,$$

kde $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ jsou kladné kořeny transcendentní rovnice

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{p}, p = Hl > 0$$

p.2.5

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{\mu_n^2 t}{l^2}} \frac{\mu_n \cos \frac{\mu_n x}{l} + p \sin \frac{\mu_n x}{l}}{p(p+2) + \mu_n^2},$$

kde

$$A_n = \int_0^l \varphi(z) \left(\mu_n \cos \frac{\mu_n z}{l} + p \sin \frac{\mu_n z}{l} \right) dz$$

a $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ jsou kladné kořeny rovnice

$$2 \cotg \mu = \frac{\mu}{p} - \frac{p}{\mu}, p = Hl$$

p.2.6

$$u(x, t) = \frac{A}{l} x t + \frac{Ax}{6a^2 l} (x^2 - l^2) + v(x, t), \quad 0 < x < l$$

$$0 < t < \infty,$$

$$\text{kde } v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$a_n = -\frac{A}{3l^2 a^2} \int_0^l z (z^2 - l^2) \sin \frac{n\pi z}{l} dz$$

/Řešíme úlohu $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $0 < t < \infty$; $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = At$, $0 < t < \infty$; $u(x, 0) = 0$, $0 < x < l$./

p.2.7

$$u(x, t) = \left(\int_0^t \phi(\tau) e^{-\frac{\pi^2 a^2}{l^2} (t-\tau)} d\tau \right) \sin \frac{\pi x}{l} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty$$

p.2.8

$$u(t, x) = \frac{1}{\pi h} \left(\frac{h}{2l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n h}{l}}{n} e^{-\frac{n^2 a^2}{l^2} t} \cos \frac{n x}{l} \right).$$

Pro $x \neq \pm h$ platí $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = u(0, x)$, limita je stejnoměrná

všude kromě /libovolně malých/ okolí bodů $x = \pm h$; rovněž platí

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-l\pi}^{l\pi} |u(t, x) - u(0, x)| dx = 0.$$

p.2.9

$$u(t, x) = A \frac{x}{l} \sin \omega t + \frac{2\omega A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}}{n} \int_0^t e^{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \tau} \cos \omega \tau d\tau.$$

Návod: hledejte řešení ve tvaru

$$u(t, x) = \frac{Ax}{l} \sin \omega t + v(t, x),$$

kde v řeší rovnici

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{A\omega x}{l} \cos \omega t$$

s homogenními počátečními i okrajovými podmínkami.

p.2.10

$$u(t, x) = A \left(1 - e^{-\alpha t} \right) \left(1 - \frac{Hx}{1+p} \right) + 2A\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \frac{p^2 + \mu_n^2}{p(p+1) + \mu_n^2} \frac{l^2}{a^2 \mu_n^2 - \alpha l^2} x \left[e^{-\left(\frac{\alpha \mu_n}{l}\right)^2 t} - e^{-\alpha t} \right] \sin \frac{\mu_n x}{l},$$

kde μ_j jsou kladná řešení rovnice

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{p} \quad (p = Hl > 0).$$

Hledejte řešení ve tvaru

$$u(x, t) = A \left(1 - e^{-\alpha t} \right) \left(1 - \frac{Hx}{1+p} \right) + w,$$

kde w řeší rovnici

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A\alpha e^{-\alpha t} \left(1 - \frac{Hx}{1+p} \right),$$

a splňuje podmínky

$$w(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + Hw \Big|_{x=l} = 0, \quad w \Big|_{t=0} = 0.$$

p.2.11

$$u(t, x) = \frac{a^2 q}{kR} \left(t - \frac{R^2 - 3x^2}{6a^2} \right) - \frac{2qR}{k\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{R} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{R^2} t},$$

kde k je vnitřní koeficient tepelné vodivosti.

Úloha vede na řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

s podmínkami

$$k \frac{\partial u}{\partial x} + q \Big|_{x=-R} = 0, \quad -k \frac{\partial u}{\partial x} + q \Big|_{x=R} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} (t, 0) = 0, \quad u(0, x) = 0.$$

p.2.12

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_1 a_1 u_0 A_j^2}{\mu_j} \left(1 - e^{-\mu_j^2 t} \right) \sin a_1 \mu_j x \quad (0 < x < \xi),$$

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_1 a_1 u_0 A_j^2}{\mu_j} \left(1 - e^{-\mu_j^2 t} \right) \frac{\sin a_1 \mu_j \xi}{\sin a_2 \mu_j (l - \xi)} x \sin a_2 \mu_j (l - x) \quad (\xi < x < l),$$

kde μ_j jsou kořeny rovnice

$$a_1 k_1 \cotg \mu a_1 \xi + a_2 k_2 \cotg a_2 (\ell - \xi) \mu = 0,$$

a A_j určíme z podmínky

$$c_1 \vartheta_1 \int_0^{\xi} x_{1j}^2 dx + c_2 \vartheta_2 \int_{\xi}^{\ell} x_{2j}^2 dx = 1,$$

$$x_{1j} = A_j \sin a_1 \mu_j x$$

$$x_{2j} = A_j \frac{\sin a_1 \mu_j \xi}{\sin a_2 \mu_j (\ell - \xi)} \sin a_2 \mu_j (\ell - x).$$

Úloha vede na rovnice

$$a_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi$$

$$a_2^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \xi < x < \ell,$$

$$a_i^2 = \frac{c_i \vartheta_i}{k_i} \quad (i = 1, 2),$$

s podmínkami

$$u(t, 0) = u_0, \quad u(t, \ell) = 0, \quad u(0, x) = 0$$

/okrajové a počáteční podmínky/

$$a \quad u(t, \xi - 0) = u(t, \xi + 0), \quad k_1 \frac{\partial u(t, \xi - 0)}{\partial x} = \frac{\partial u(t, \xi + 0)}{\partial x}$$

/podmínky přechodu/.

p.2.13

$$u(r, t) = 8 \cdot u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} e^{-\frac{\mu_n^2 a^2}{R^2} t},$$

kde $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ jsou kladné kořeny rovnice $J_0(\mu) = 0$.

/Při výpočtu koeficientů užíjte formulek z kapitoly m./

p.2.14

$$u(r, t) = u_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n J_0'(\mu_n)} e^{-\frac{\mu_n^2 a^2}{R^2} t} \right],$$

$$\mu_1 > 0, \quad J_0(\mu_1) = 0.$$

/Řešíme rovnici $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$ s podmínkami

$$u(t, R) = u_0, \quad u(t, 0) \text{ je omezená}, \quad u(0, r) = 0.$$

p.2.15

$$Q(t) = 2\pi \int_0^R c r dr = \pi R^2 c_1 \left(1 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} e^{-\frac{\mu_n^2}{R^2} Dt} \right),$$

kde μ_1 jsou kladné kořeny rovnice $J_0(\mu) = 0$.

/Viz úloha p.2.14./

p.2.16 $u(t, r) =$

$$= \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2}{\mu_n^2 + H^2 R^2} e^{-\frac{\mu_n^2 a^2}{R^2} t} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{J_0'(\mu_n)} \int_0^R f(\varrho) J_0\left(\frac{\mu_n \varrho}{R}\right) d\varrho,$$

kde μ_1 jsou kladné kořeny rovnice

$$\mu J_0'(\mu) + H R J_0(\mu) = 0.$$

/Řešíme úlohu $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$, $u(t, 0)$ je konečné,

$$\frac{\partial u}{\partial r} + H u|_{r=R} = 0, \quad u(0, r) = f(r).$$

p.3. Metoda Greenovy funkce /metoda fundamentálního řešení/

A/ Vyšetřujeme nejprve rovnici pro vedení tepla pro nekonečnou tyč, na bocích izolovanou, tj. rovnici

$$(1) \quad L_a(u) \equiv \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = f(t, x) \quad (t > 0, x \in R_1),$$

$$u(0, x) = f(x)$$

$$x > 0$$

$$u(t, 0) = 0$$

$$t > 0$$

Řešení:

Funkci $G(x, \xi, t)$ hledáme jako rozdělení teploty, odpovídající dvěma bodovým zdrojům, soustředěným v bodě $\xi > 0$ a $-\xi$, s produkci tepla rovnou $+1$, resp. -1 , a očekáváme, že v bodě $x = 0$ se vliv obou zdrojů kompenzuje. Matematicky: hledáme G ve tvaru

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right]$$

Snadno zjistíme, že funkce G vyhovuje všem požadavkům, a že řešení úlohy $\neq$ /za předpokladu, že f, h jsou spojité funkce, h je omezené a splňuje podmínku souhlasu $u(0) = 0$ /. Pro omezený interval bychom museli použít nekonečně mnoho fiktivních zdrojů a řešení bychom dostali v podobě řady.

Cvičení

p.3.1

Sestrojte Greenovu funkci a obecné řešení pro počáteční úlohu

$$u_t = a^2 u_{xx} - h u + f(t, x),$$

$$x \in R_1, t > 0,$$

$$u(0, x) = \varphi(x),$$

$$x \in R_1$$

/Úloha o vedení tepla pro nekonečnou tyč, na jejíchž bocích probíhá konvektivní výměna tepla s okolím, jehož teplota je rovna nule./

Návod: zavedením nové neznámé funkce $v = e^{\alpha t} u$ převedte úlohu na úlohu pro tyč s tepelně izolovanými boky.

p.3.2

Pro fundamentální řešení úlohy o vedení tepla $u_t = a^2 u_{xx}$ najezněte čas t , v němž je teplota v bodě x maximální, a určete toto maximum. /Úloha o šíření tepelného impulsu./

p.3.3

Pomocí Greenovy funkce řešte úlohu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$x \in R_1, t > 0,$$

$$u(0, x) = \begin{cases} 0 & x < -l \\ U_0 & -l < x < l \\ 0 & l < x \end{cases}$$

p.3.4

Řešte úlohu

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

$$x \in R_1, t > 0$$

$$u(0, x) = 0$$

$$x < 0$$

$$= A e^{-\lambda x}$$

$$x > 0$$

$\lambda > 0$, A jsou konstanty/.

p.3.5

Řešte úlohu

$$u_t = a^2 u_{xx} - h u,$$

$$-\infty < x < +\infty, 0 < t < +\infty,$$

$$u(0, x) = \begin{cases} 0 & x < -l \\ U_0 & x \in (-l, l) \\ 0 & x > +l \end{cases}$$

/srovnej s úlohou 3.3/.

p.3.6

Najezněte fundamentální řešení pro úlohu

$$u_t = a^2 u_{xx} - h u, t > 0, x > 0$$

s okrajovou podmínkou $u(t, 0) = 0, t > 0$.

p.3.7

Najezněte Greenovu funkci pro úlohu

$$u_t = a^2 u_{xx}, x > 0, t > 0, \text{ s okrajovou podmínkou}$$

$$u_x(t, 0) = 0, t > 0.$$

p.3.8

Řešte úlohu $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x$, $0 < t$; $u(t, 0) = 0$, $0 < t$;
 $u(0, x) = U_0$, $0 < x$.

p.3.9 Řešte úlohu $u_t = a^2 u_{xx}$, $x, t \in R_1$, $u(t, 0) = U_0$,
 $u(0, x) = 0$, $0 < x$.

p.3.10 Řešte úlohu $u_t = a^2 u_{xx}$, $x > 0$, $t > 0$; $u_x(t, 0) = 0$, $t > 0$;
 $u(0, x) = \psi(x)$, kde $\psi(x) = U_0$ pro $0 < x < 1$, $\psi(x) = 0$ pro $1 < x$.

p.3.11 Řešte úlohu

$$u_t = a^2 u_{xx} - b^2 e^{-kx}, \quad k > 0, \quad 0 < x, \quad 0 < t,$$

$$u(t, 0) = U_0, \quad t > 0; \quad u(0, x) = 0, \quad x > 0.$$

p.3.12 Řešte úlohu

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad 0 < t; \quad -u_x(t, 0) = q, \quad 0 < t; \quad u(0, x) = 0, \quad 0 < x.$$

p.3.13 Řešte úlohu

$$u_t = a^2 u_{xx} - h(u - U_2), \quad U_2 \text{ const.}, \quad 0 < x, \quad 0 < t;$$

$$u(t, 0) = U_1, \quad 0 < t; \quad u(x, 0) = U_0, \quad 0 < x.$$

p.3.14

Sestrojte Greenovu funkci pro konečnou tyč délky l , jejíž konce jsou udržovány na nulové teplotě.

ŘEŠENÍ A NÁVODY

p.3.1

$$G(t, x) = \frac{e^{-h t}}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}},$$

$$u(t, x) = \frac{e^{-h t}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi +$$

$$+ \int_0^t \left[\frac{e^{-h(t-\tau)}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau, \xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi \right] d\tau.$$

$$\text{p.3.2} \quad t_{\max} = \frac{x^2}{2a^2}, \quad u_{\max}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e|x|}}.$$

p.3.3

$$u(t, x) = U_0 \left[\Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right) \right],$$

kde $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$ je tzv. funkce chyb.

p.3.4

$$u(t, x) = \frac{A}{2} e^{-\alpha x + a^2 x^2 t} \left[1 - \Phi\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}} + a\alpha\sqrt{t}\right) \right].$$

p.3.5

$$u(t, x) = U_0 e^{-h t} \left[\Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right) \right]$$

p.3.6

$$G(x, \xi, t) = \frac{e^{-h t}}{2a\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right],$$

$$x \in R_1, \quad \xi \in R_1, \quad x \neq \xi, \quad t > 0.$$

/Použijte výsledku příkladu 1 a substituce $v = u e^{\alpha t}$, nebo
výsledku cvičení p.3.1 a metodu odrazu jako v příkladě 1./

p.3.7

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right].$$

Použijte metodu odrazu se dvěma okamžitými bodovými zdroji, které v čase $t = 0$ a v bodech $\xi, -\xi$ produkují kladné jednotkové množství tepla.

p.3.8 $u(t, x) = U_0 \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$

p.3.9 $u(t, x) = U_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right].$

/Použijte substituci $u(x, t) = v(x, t) + U_0$./

p.3.10 $u(t, x) = \frac{U_0}{2} \left[\Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right) \right]$

p.3.11

$$u(x, t) = \left(U_0 - \frac{b^2}{b^2 k^2} \right) \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right] + \frac{b^2}{a^2 k^2} e^{-kx} + \frac{b^2}{2a^2 k^2} \left\{ e^{a^2 k^2 t - kx} \left[1 - \Phi\left(\frac{-x}{2a\sqrt{t}} + a k \sqrt{t}\right) \right] - e^{a^2 k^2 t + kx} \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + a k \sqrt{t}\right) \right] \right\}$$

p.3.12

$$u(t, x) = 2 a q \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} - q x \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right].$$

p.3.13

$$u(x, t) = U_2 + (U_0 - U_2) e^{-h t} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + \frac{U_1 - U_2}{2} \left\{ e^{-\frac{x\sqrt{h}}{a}} \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} - \sqrt{h t}\right) \right] + e^{\frac{x\sqrt{h}}{a}} \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + \sqrt{h t}\right) \right] \right\}.$$

p.3.14

Metoda odrazu: Prodloužíme tyč neomezeně na obě strany a umístíme do bodů $\xi \in (0, l)$, $\xi + 2kl$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ okamžité bodové zdroje s kladnou jednotkovou produkcí, a do bodů $-\xi$; $-\xi \pm 2l$, $-\xi \pm 4l$, $\dots$ zdroje se zápornou jednotkovou produkcí. Pak ke každému zdroji existuje opačný zdroj, položený symetricky podle počátku, a rovněž opačný zdroj, symetrický vzhledem k $x = l$. Greenovu funkci lze vyjádřit řadou

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi+kl)^2}{4a^2 t}} \right).$$

Metoda rozdělení proměnných:

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l}.$$