

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikálna fakulta

Diplomová práca



Bc. Jana Šišláková

Nekomutatívna Choquetova teória

Katedra matematickej analýzy

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D.

Študijný program: Matematika

Študijný odbor: Matematická analýza

Praha 2011

Týmto by som chcela poďakovať doc. Spurnému za vysoko nadpriemerné vedenie tejto práce, od vypísania témy, cez odbornú pomoc pri jej porozumení, po množstvo vecných pripomienok počas vzniku samotného textu. Neposledne za ochotu a obrovské množstvo času, ktoré mi venoval.

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že se na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platnom znení, obzvlášť skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe dňa 5.8.2011

Názov práce: Nekomutatívna Choquetova teória
Autor: Bc. Jana Šišláková
Katedra (Ústav): Katedra matematickej analýzy
Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D.

Abstrakt: Nech M je lineárny podpriestor komutatívnej C^* -algebry $\mathcal{C}(X)$, ktorý oddeľuje jej body a obsahuje jednotku. Potom uzáver Choquetovej hranice pre M je Šilova hranica vzhľadom k M . V prípade nekomutatívnej C^* -algebry $\mathcal{A}$ s jednotkou uvažujme S ako samoadjungovaný lineárny podpriestor $\mathcal{A}$, ktorý obsahuje jednotku a generuje $\mathcal{A}$. Budeme hovoriť, že S je operátorový systém. Potom nekomutatívnou formuláciou uvedeného tvrdenia je výrok, že prienik všetkých hraničných reprezentácií vzhľadom k S je Šilov ideál pre S . K tomu stačí ukázať, že S má dostatočne mnoho hraničných reprezentácií. V predloženej práci smerujeme k dôkazu, že toto platí pre separabilný operátorový systém.

Kľúčové slová: hraničná reprezentácia, úplne pozitívne zobrazenie, vlastnosť jednoznačného rozšírenia, štandardný hilbertovský zväzok, merateľný systém zobrazení

Title: Noncommutative Choquet theory
Author: Bc. Jana Šišláková
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D.

Abstract: Let S be a linear subspace of a commutative C^* -algebra $\mathcal{C}(X)$ that separates points of $\mathcal{C}(X)$ and contains identity. Then the closure of the Choquet boundary of the function system S is the Šilov boundary relative to S . In the case of a noncommutative unital C^* -algebra $\mathcal{A}$, consider S a self-adjoint linear subspace of $\mathcal{A}$ that contains identity and generates $\mathcal{A}$. Let us call S operator system. Then the noncommutative formulation of the stated assertion is that the intersection of all boundary representations for S is the Šilov ideal for S . To that end it is sufficient to show that S has sufficiently many boundary representations. In the present work we make for the proof of that this holds for separable operator system.

Keywords: boundary representation, completely positive map, unique extension property, standard Hilbert bundle, measurable family of maps

Obsah

Úvod	2
1 Pojmy a potrebné vlastnosti	4
1.1 Použité značenia a úmluvy	4
1.2 Základné nástroje	5
1.3 Direktné sumy	7
1.4 O reprezentáciách C^* -algebier	8
1.5 Tenzorový súčin	11
1.6 Úplne pozitívne zobrazenia, úplná kontrakcia a úplná izometria	15
2 Nekomutatívny pohľad	22
2.1 Nekomutatívna Choquetova hranica	22
2.2 Formulácia problému	24
2.3 Prípustné podpriestory	25
3 Maximálne UCP zobrazenia	29
4 BW-topológia	39
5 Rezy a systémy UCP zobrazení	48
5.1 Výsledky z deskriptívnej teórie množín	48
5.2 Hilbertovské zväzky	51
5.3 Merateľné systémy operátorov	58
5.4 Dilatácie systémov UCP zobrazení a ich rezy	62
6 Rozklad zobrazení s vlastnosťou jednoznačného rozšírenia	68
6.1 Direktný integrál	68
6.2 Potrebný výsledok	69
7 Existencia hraničných reprezentácií pre separabilné operátorové systémy	73
7.1 Čo budeme potrebovať	73
7.2 Postup dôkazu Vety 7.1	75
Literatúra	78

Úvod

Tému nekomutatívnej Choquetovej teórie otvoril v roku 1969 William Arveson, keď vo svojej práci [2] zaviedol pojmy *hraničná reprezentácia* a *Šilov ideál* pre rozšírenie pojmu Choquetovej hranice pre nekomutatívne C^* -algebry. Počas ďalších takmer štyridsať rokov na jeho prácu naviazalo mnoho ďalších, ale problematika existencie týchto objektov zostala otvorená. Až v roku 2007 vychádza článok [4], v ktorom sám Arveson podáva dôkaz existencie Šilovho ideálu pre separabilný operátorový systém. Cieľom tejto práce je predstaviť metódy, ktoré boli použité v tomto dôkaze.

V prvej kapitole zavedieme základné pojmy, s ktorými budeme pracovať. Predpokladá sa, že čitateľ má znalosti pokryté prednáškami z funkcionálnej analýzy. Z tejto oblasti pripomenieme len niektoré kľúčové pojmy a tvrdenia.

Druhá kapitola má za úlohu predstaviť pojmy súvisiace s nekomutatívnym prípadom a presne sformulovať danú problematiku. Podrobne sa venujeme vzťahu k známej komutatívnej Choquetovej teórii. Zhrnieme tu tiež výsledky z [2] o existencii Šilovho ideálu pre tzv. *prípustné podpriestory*.

V tretej kapitole sa venujeme tzv. *úplne pozitívnym zobrazeniam*, ktoré zachovávajú jednotku. Predstavíme ich vlastnosti ako *maximalita* a *vlastnosť jednoznačného rozšírenia* a ukážeme, že sú ekvivalentné. Z definície vlastnosti jednoznačného rozšírenia sa dá tušiť, že zobrazenie s touto vlastnosťou bude mať blízko k hraničnej reprezentácii.

Štvrtá kapitola sa nesie takmer celá v abstraktnejšom duchu, opustíme našu situáciu a venujeme sa zavedeniu vhodnej slabej topológie na priestore $\mathcal{B}(X, Y^*)$ pre Banachove priestory X, Y . Pomocou nej ukážeme niekoľko potrebných vlastností pre tzv. *BW-topológiu*.

Ďalšia kapitola potrebuje nejaké znalosti z deskriptívnej teórie množín, preto jednu sekciu vyhradíme pre zhrnutie potrebných pojmov a výsledkov z tejto oblasti. Ďalej predstavíme opäť o čosi komplikovanejšie objekty, a to *hilbertovské zväzky* a *merateľné systémy operátorov*. Pojmy sú zavádzané v čo najvyššej miere abstraktnosti, ale súčasne ukážeme ako je možné pohľad na ne zjednodušiť (Tvrdenie 5.26). Vrátime sa k úplne pozitívnym zobrazeniam zachovávajúcich

jednotku a vytvoríme z nich zväzok, na ktorom pomocou štvrtej kapitoly zavedieme štruktúru štandardného borelovského priestoru. Tým získame prostredie pre vytvorenie ďalšieho kľúčového nástroja, ktorým bude Veta [5.39](#).

Posledný nástroj, ktorý predstavíme, nám dá v istom zmysle zachovávanie vlastnosti jednoznačného rozšírenia na zložky rozkladu zobrazenia. Vyžaduje sa práca s priamym integrálom Hilbertových priestorov a zobrazení, preto opäť najskôr v jednej sekcii načrtne o čo ide.

Konečne, posledná kapitola obsahuje hlavný výsledok článku [\[4\]](#). Úplný dôkaz vyžaduje netriviálne znalosti ďalších oblastí matematiky, ktorým sme sa v tejto práci nevenovali. Preto predkladáme len postup dôkazu, v ktorom nie sú všetky kroky riadne zdôvodnené. Cieľom je ukázať aplikáciu nástrojov vytvorených v predošlých kapitolách.

Kapitola 1

Pojmy a potrebné vlastnosti

1.1 Použité značenia a úmluvy

V celej práci budeme predpokladať, že všetky C^* -algebry obsahujú jednotku. Tento predpoklad neuberá na všeobecnosti vďaka štandardnému pridávaniu jednotky, viď napríklad [12, str. 228].

Skalárny súčin na Hilbertovom priestore H budeme značiť $(\cdot, \cdot)_H$, v prípadoch keď bude jasné o aký Hilbertov priestor sa jedná, budeme index vynechávať.

Pri výpočtoch s projekciami budeme bez ďalších slov využívať tieto štandardné rovnosti:

$$(Px, x) = (P^2x, x) = (P^*Px, x) = (Px, Px),$$

kde x je prvkom uvažovaného Hilbertovho priestoru a P je projekcia na nejaký jeho podpriestor.

Matice typu $n \times n$ nad telesom/priestorom/algebrou A budeme skrátene zapisovať $(a_{ij})_{ij}$, kde $a_{ij} \in A$. Opäť v prípade, že nemôže dôjsť k nedorozumeniu budeme indexy pri zátvorke vynechávať, teda budeme písať (a_{ij}) .

Stretneme sa tiež so symbolom $\overline{\bigcup_n H_n}$. Tým budeme rozumieť zúplnenie priestoru $\bigoplus_n H_n$.

Prehľad štandardných symbolov

Symbol	Popis
$\mathbb{R}$	reálne čísla
$\mathbb{N}$	prirodzené čísla
$\mathbb{C}$	komplexné čísla
$\mathbb{T}$	jednotková kružnica v $\mathbb{C}$, tj. $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 1\}$
$B(x, r)$	uzavretá guľa so stredom v bode x a polomerom r
B_X	jednotková guľa priestoru X
$\overline{M}$	uzáver množiny M
$\overline{M}^\tau$	uzáver množiny M vzhľadom k topológii τ
X^*	duálny priestor k X
$X^\#$	algebraický duál k X (tj. lineárne funkcionály na X)
$\text{ext } X$	extremálne body množiny X
$\mathcal{C}(K)$	spojité funkcie na kompakte K
$\mathcal{M}^1(K)$	pravdepodobnostné miery na kompakte K
$\mathcal{B}(H)$	spojité lineárne operátory na Hilbertovom priestore H
P_H	ortogonálna projekcia na H
$\mathcal{A}'$	komutant C^* -algebry $\mathcal{A}$
M_n	matice typu $n \times n$ nad uvažovaným číselným telesom
$M_n(\mathcal{A})$	matice typu $n \times n$ s prvkami C^* -algebry $\mathcal{A}$
$X \times Y$	kartézsky súčin priestorov X a Y .
$X \oplus Y$	direktný súčet priestorov X a Y
$\text{span}\{A\}$	linárny obal množiny A
$\overline{\text{span}}\{A\}$	uzavretý linárny obal množiny A
$\text{Re}(z)$	reálna časť čísla $z \in \mathbb{C}$.
I, id	identita

1.2 Základné nástroje

Definícia 1.1. *Pozitívny prvok C^* -algebry $\mathcal{A}$ je prvok $a \in \mathcal{A}$, ktorý je samo-adjungovaný, tzn. $a^* = a$, a jeho spektrum leží v nezápornej polosi reálnych čísel.*

Príklad 1.2. Pripomeňme, že $\mathcal{B}(H)$, tj. priestor obmedzených operátorov na Hilbertovom priestore H , tvorí nekomutatívnu C^* -algebru, kde násobením je skladanie operátorov a involúciou je adjunkcia. Jej pozitívne prvky sú práve tie operátory $T \in \mathcal{B}(H)$, ktoré spĺňajú

$$(T\xi, \xi) \geq 0, \quad \xi \in H.$$

Táto charakteristika je štandardnou aplikáciou spektrálneho rozkladu normálnych operátorov.

Definícia 1.3. Lineárny podpriestor C^* -algebry $\mathcal{A}$ nazveme *operátorový systém*, ak je uzavretý na operáciu involúcia. C^* -algebru generovanú systémom S budeme značiť $C^*(S)$ (tzn. najmenšiu C^* -algebru obsahujúcu S).

Definícia 1.4. Nech $\mathcal{A}$ je C^* -algebra, H je Hilbertov priestor. *Reprezentáciou* C^* -algebry $\mathcal{A}$ rozumieme $*$ -homomorfizmus $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$, tj. π je multiplikatívne lineárne zobrazenie do $\mathcal{B}(H)$ zachovávajúce involúciu, ktoré nie je identicky nulové.

Poznámka 1.5. Pripomenieme základné vlastnosti reprezentácií, ktoré budeme často využívať:

- (i) Každá reprezentácia π C^* -algebry $\mathcal{A}$ s jednotkou e zachováva jednotku. K tomu stačí vziať ľubovoľný prvok $a \in \mathcal{A}$, pre ktorý $\pi(a) \neq 0$. Potom z výpočtu $\pi(a) = \pi(ae) = \pi(a)\pi(e)$ máme ihneď $\pi(e) = I$.
- (ii) Norma reprezentácie $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je vždy menšia alebo rovná 1 a teda reprezentácie sú automaticky spojitité. Dôkaz je napríklad v [7, Theorem 7.1.8.(i)].

Definícia 1.6. Nech $\mathcal{A}$ je C^* -algebra s jednotkou. *Pozitívny funkcionál* na $\mathcal{A}$ je zobrazenie $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ také, že pre každé $a \in \mathcal{A}$, $a \geq 0$ platí $\omega(a) \geq 0$. Potom píšeme $\omega \geq 0$. Stav na $\mathcal{A}$ je pozitívny lineárny funkcionál na $\mathcal{A}$ s normou 1. Množinu stavov na $\mathcal{A}$ označíme $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Všeobecnejšie, zobrazenie $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ medzi C^* -algebami $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ je *pozitívne*, ak $\varphi(a)$ je pozitívny prvok v $\mathcal{A}'$ pre každý pozitívny prvok z $\mathcal{A}$.

Poznámka 1.7. Pretože pozitívny prvok C^* -algebry $\mathcal{A}$ sa dá napísať v tvare a^*a pre nejaké $a \in \mathcal{A}$ (viď [14, Theorem 6.1]), môžeme pozitivitu funkcionálov, resp. zobrazení, testovať len na prvkoch tvaru a^*a , $a \in \mathcal{A}$.

Poznámka 1.8. Pozitívne funkcionály na $\mathcal{A}$ sú automaticky spojitité a platí

$$\|\omega\| = \omega(e), \quad \omega \geq 0,$$

kde e je jednotka $\mathcal{A}$. Dôkaz sa dá nájsť napríklad v [3, Proposition 1.6.2].

Príklad 1.9. Nech $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je reprezentácia a ξ je jednotkový vektor v H . Potom funkcionál definovaný vzťahom

$$\omega(a) = (\pi(a)\xi, \xi), \quad a \in \mathcal{A}$$

je stav na $\mathcal{A}$. Pozitivita plyní ihneď z toho, že reprezentácie sú pozitívne zobrazenia (viď Poznámka 1.35) a podľa Poznámky 1.8 normu ω vypočítame

$$\|\omega\| = \omega(e) = (\pi(e)\xi, \xi) = (I\xi, \xi) = \|\xi\|^2 = 1.$$

Konvexná kombinácia stavov je zrejme opäť stav, takže množina stavov na C^* -algebry $\mathcal{A}$ je konvexná v $\mathcal{A}^*$. Preto má zmysel zaoberať sa extrémnymi bodmi množiny $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Definícia 1.10. Čistým stavom na C^* -algebre $\mathcal{A}$ rozumieme extrémálny bod množiny stavov $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, tzn. funkcionál $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, pre ktorý platí

$$\omega = \alpha\omega_1 + (1 - \alpha)\omega_2, \quad \alpha \in (0, 1), \quad \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \implies \omega_1 = \omega_2 = \omega.$$

Príklad 1.11. V prípade, že $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X)$ pre nejaký kompaktný Hausdorffov priestor X , podľa Rieszovej vety o reprezentácii množinu stavov na $\mathcal{C}(X)$ tvoria nezáporné Radonove miery na X s jednotkovou normou a teda sú to pravdepodobnostné miery na X . Čisté stavy sú potom

$$\text{ext } \mathcal{M}^1(X) = \{\varepsilon_x : x \in X\}.$$

Tento známy výsledok je možné dosiahnuť napríklad ako dôsledok [7, Theorem 3.4.7] a odstavca pred touto vetou.

1.3 Direktné sumy

Budeme potrebovať pracovať s direktnými sumami rôznych objektov, preto bude užitočné, aby základné výsledky boli na jednom mieste. V tejto sekcii zavedieme potrebné pojmy a zhrnieme ich najzákladnejšie vlastnosti. Všetky uvedené výsledky sú podrobne odôvodnené v [7, p.121-124].

Nech $H_1, \dots, H_n$, $n \in \mathbb{N}$, sú Hilbertove priestory. Na množine $K := H_1 \times \dots \times H_n$ sa dá zaviesť štruktúra Hilbertovho priestoru s operáciami definovanými nasledovne:

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ a(x_1, \dots, x_n) &= (ax_1, \dots, ax_n), \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &= \sum_{i=1}^n (x_i, y_i), \\ \|(x_1, \dots, x_n)\| &= \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

pre $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in K$ a $a \in \mathbb{C}$. Výsledný Hilbertov priestor sa nazýva *direktná suma priestorov* $H_1, \dots, H_n$ a budeme ho značiť $\oplus_{i=1}^n H_i$.

Ďalej uvažujme operátory $T_i \in \mathcal{B}(H_i, K_i)$, $i = 1, \dots, n$, kde $K_1, \dots, K_n$ sú ďalšie Hilbertove priestory. Potom operátor $T : \oplus_{i=1}^n H_i \longrightarrow \oplus_{i=1}^n K_i$ definovaný vzťahom

$$T(x_1, \dots, x_n) = (T_1x_1, \dots, T_nx_n)$$

nazývame *direktná suma operátorov* $T_1, \dots, T_n$ a značíme ho $\oplus_{i=1}^n T_i$. Tento operátor je opäť lineárny, spojitý a má nasledujúce vlastnosti:

$$\begin{aligned} \|\oplus_{i=1}^n T_i\| &= \sup\{\|T_i\| : i = 1, \dots, n\}, \\ (\oplus_{i=1}^n T_i)^* &= \oplus_{i=1}^n T_i^*, \\ \oplus_{i=1}^n (T_i + S_i) &= \oplus_{i=1}^n T_i + \oplus_{i=1}^n S_i, \\ \oplus_{i=1}^n aT_i &= a(\oplus_{i=1}^n T_i), \\ (\oplus_{i=1}^n R_i)(\oplus_{i=1}^n S_i) &= \oplus_{i=1}^n R_iS_i, \end{aligned} \tag{1.1}$$

pre $R_i, S_i \in \mathcal{B}(H_i, K_i)$, $R_i \in \mathcal{B}(K_i, L_i)$, $i = 1, \dots, n$, a $a \in \mathbb{C}$.

Rovnakú myšlienku teraz použijeme pre zavedenie direktnej sumy nekonečne veľa Hilbertových priestorov, resp. operátorov medzi nimi. Nech $\{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sú Hilbertove priestory, potom ich direktná suma je priestor

$$\oplus_{\alpha \in A} H_\alpha := \left\{ \{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} H_\alpha : x_\alpha \in H_\alpha, \sum_{\alpha \in A} \|x_\alpha\|^2 < \infty \right\}.$$

Je to priestor s algebraickou štruktúrou, skalárnym súčinom a kompatibilnou normou, ktoré sú definované nasledovne:

$$\begin{aligned} \{x_\alpha\} + \{y_\alpha\} &= \{x_\alpha + y_\alpha\}, \\ a\{x_\alpha\} &= \{ax_\alpha\}, \\ (\{x_\alpha\}, \{y_\alpha\}) &= \sum_{\alpha \in A} (x_\alpha, y_\alpha), \\ \|\{x_\alpha\}\| &= \left(\sum_{\alpha \in A} \|x_\alpha\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

pre $\{x_\alpha\}, \{y_\alpha\} \in \oplus_{\alpha \in A} H_\alpha$ a $a \in \mathbb{C}$. Priestor $\oplus_{\alpha \in A} H_\alpha$ s takto definovanou normou vyjde úplný, takže je to opäť Hilbertov priestor.

Napokon, ak máme operátory $T_\alpha \in \mathcal{B}(H_\alpha, K_\alpha)$, $\alpha \in A$, medzi Hilbertovými priestormi spĺňajúce $\sup\{\|T_\alpha\|, \alpha \in A\} < \infty$, potom ich direktnou sumou je operátor $T \in \mathcal{B}(\oplus_\alpha H_\alpha, \oplus_\alpha K_\alpha)$ definovaný

$$T\{x_\alpha\} := \{T_\alpha x_\alpha\}, \quad \{x_\alpha\} \in \oplus_{\alpha \in A} H_\alpha$$

a má vlastnosti analogické (1.1).

Čo budeme potrebovať v tejto práci je direktná suma reprezentácií C^* -algebry $\mathcal{A}$: Uvažujme teraz Hilbertove priestory $\{H_b\}_{b \in B}$, kde B je nejaká indexová množina, a reprezentácie $\varphi_b : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H_b)$, $b \in B$, C^* -algebry $\mathcal{A}$. Pretože pre každý prvok $a \in \mathcal{A}$ je podľa Poznámky 1.5 $\|\varphi_b(a)\| \leq \|a\|$ pre všetky $b \in B$, je podľa predchádzajúceho direktná suma $\oplus_b \varphi_b(a)$ obmedzený lineárny operátor na $\oplus_b H_b$. Potom zobrazenie

$$\varphi : a \in \mathcal{A} \mapsto \oplus_b \varphi_b(a) \in \mathcal{B}(\oplus_b H_b)$$

je priamo z vlastností (1.1) reprezentáciou C^* -algebry $\mathcal{A}$. Nazývame ho *direktnou sumou reprezentácií* $\{\varphi_b\}$ a značíme $\oplus_b \varphi_b$.

1.4 O reprezentáciách C^* -algebier

Definícia 1.12. Nech $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H)$, $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(K)$ sú dve reprezentácie C^* -algebry $\mathcal{A}$. Hovoríme, že π a σ sú *ekvivalentné*, ak existuje unitárny operátor $U : H \rightarrow K$ tak, že

$$\sigma(x) = U\pi(x)U^*, \quad x \in \mathcal{A}.$$

Definícia 1.13. Reprezentácia $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je *verná*, ak má triviálne jadro, tj. $\ker \varphi = \{0\}$.

Poznámka 1.14. Verná reprezentácia π C^* -algebry $\mathcal{A}$ je izometria $\mathcal{A}$ na $\pi(\mathcal{A})$. Z Poznámky 1.5 už vieme, že $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$, pre každé $x \in \mathcal{A}$. Zaujímá nás opačná nerovnosť. Z linearity je verná reprezentácia bijekcia medzi $\mathcal{A}$ a $\pi(\mathcal{A})$. Stačí si rozmyslieť, že π^{-1} je tiež homomorfizmus: Pre $y_1, y_2 \in \pi(\mathcal{A})$ označme $x_1 = \pi^{-1}(y_1)$, $x_2 = \pi^{-1}(y_2)$, potom

$$\pi^{-1}(y_1 y_2) = \pi^{-1}(\pi(x_1)\pi(x_2)) = \pi^{-1}(\pi(x_1 x_2)) = x_1 x_2 = \pi^{-1}(y_1)\pi^{-1}(y_2).$$

Opäť podľa Poznámky 1.5 potom platí $\|\pi^{-1}(y)\| \leq \|y\|$, pre každé $y \in \pi(\mathcal{A})$, čo znamená $\|x\| \leq \|\pi(x)\|$, pre každé $x \in \mathcal{A}$.

Definícia 1.15. Nech $\mathcal{A}$ je C^* -algebra, $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je jej reprezentácia. Uvažujme M uzavretý podpriestor H , ktorý je $\pi(\mathcal{A})$ -invariantný, tj. $\pi(\mathcal{A})M \subseteq M$. Podpriestor M nazveme *cyklický pre π* , ak existuje vektor $\xi \in M$ taký, že $\overline{\pi(\mathcal{A})\xi} = M$. Reprezentácia π je *cyklická*, ak H je cyklický podpriestor pre π . Napokon vektor ξ príslušný cyklickej reprezentácii nazveme *cyklický vektor*.

Veta 1.16 (GNS-konštrukcia). *Nech ω je stav na C^* -algebri $\mathcal{A}$. Potom existuje cyklická reprezentácia π_ω algebry $\mathcal{A}$ na Hilbertov priestor H_ω a jednotkový cyklický vektor ξ_ω príslušný k π_ω tak, že platí*

$$\omega(a) = (\pi_\omega(a)\xi_\omega, \xi_\omega), \quad a \in \mathcal{A}.$$

Podrobne spracovaný dôkaz je napríklad v [7, Theorem 4.5.2].

Práve GNS-konštrukcia je základným stavebným kameňom pre dôkaz existencie vernej reprezentácie ľubovoľnej C^* -algebry. Jedná sa o jednu z najdôležitejších viet teórie C^* -algebier, takže ju je možné nájsť s kompletným dôkazom v každej učebnici v obore. Napríklad [7, Theorem 4.5.6].

Veta 1.17 (Gelfand-Naimark). *Každá C^* -algebra má vernú reprezentáciu.*

Poznámka 1.18. Je užitočné aspoň vedieť, ako sa hľadaná verná reprezentácia zostrojí. Vezmeme množinu stavov na danej C^* -algebri obsahujúcu všetky čisté stavy, označme ju M . Ku každému stavu $\omega \in M$ nájdeme pomocou GNS-konštrukcie cyklickú reprezentáciu π_ω . Potom je potrebné si uvedomiť, že reprezentácia $\bigoplus_{\omega \in M} \pi_\omega$ je verná. To vyjde vďaka tomu, že množina M obsahuje všetky čisté stavy a dá sa ukázať, že množina reprezentácií, ktoré dostaneme GNS-konštrukciou z čistých stavov na danej C^* -algebri, oddeľuje body tejto algebry (viď [7, Proposition 4.5.5]).

Definícia 1.19. Pre množinu $M \subset \mathcal{B}(H)$ definujeme komutant k M ako množinu

$$M' = \{T \in \mathcal{B}(H) : TS = ST, S \in M\}.$$

Definícia 1.20. Reprezentáciu $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ nazveme *ireducibilná*, ak $\pi(\mathcal{A})' = \text{span}\{I\}$.

Často sa za definíciu ireducibility považuje nasledujúca ekvivalentná podmienka. Pre dôkaz viď [7, Theorem 5.4.1].

Veta 1.21. *Reprezentácia $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je ireducibilná práve vtedy, keď priestor H neobsahuje žiadne $\pi(\mathcal{A})$ -invariantné uzavreté podpriestory.*

Pozorovanie 1.22. *Ireducibilná reprezentácia $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je cyklická.*

Dôkaz. Zvoľme $\xi' \in H$ a predpokladajme pre spor, že π nie je cyklická. To znamená, že $M := \overline{\pi(\mathcal{A})\xi'}$ je uzavretý vlastný podpriestor v H . Pre $m' \in \pi(\mathcal{A})\xi'$ nájdeme $a' \in \mathcal{A}$, že $\pi(a')\xi' = m'$ a potom

$$\pi(a)m' = \pi(a)\pi(a')\xi' = \pi(aa')\xi' \in M, \quad a \in \mathcal{A}.$$

Limitným prechodom dostaneme, že i pre ľubovoľné $m' \in M$ je $\pi(a)m'$ prvkom M pre každé $a \in \mathcal{A}$ a teda, že M je $\pi(\mathcal{A})$ -invariantný podpriestor. To je ale podľa Vety 1.21 v spore s ireducibilitou reprezentácie π . $\square$

Ďalšou štandardnou vetou v tejto oblasti je veta dávajúca do vzťahu ireducibilitu reprezentácie a čistotu stavu z Príkladu 1.9. Dôkaz sa dá nájsť napríklad v [3, Theorem 1.1.6].

Veta 1.23. *Nech π je reprezentácia C^* -algebry $\mathcal{A}$, ktorá má jednotkový cyklický vektor ξ . Potom stav $\omega(a) = (\pi(a)\xi, \xi)$ je čistý práve vtedy, keď je π ireducibilná.*

Poznámka 1.24 (Komutatívny prípad). Pozrime sa ako vyzerajú ireducibilné reprezentácie v komutatívnom prípade. Nech $\varphi : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je ireducibilná reprezentácia C^* -algebry $\mathcal{C}(X)$, kde X je kompaktný Hausdorffov priestor. Pretože φ je ireducibilná, podľa definície je $\varphi(\mathcal{C}(X))' = \text{span}\{I\}$, a pretože $\mathcal{C}(X)$ je komutatívna, máme

$$\varphi(\mathcal{C}(X)) \subseteq \varphi(\mathcal{C}(X))' = \text{span}\{I\}.$$

Takže $T \in \varphi(\mathcal{C}(X))$ je operátor tvaru $\alpha \in \mathbb{C} \mapsto c\alpha$ pre $c \in \mathbb{C}$. Ďalej, vďaka Pozorovaniu 1.22 už vieme, že existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ jednotkový cyklický vektor pre φ . Potom podľa vety 1.23 je stav definovaný

$$\mu(f) := (\varphi(f)\lambda, \lambda)_{\mathbb{C}}, \quad f \in \mathcal{C}(X),$$

čistý. Už vieme, že čisté stavy na $\mathcal{C}(X)$ sú práve Dirakove miery ε_x , $x \in X$ (viď Príklad 1.11). To znamená, že existuje $x \in X$ tak, že $\mu = \varepsilon_x$. Dostávame, že pre $f \in \mathcal{C}(X)$ platí

$$\varepsilon_x(f) = (\varphi(f)\lambda, \lambda)_{\mathbb{C}} = \varphi(f)|\lambda|^2 = \varphi(f)$$

a teda $\varphi(f) = f(x)$. Takže každá ireducibilná reprezentácia C^* -algebry $\mathcal{C}(X)$ je pre nejaké $x \in X$ ekvivalentná reprezentácii

$$\varphi_x : f \in \mathcal{C}(X) \mapsto f(x),$$

kde $f(x)$ chápeme ako operátor $\lambda \in \mathbb{C} \mapsto f(x)\lambda \in \mathbb{C}$.

1.5 Tenzorový súčin

Ďalším dôležitým pojmom pre nás bude tzv. *úplne pozitívne zobrazenie*. K tomu, aby sme ho mohli definovať budeme potrebovať nejaký aparát z teórie tenzorového súčinu.

Tenzorový súčin vektorových priestorov

Veta 1.25. *Nech X, Y sú vektorové priestory nad $\mathbb{C}$. Potom existuje jediný (až na izomorfizmus) vektorový priestor $X \otimes Y$ a jediné bilinéarne zobrazenie $\pi : X \times Y \longrightarrow X \otimes Y$ tak, že platí:*

Pre každý vektorový priestor Z a bilinéarne zobrazenie $\varphi : X \times Y \longrightarrow Z$ existuje práve jedno lineárne zobrazenie $\hat{\varphi} : X \otimes Y \longrightarrow Z$ spĺňajúce $\varphi = \hat{\varphi} \circ \pi$.

Definícia 1.26. Dvojicu $(X \otimes Y, \pi)$ z predchádzajúcej vety nazývame *algebraický tenzorový súčin* priestorov X a Y . Pre $x \in X, y \in Y$ píšeme

$$x \otimes y := \pi(x, y).$$

Poznámka 1.27. Nech $x, x_1, x_2 \in X, y, y_1, y_2 \in Y$ a $\lambda \in \mathbb{C}$. Z bilinearity zobrazenia π dostávame okamžité vzťahy:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) \otimes y &= x_1 \otimes y + x_2 \otimes y, \\ x \otimes (y_1 + y_2) &= x \otimes y_1 + x \otimes y_2, \\ (\lambda x) \otimes y &= \lambda(x \otimes y) \\ &= x \otimes (\lambda y). \end{aligned}$$

Ďalej, každý prvok ξ súčinu $X \otimes Y$ má tvar

$$\xi = \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k, \quad x, \dots, x_n \in X, \quad y_1, \dots, y_n \in Y, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Poznámka 1.28. Tenzorový súčin priestorov síce nie je komutatívna operácia, čiže priestory $X \otimes Y$ a $Y \otimes X$ nie sú vo všeobecnosti zhodné. V každom prípade sú aspoň izomorfné. Pre vektorové priestory X, Y, Z platia vzťahy:

$$\begin{aligned} X \otimes Y &\cong Y \otimes X, \\ X \otimes (Y \otimes Z) &\cong (X \otimes Y) \otimes Z. \end{aligned}$$

Uvedieme si základný dôležitý príklad tenzorového súčinu vektorových priestorov a jeho dôsledky, ktoré budeme neskôr využívať.

Príklad 1.29. Nech X je nejaký vektorový priestor. Potom tenzorový súčin $\mathbb{C}^n \otimes X$ môžeme stotožniť s priestorom $X^n := X \times \dots \times X$ (n -krát) pomocou lineárnych zobrazení

$$\begin{aligned} I : X^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \otimes X \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n e_i \otimes x_i, \end{aligned}$$

kde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ sú bázové vektory v $\mathbb{C}^n$ - s jedničkou na i -tej súradnici,
resp. na druhú stranu

$$\begin{aligned} J : \mathbb{C}^n \otimes X &\longrightarrow X^n \\ (c_1, \dots, c_n) \otimes x &\longmapsto (c_1x, \dots, c_nx). \end{aligned}$$

Tieto zobrazenia sú zrejme prosté, na a zložením $J \circ I$ dostaneme identitu na X^n . Budeme potrebovať tieto špeciálne prípady:

(a) $X = \mathbb{C}^n$, potom dostávame stotožnenie $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \cong (\mathbb{C}^n)^n \cong M_n$, čo sú matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{C}$.

(b) Pomocou (a) a Poznámky 1.28 dostávame

$$M_n \otimes X \cong (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n) \otimes X \cong \mathbb{C}^n \otimes (\mathbb{C}^n \otimes X) \cong \mathbb{C}^n \otimes X^n \cong (X^n)^n \cong M_n(X),$$

čo sú matice typu $n \times n$ nad X .

(c) Napokon špeciálnym prípadom (b) je súčin $M_n \times M_m \cong M_n(M_m) \cong M_{mn}$.

Tenzorový súčin algebier

Tvrdenie 1.30. *Pre algebry A, B nad telesom $\mathbb{C}$ existuje asociatívne násobenie na súčine $A \otimes B$ tak, že pre každé $x_1, x_2 \in A$ a $y_1, y_2 \in B$ platí*

$$(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) = (x_1x_2) \otimes (y_1y_2).$$

V prípade, že obidve algebry A, B majú jednotku 1_A , resp. 1_B , aj $A \otimes B$ má jednotku, a to $1_A \otimes 1_B$. Napokon, ak A, B sú algebry s involúciou, potom

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right)^* := \sum_{i=1}^n x_i^* \otimes y_i^*, \quad x_1, \dots, x_n \in X, \quad y_1, \dots, y_n \in Y,$$

definuje involúciu na $A \otimes B$.

Tvrdenie 1.31. *Majme dané algebry A_1, A_2, B_1, B_2 a lineárne zobrazenia*

$$\varphi : A_1 \longrightarrow A_2, \quad \psi : B_1 \longrightarrow B_2.$$

Potom existuje práve jedno lineárne zobrazenie $\varphi \otimes \psi : A_1 \otimes B_1 \longrightarrow A_2 \otimes B_2$ spĺňajúce

$$(\varphi \otimes \psi)(a \otimes b) = \varphi a \otimes \psi b, \quad a \in A_1, \quad b \in B_1.$$

Ak sú zobrazenia φ, ψ prosté (resp. na), potom aj $\varphi \otimes \psi$ je prosté (resp. na). V prípade, že φ, ψ sú homomorfizmy algebier (tj. sú navyše multiplikatívne), je i $\varphi \otimes \psi$ homomorfizmus. Ďalej, ak máme na všetkých daných algebrách definovanú involúciu a φ, ψ sú $$ -homomorfizmy, je $\varphi \otimes \psi$ opäť $*$ -homomorfizmus. Napokon, pre algebry s jednotkou a zobrazenia φ, ψ , ktoré ju zachovávajú, dostaneme zobrazenie $\varphi \otimes \psi$, ktoré príslušnú jednotku z $A_1 \otimes B_1$ taktiež zachováva.*

Z Tvrdenia 1.30 už vieme, že tenzorovým súčinom dvoch algebier s involúciou je opäť algebra s involúciou. Dá sa očakávať, že tenzorovým násobením dvoch C^* -algebier dostaneme opäť C^* -algebru. Problematika zavedenia C^* -normy na $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ pre všeobecné C^* -algebry $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ je už rozsiahlejšia a pre túto prácu nepotrebná. Venuje sa jej detailne druhá kapitola v [9]. Pre naše účely nám bude stačiť poznať špeciálny prípad, a to tenzorový súčin C^* -algebry $\mathcal{A}$ a M_n , tj. algebry matic nad $\mathbb{C}$ typu $n \times n$, kde násobenie je klasické maticové násobenie a involúcia je definovaná

$$(x_{ij})^* := (x_{ji}^*), \quad (x_{ij}) \in M_n.$$

Uvažujme najšôr špeciálny prípad C^* -algebry, konkrétne algebru obmedzených operátorov na Hilbertovom priestore:

Príklad 1.32. Súčin $M_n \otimes \mathcal{B}(H) = M_n(\mathcal{B}(H))$ sa dá stotožniť s $\mathcal{B}(H^n)$, kde $H^n = H \otimes \dots \otimes H$ (n -krát), pomocou $(T_{ij}) \in M_n(\mathcal{B}(H)) \mapsto T \in \mathcal{B}(H^n)$, kde

$$T\xi = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n T_{1k}\xi_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n T_{nk}\xi_k \end{pmatrix} \in H^n, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in H^n,$$

a na druhú stranu $T \in \mathcal{B}(H^n) \mapsto (T_{ij}) \in M_n(\mathcal{B}(H))$, kde operátory $T_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ definujeme pomocou $T_{ij} := P_i T P_j$, kde P_i, P_j sú projekcie na i -tú (j -tú) zložku priestoru H^n . Ak označíme T_i i -tú zložku zobrazenia T , tzn.

$$T_i : \xi \in H^n \mapsto (T\xi)_i \in H,$$

potom pre $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in H^n$ platí

$$T_{ij}(\xi_k) = \begin{cases} T_i \xi & , k = i \\ 0 & , k \neq i. \end{cases}$$

Dostávame

$$(T_{ij}) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n T_{1k}\xi_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n T_{nk}\xi_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}\xi_1 \\ \vdots \\ T_{nn}\xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T\xi)_1 \\ \vdots \\ (T\xi)_n \end{pmatrix} = T\xi.$$

Príklad 1.33 (C^* -norma na $M_n \otimes \mathcal{A}$). Uvažujme ľubovoľnú C^* -algebru $\mathcal{A}$ a nech je dané $n \in \mathbb{N}$. Podľa Gelfand-Naimarkovej vety (Veta 1.17) existuje verná reprezentácia $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ C^* -algebry $\mathcal{A}$ na Hilbertovom priestore H . Definujme zobrazenie $\varphi_n := \text{id}_{M_n} \otimes \varphi$, tj.

$$\begin{aligned} \varphi_n : M_n \otimes \mathcal{A} &\longrightarrow M_n \otimes \mathcal{B}(H) \\ (a_{ij}) &\longmapsto (\varphi(a_{ij})). \end{aligned}$$

Potom podľa Tvrdenia 1.31 je zobrazenie φ_n prostý $*$ -homomorfizmus $M_n \otimes \mathcal{A}$ do $M_n \otimes \mathcal{B}(H) = \mathcal{B}(H^n)$. Ukážeme, že C^* -norma na $\mathcal{B}(H^n)$ definuje C^* -normu na

algebry $M_n \otimes \mathcal{A}$.

Definujeme

$$\|(a_{ij})\|_n := \|\varphi_n(a_{ij})\|_{\mathcal{B}(H^n)}, \quad (a_{ij}) \in M_n \otimes \mathcal{A} = M_n(\mathcal{A}),$$

tzn.

$$\|(a_{ij})\|_n = \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n \varphi_n(a_{ij}) \xi_j \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} : (\xi_1, \dots, \xi_n) \in B_{H^n} \right\}. \quad (1.2)$$

Pre $(a_{ij}) \in M_n(\mathcal{A})$ najskôr dokážeme nasledujúce nerovnosti:

$$\max_{i,j \in \mathbb{N}} \|a_{ij}\| \leq \|(a_{ij})\|_n, \quad (1.3)$$

$$\|(a_{ij})\|_n \leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|. \quad (1.4)$$

Voľme $k, l \in \{1, \dots, n\}$ a $\varepsilon > 0$. Z definície suprema existuje prvok $\xi \in B_H$ tak, že

$$\|\varphi(a_{kl})\xi\| > (1 - \varepsilon)\|\varphi(a_{kl})\|.$$

Pretože φ je verná, je to podľa Poznámky 1.14 izometria a teda máme $\|\varphi(a_{kl})\xi\| > (1 - \varepsilon)\|a_{kl}\|$. Definujme vektor $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in H^n$ takto: $\xi_j := 0$ pre $j \neq l$ a $\xi_l := \xi$. Potom $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in B_{H^n}$ a

$$\sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n \varphi_n(a_{ij}) \xi_j \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|\varphi_n(a_{il})\xi_l\|^2 \geq \|\varphi_n(a_{kl})\xi\|^2 > (1 - \varepsilon)^2 \|a_{kl}\|^2.$$

Pretože ε bolo ľubovoľné kladné, dostávame $\sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n \varphi_n(a_{ij}) \xi_j \right\|^2 \geq \|a_{kl}\|^2$ a prechodom k maximu cez $k, l \in \{1, \dots, n\}$ a následne k supremu cez $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in B_{H^n}$ získame požadovanú nerovnosť (1.3).

Nech $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in B_{H^n}$ je ľubovoľné. Použitím trojuholníkovj nerovnosti dostávame medzivýpočet

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n \varphi_n(a_{ij}) \xi_j \right\| &\leq \sum_{j=1}^n \|\varphi_n(a_{ij}) \xi_j\| \leq \sum_{j=1}^n \|\varphi_n(a_{ij})\| \|\xi_j\| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n \|\varphi_n(a_{ij})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \|\xi_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{=1}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

kde posledná nerovnosť je Hölderova nerovnosť. Odtiaľ vďaka faktu, že φ je izometria platí

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n \varphi_n(a_{ij}) \xi_j \right\|^2 &\stackrel{(1.5)}{\leq} \sum_{i,j=1}^n \|\varphi_n(a_{ij})\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|^2 \\ &\leq \left(\sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\| \right)^2, \end{aligned}$$

kde posledná nerovnosť je zo vzťahu

$$\left(\sum_{i=1}^n r_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^n r_i r_j \geq \sum_{i=1}^n r_i^2, \quad r_i \in \mathbb{R}, r_i \geq 0, i = 1, \dots, n.$$

Potom nerovnosť (1.4) dostaneme opäť prechodom k supremu cez $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in B_{H^n}$.

Potrebuje dokázať úplnosť $(M_n \otimes \mathcal{A}, \|\cdot\|_n)$. Nech teda máme danú $\|\cdot\|_n$ -cauchyovskú postupnosť matíc $\{(a_{ij}^{(k)})\}_{k=1}^\infty$ v $M_n \otimes \mathcal{A} = M_n(\mathcal{A})$. To znamená, že k $\varepsilon > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $k, l \geq k_0$ platí $\|(a_{ij}^{(k)}) - (a_{ij}^{(l)})\|_n < \varepsilon$. Potom podľa (1.3) platí pre každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}^{(l)}\| \leq \|(a_{ij}^{(k)} - a_{ij}^{(l)})\|_n = \|(a_{ij}^{(k)}) - (a_{ij}^{(l)})\|_n < \varepsilon, \quad k, l \geq k_0$$

a teda postupnosť $\{a_{ij}^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ je cauchyovská v $\mathcal{A}$ a teda konvergentná. Pre každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$ nájdeme $a_{ij} \in \mathcal{A}$ spĺňajúce $(a_{ij}^{(k)}) \rightarrow a_{ij}$, pre $k \rightarrow \infty$. Potom tiež $\sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}\| \rightarrow 0$, pre $k \rightarrow \infty$, pretože je to konečná suma. Odtiaľ s použitím (1.4) je

$$\|(a_{ij}^{(k)}) - (a_{ij})\|_n = \|(a_{ij}^{(k)} - a_{ij})\|_n \leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Takže $M_n \otimes \mathcal{A}$ je algebra s involúciou úplná v norme $\|\cdot\|_n$. Pretože norma na priestore obmedzených operátorov na Hilbertovom priestore je C^* -norma, je i $\|\cdot\|_n$ C^* -norma a teda $M_n \otimes \mathcal{A}$ je C^* -algebra.

1.6 Úplne pozitívne zobrazenia, úplná kontrakcia a úplná izometria

Štúdium pozitívnych funkcionálov, resp. stavov, v teórii C^* -algebier prináša mnoho zaujímavých myšlienok. Je prirodzenou otázkou, či je ich možné v nejakom zmysle zovšeobecniť a získať tak ešte ďalekosiahlejšie výsledky.

Prvá myšlienka padá na pozitívne operátory. Ako motiváciu vezmeme Kreinovú vetu. Máme C^* -algebru $\mathcal{A}$ a samoadjungovaný lineárny podpriestor $S \subseteq \mathcal{A}$, $e \in S$. Kreinova veta hovorí, že každý pozitívny lineárny funkcionál na S má pozitívne lineárne rozšírenie na celú algebru $\mathcal{A}$. Ak by sme sa pokúsili dokázať analogickú vetu pre pozitívne operátory, kladného výsledku by sme sa nedočkali. Neskôr si uvedieme príklad pozitívneho lineárneho operátora bez rozšírenia.

Naopak, ako dobrý nápad sa ukazuje hľadať analógiu medzi pozitívnymi funkcionálmi a tzv. *úplne pozitívnymi zobrazeniami*. V tejto sekcii sa budeme zaoberať práve týmito zobrazeniami a ich vlastnosťami.

Definícia 1.34. Nech $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sú C^* -algebry, $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ je lineárne. Uvažujme zobrazenia φ_n definované predpisom

$$\varphi_n : \mathcal{A} \otimes M_n \longrightarrow \mathcal{A}' \otimes M_n$$

$$\varphi_n((a_{ij})) = (\varphi(a_{ij})), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hovoríme, že φ je *úplne pozitívne* (resp. *úplne kontraktívne*, resp. *úplná izometria*), ak je φ_n pozitívne (resp. kontraktívne, resp. izometria), pre každý index $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka 1.35. Všimnime si, že reprezentácie sú úplne pozitívne zobrazenia. Nech $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je reprezentácia C^* -algebry $\mathcal{A}$ a $a \in \mathcal{A}$ je ľubovoľný prvok $\mathcal{A}$. Potom pre každé $\xi \in H$ priamo z definície reprezentácie dostávame

$$(\pi(a^*a)\xi, \xi) = (\pi(a)^*\pi(a)\xi, \xi) = (\pi(a)\xi, \pi(a)\xi) = \|\pi(a)\xi\|^2 \geq 0.$$

To znamená, že $\pi(a^*a)$ je pozitívny operátor v $\mathcal{B}(H)$ a teda π je pozitívne zobrazenie.

Pre úplnú pozitivitu voľme ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ a uvažujme prvok $a \in M_n(\mathcal{A})$, teda maticu $a = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathcal{A}$. Potom adjungovaný prvok k a je matica tvaru $a^* = (a_{ji}^*)$ a násobením týchto matíc dostaneme

$$a^*a = \left(\sum_{k=1}^n a_{kj}^* a_{ki} \right)_{i,j=1}^n.$$

Podľa definície π_n je

$$\begin{aligned} \pi_n(a^*a) &= \left(\pi \left(\sum_{k=1}^n a_{kj}^* a_{ki} \right) \right)_{i,j=1}^n = \left(\sum_{k=1}^n \pi(a_{kj}^*) \pi(a_{ki}) \right)_{i,j=1}^n \\ &= \left(\pi(a_{ji}^*) \right)_{i,j=1}^n \left(\pi(a_{ij}) \right)_{i,j=1}^n \\ &= \pi_n(a^*) \pi_n(a) = \pi_n(a)^* \pi_n(a), \end{aligned}$$

odkiaľ rovnako ako v prvej časti dostaneme pre každý vektor $\xi \in H^n$

$$(\pi_n(a^*a)\xi, \xi) = (\pi_n(a)^* \pi_n(a)\xi, \xi) = (\pi_n(a)\xi, \pi_n(a)\xi) = \|\pi_n(a)\xi\|^2 \geq 0.$$

Takže $\pi_n(a^*a)$ je pozitívny operátor na H^n pre každú voľbu $a \in M_n(\mathcal{A})$ a to pre každé $n \in \mathbb{N}$, čo bolo treba dokázať.

Poznámka 1.36. V predchádzajúcej poznámke sme mimochodom dokázali, že ak $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je reprezentácia C^* -algebry $\mathcal{A}$ na H , potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ je π_n reprezentáciou C^* -algebry $M_n \otimes \mathcal{A}$ na H^n . K tomu stačí urobiť analogický výpočet so všeobecnou maticou $(b_{ij}) \in M_n(\mathcal{A})$ namiesto (a_{ij}) .

Budeme často využívať nasledujúcu vetu, ktorá charakterizuje úplne pozitívne lineárne zobrazenia C^* -algebry do priestoru spojitých lineárnych operátorov. Pôvodný dôkaz sa dá nájsť napríklad v [13, Theorem 1], mierne zjednodušený je v [3, Theorem 1.1.1].

Veta 1.37 (Stinespring). *Nech $\mathcal{A}$ je C^* -algebra, $e \in \mathcal{A}$ je jednotka a H je Hilbertov priestor. Potom pre každé úplne pozitívne lineárne zobrazenie $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ existuje reprezentácia $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(K)$ na Hilbertovom priestore K a operátor $V \in \mathcal{B}(H, K)$ tak, že*

$$\varphi(x) = V^* \pi(x) V, \quad x \in \mathcal{A}.$$

Naviac pre normu operátoru V platí $\|V\xi\|^2 \leq \|\varphi(e)\| \|\xi\|^2$, $\xi \in H$.

Poznámka 1.38. Na tomto mieste je dobré si uvedomiť ďalší blízky vzťah úplne pozitívnych zobrazení k pozitívnym funkcionálom. Uvažujme vo Vete 1.37 jednodimenzionálny Hilbertov priestor H , teda teleso komplexných čísel, a pozitívny funkcionál $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$. Potom ω je úplne pozitívne zobrazenie (viď Tvrdenie 1.41). Nech má naviac ω normu jedna, teda je to stav na $\mathcal{A}$. Stinespringova veta hovorí, že existuje Hilbertov priestor K , reprezentácia $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(K)$ a operátor $V \in \mathcal{B}(\mathbb{C}, K)$ tak, že $\omega(a) = V^* \pi(a) V$, pre $a \in \mathcal{A}$. Označme $\xi := V1$. Potom dostávame

$$\omega(a) = V^* \pi(a) V = (V^* \pi(a) V 1, 1)_{\mathbb{C}} = (\pi(a) V 1, V 1)_K = (\pi(a) \xi, \xi)_K, \quad a \in \mathcal{A}.$$

Inými slovami, dostali sme GNS-konštrukciu pre stav ω , kde $H_\omega := K$, $\pi_\omega := \pi$ a $\xi_\omega := \xi$. Takže Stinespringovu vetu môžeme vnímať ako zovšeobecnenie GNS-konštrukcie pre úplne pozitívne zobrazenia.

Pojem úplne pozitívneho zobrazenia je možné zovšeobecniť pre zobrazenia definované nie nutne na celej C^* -algebre. Pre operátorový systém $S \subseteq \mathcal{A}$ a $n \in \mathbb{N}$ je lineárny priestor $S \otimes M_n = M_n(S)$ lineárnym podpriestorom v $\mathcal{A} \otimes M_n = M_n(\mathcal{A})$. Pre lineárne zobrazenie $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{A}'$ môžeme teda analogicky Definícii 1.34 definovať zobrazenie

$$\begin{aligned} \varphi_n : S \otimes M_n &\longrightarrow \mathcal{A}' \otimes M_n \\ (a_{ij})_{ij} &\mapsto (\varphi(a_{ij}))_{ij}. \end{aligned}$$

Definícia 1.39. Hovoríme, že lineárne zobrazenie $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{A}'$ je úplne pozitívne/úplne kontraktívne/úplná izometria, ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je zobrazenie φ_n pozitívne/kontraktívne/izometria.

Príklad 1.40 (pozitívny operátor, ktorý nie je úplne pozitívny). Pre $n \geq 2$ uvažujme operátor

$$\begin{aligned} \varphi : M_n &\longrightarrow M_n \\ (a_{ij}) &\mapsto (a_{ji}). \end{aligned}$$

Potom φ je pozitívny operátor, pretože spektrum matice je vždy rovnaké ako spektrum k nej transponovanej matice. Ukážeme, že tento operátor nie je úplne pozitívny. Potrebujeme nájsť $k \in \mathbb{N}$, pre ktoré operátor

$$\begin{aligned} \varphi_k : M_n \otimes M_k &\longrightarrow M_n \otimes M_k \\ ((a_{ij})_n)_k &\mapsto (\varphi(a_{ij}))_k \end{aligned}$$

nie je pozitívny. Ukážeme, že φ_n nie je pozitívny. Uvažujme matice E_{ij} , pre $1 \leq i, j \leq n$, ktoré majú na mieste (i, j) hodnotu 1 a inde 0 a definujme maticu $E := (E_{ij})_{i,j=1}^n$. Potom $(\frac{1}{n}E)^* = (\frac{1}{n}E_{ji}^*) = (\frac{1}{n}E_{ij}) = \frac{1}{n}E$ a násobením matíc je jednoduché ukázať, že $(\frac{1}{n}E)^2 = \frac{1}{n}E$. Takže $\frac{1}{n}E$ je pozitívny prvok v $M_n \otimes M_n$, pretože pre každé $x \in (M_n)^n$ je

$$\left(\frac{1}{n}Ex, x\right) = \left(\left(\frac{1}{n}E\right)^2 x, x\right) = \left(\frac{1}{n}Ex, \frac{1}{n}Ex\right) \geq 0$$

a teda aj $E \geq 0$. Ďalej označme I identitu v $M_n \otimes M_n$, tj. maticu s jednotkovými maticami na diagonále a nulovými maticami inde. Opäť násobením matíc ihneď dostaneme, že $(\varphi_n(E))^2 = I$. To znamená, že spektrum matice $(\varphi_n(E))^2$ je rovnaké ako spektrum identity I , čo je $\{1\}$. Podľa vety o obraze spektra je potom spektrum $\sigma(\varphi_n(E)) \subseteq \{-1, 1\}$. Ak by $\varphi_n(E)$ bol pozitívny prvok v $M_n \otimes M_n$, muselo by byť $\sigma(\varphi_n(E))$ nezáporné a teda rovné $\{1\}$. Pretože $\varphi_n(E)(\varphi_n(E))^* = (\varphi_n(E))^2 = I$ a teda $\varphi_n(E)$ je normálna matica, existuje spektrálna miera F , ktorá borelovskej podmnožine $B \subseteq \sigma(\varphi_n(E))$ priradí operátor $\sum_{\lambda_i \in B} P_i$, kde P_i sú projekcie na príslušné vlastné podpriestory, tj. na $\ker(\lambda_i I - T)$. Podľa definície spektrálnej miery v prípade $\sigma(\varphi_n(E)) = \{1\}$ dostávame

$$\varphi_n(E) = \int_{\sigma(\varphi_n(E))} (\text{id}) dF = 1 \cdot P_1,$$

takže $\varphi_n(E)$ je projekcia, čo je potrebný spor, pretože $(\varphi_n(E))^2 = I \neq \varphi_n(E)$. Takže $\sigma(\varphi_n(E)) \not\subseteq [0, \infty)$ a teda $\varphi_n(E)$ nie je pozitívnym prvkom $M_n \otimes M_n$.

V uvedenom príklade je dôležité, že C^* -algebry, medzi ktorými operátor pôsobí, sú nekomutatívne. Totiž postačujúcou podmienkou k tomu, aby pozitívne lineárne zobrazenie medzi C^* -algebami bolo úplne pozitívne, je komutativita aspoň jednej z týchto algebier:

Tvrdenie 1.41. *Nech $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sú C^* -algebry, $\mathcal{A}'$ je komutatívna, $S \subset \mathcal{A}$, $S = S^*$. Potom každé pozitívne lineárne zobrazenie $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{A}'$ je úplne pozitívne.*

Tvrdenie 1.42. *Nech $\mathcal{A}$ je komutatívna C^* -algebra. Potom každé pozitívne lineárne zobrazenie $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je úplne pozitívne.*

Dôkaz Tvrdenia 1.41 je možné nájsť v [2, Proposition 1.2.2] a Dôkaz Tvrdenia 1.42 v [13, Theorem 4] alebo v [6, Lemma 5.1.5].

Vráťme sa späť k otázke rozširovania zobrazení. Práve tu sa totiž ukazuje ďalšie plus úplnej pozitivity zobrazení oproti klasickej pozitivite. Spomínanú Kreinovu vetu sa pre úplne pozitívne zobrazenia už zovšeobecniť dá:

Veta 1.43 (Extension Theorem). *Nech S je samoadjungovaný normovo uzavretý lineárny podpriestor C^* -algebry $\mathcal{A}$. Potom pre každé úplne pozitívne lineárne zobrazenie $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ existuje úplne pozitívne lineárne zobrazenie $\varphi_1 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ tak, že $\varphi_1 \upharpoonright_S = \varphi$.*

Táto veta je štandardným výsledkom teórie úplne pozitívnych zobrazení a jej samotný dôkaz nie je pre túto prácu nijak prínosný, preto ho vynecháme. Podrobne je spracovaný napr. v [2, Theorem 1.2.3]. Uvedenú verziu vety je možné ešte zovšeobecniť pre nie nutne samoadjungovaný podpriestor S . I tento výsledok je obsiahnutý v [2] - Theorem 1.2.9.

Veta 1.44. *Nech M je lineárny podpriestor C^* -algebry $\mathcal{A}$, ktorý obsahuje jednotku. Potom pre každé úplne kontraktívne lineárne zobrazenie $\varphi : M \longrightarrow \mathcal{B}(H)$, pre ktoré $\varphi(e) = I$, existuje úplne pozitívne lineárne rozšírenie na $\mathcal{A}$.*

Tvrdenie 1.45. *Nech $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ sú C^* -algebry, $e \in S$ je jednotka v $\mathcal{A}$ a $S \subset \mathcal{A}$ je operátorový systém. Ďalej nech lineárne zobrazenie $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{A}_1$ je úplne pozitívne. Potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\|\varphi_n\| = \|\varphi(e)\|$.*

Dôkaz. Uvažujme $\mathcal{A}_1$ ako C^* -podalgebru v $\mathcal{B}(H)$, pre nejaký Hilbertov priestor H . Podľa Stinespringovej vety existuje reprezentácia $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(K)$, kde K je Hilbertov priestor, a existuje operátor $V \in \mathcal{B}(H, K)$ tak, že

$$\varphi(a) = V^* \pi(a) V, \quad a \in S.$$

Pretože π je reprezentácia, máme $\|\pi\| \leq 1$ (Poznámka 1.5). Potom pre $\xi \in H$ je $\|V\xi\|^2 = (V\xi, V\xi) = (V^*V\xi, \xi) \leq \|V^*V\| \|\xi\|^2$. Tento výpočet spolu s vlastnosťou adjungovaného operátoru $\|V\| = \|V^*\|$ vedie k $\|V\| \|V^*\| = \|V\|^2 = \|V^*V\|$. Odtiaľ dostávame nerovnosti:

$$\|\varphi(a)\| \leq \|V^*\| \|\pi(a)\| \|V\| \leq \|a\| \|V^*V\| = \|a\| \|\varphi(e)\|,$$

pričom posledná rovnosť platí pretože $\varphi(e) = V^* \pi(e) V$ a π je už homomorfizmus takže $\pi(e)$ je identický operátor na K .

Všimnime si, že pre φ úplne pozitívne sú $\varphi_n : \mathcal{A} \otimes M_n \longrightarrow \mathcal{A}_1 \otimes M_n$ tiež úplne pozitívne:

K tomu potrebujeme aby pre pevné $n \in \mathbb{N}$ boli zobrazenia

$$(\varphi_n)_k : \mathcal{A} \otimes M_n \otimes M_k \longrightarrow \mathcal{A}_1 \otimes M_n \otimes M_k$$

pozitívne pre každé $k \in \mathbb{N}$. Ale pretože $M_n \otimes M_k = M_n(M_k) = M_{nk}$, pre každé $k \in \mathbb{N}$ je $(\varphi_n)_k = \varphi_{nk}$ a o týchto zobrazeniach z predpokladu vieme, že sú pozitívne.

Môžeme teda aplikovať prvú časť dôkazu na φ_n , čím dostaneme $\|\varphi_n\| = \|\varphi_n(e_n)\|$, kde e_n je jednotka v $\mathcal{A} \otimes M_n$, tj. diagonálna matica s jednotkou $e \in \mathcal{A}$ na diagonále. Napokon, pretože $\varphi_n(e_n)$ je opäť diagonálna matica, ktorá má na diagonále hodnoty $\varphi(e)$, je zrejmé $\|\varphi_n(e_n)\| = \|\varphi(e)\|$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Odtiaľ už dostávame požadovanú rovnosť

$$\|\varphi_n\| = \|\varphi_n(e_n)\| = \|\varphi(e)\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

Dôkaz tohto Tvrdenia je podľa [2, Proposition 1.2.10]. Teraz je už na rade sľubovaný príklad na problém rozširovania pozitívnych operátorov. Pochádza z [2, Appendix A.2.].

Príklad 1.46. Označme $\mathbb{T}$ jednotkovú kružnicu v $\mathbb{C}$, tj. $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Uvažujme C^* -albegru $\mathcal{A} = \mathcal{C}(\mathbb{T})$ spojitých funkcií na $\mathbb{T}$ a jej samoadjungovaný podpriestor $S = \text{span}\{1, \text{id}, \overline{\text{id}}\}$. Ďalej uvažujme $M_2(\mathbb{C})$ ako priestor obmedzených operátorov na Hilbertovom priestore. Definujme lineárne zobrazenie $\varphi : S \longrightarrow M_2$ vzťahom

$$\varphi(a1 + b(\text{id}) + c(\overline{\text{id}})) := \begin{pmatrix} a & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{C}.$$

Ukážeme, že zobrazenie φ je pozitívne a nemá pozitívne rozšírenie na celú algebru $\mathcal{A}$.

Pozrime sa najskôr ako vyzerajú pozitívne prvky v S . Nech s je samoadjungovaný prvok S , tj. $s = s^*$. Potom nasledujúce riedky sa rovnajú

$$\begin{aligned} s &= a1 + b(\text{id}) + c(\overline{\text{id}}) \\ s^* &= (a1 + b(\text{id}) + c(\overline{\text{id}}))^* = \bar{a}1 + \bar{b}(\overline{\text{id}}) + \bar{c}(\text{id}), \end{aligned}$$

a teda $a = \bar{a}, c = \bar{b}$. Takže každý samoadjungovaný prvok môžeme napísať v tvare

$$\begin{aligned} s &= t1 + b(\text{id}) + \bar{b}(\overline{\text{id}}) \\ &= t1 + \frac{1}{2}(2b(\text{id}) + \overline{2b}(\overline{\text{id}})) \\ &= t1 + \text{Re}(2b(\text{id})), \quad t \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Prvok s je pozitívny, práve vtedy keď pre každé $\lambda \in \mathbb{T}$ je $s(\lambda) \geq 0$, čo je podľa predchádzajúcich úvah práve vtedy keď je $t + \text{Re}(2b\lambda) \geq 0$ pre každé $\lambda \in \mathbb{T}$, tj. práve vtedy keď $t \geq |2b|$.

Teraz ukážeme, že φ je pozitívne zobrazenie, takže pre každý pozitívny prvok $s \in S$ je $\varphi(s)$ pozitívny prvok v M_2 . Voľme $s \in S$ pozitívny, potom podľa definície a predchádzajúceho odstavca je

$$\varphi(s) = \varphi(t1 + b(\text{id}) + \bar{b}(\overline{\text{id}})) = \begin{pmatrix} t & 2b \\ \overline{2b} & t \end{pmatrix},$$

takže je to samoadjungovaný prvok v M_2 . Pozrime sa na spektrum tejto matice:

$$\det \begin{pmatrix} t - \lambda & 2b \\ \overline{2b} & t - \lambda \end{pmatrix} = (t - \lambda)^2 - |2b|^2 = 0 \iff (\lambda = t - |2b| \vee \lambda = t + |2b|).$$

Odtiaľ vidíme, že spektrum matice $\varphi(s)$ leží v nezápornej polosi reálnych čísel práve vtedy, keď $t \geq |2b|$, pretože v tom prípade je i číslo $t + |2b|$ nezáporné. Ako sme ukázali vyššie, pre pozitívne prvky z S táto podmienka platí vždy.

Nech existuje pozitívne lineárne zobrazenie $\varphi_1 : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \longrightarrow M_2$, ktoré rozširuje φ . Pretože $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ je komutatívna C^* -algebra, podľa Tvrdenia 1.42 je φ_1 úplne pozitívne a podľa Tvrdenia 1.45 musí pre jeho normu platiť $\|\varphi_1\| = \|\varphi_1(1)\|$. Dostávame

$$\|\varphi_1\| = \|\varphi_1(1)\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = 1,$$

ale

$$\|\varphi_1(\text{id})\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = 2,$$

čo je v spore s definíciou normy.

Tvrdenie 1.47. *Uvažujme C^* -algebru $\mathcal{A}$ a operátorový systém S , $e \in S$. Nech $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je lineárne zobrazenie, $\varphi(e) = I$. Potom φ je úplne pozitívne práve vtedy, keď je úplne kontraktívne.*

Dôkaz. Ak je φ úplne pozitívne, potom podľa Tvrdenia 1.45 je $\|\varphi_n\| = \|\varphi(e)\| = \|I\| = 1$, pre každé $n \in \mathbb{N}$, takže je úplne kontraktívne. Naopak, podľa Vety 1.44 má úplná kontrakcia, ktorá zachováva jednotku, úplne pozitívne rozšírenie na $\mathcal{A}$. Jeho restrikcia na S je teda úplne pozitívna a je to φ . $\square$

Kapitola 2

Nekomutatívny pohľad

2.1 Nekomutatívna Choquetova hranica

Definícia 2.1. Nech $\mathcal{A}$ je C^* -algebra generovaná systémom $S \subseteq \mathcal{A}$. Ireducibilnú reprezentáciu $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ nazveme *hraničná reprezentácia* vzhľadom k S , ak restrikcia $\pi|_S$ má jediné úplne pozitívne lineárne rozšírenie na celú algebru $\mathcal{A}$. Množinu všetkých hraničných reprezentácií danej C^* -algebry vzhľadom k S budeme značiť ∂S

Už vieme, že reprezentácie sú úplne pozitívne zobrazenia (viď Poznámka 1.35), takže úplne pozitívne rozšírenie restringovanej reprezentácie existuje vždy. V definícii hraničnej reprezentácie je teda kľúčová práve jednoznačnosť tohto rozšírenia.

Definícia 2.2. Nech $\{\sigma_x : x \in A\}$ je množina ireducibilných reprezentácií C^* -algebry $C^*(S)$. Hovoríme, že množina $\{\sigma_x : x \in A\}$ je *dostatočná pre S* , ak platí

$$\|(a_{ij})_{ij}\| = \sup_{x \in A} \|(\sigma_x(a_{ij}))_{ij}\|, \quad (a_{ij})_{ij} \in M_n(S), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Ďalej hovoríme, že systém S má *dostatočne mnoho hraničných reprezentácií*, ak je množina všetkých hraničných reprezentácií vzhľadom k S dostatočná pre S , tj.

$$\|(a_{ij})_{ij}\| = \sup_{\pi \in \partial S} \|(\pi(a_{ij}))_{ij}\|, \quad (a_{ij})_{ij} \in M_n(S), \quad n \in \mathbb{N},$$

kde ∂S značí množinu hraničných reprezentácií pre S .

Budeme potrebovať nasledujúcu vetu, ktorá dáva do vzťahu hraničné reprezentácie úplne izometrických C^* -algebier. Jej dôkaz je podrobne spísaný v [2, Theorem 2.1.2].

Veta 2.3. Nech $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1$ sú C^* -algebry s jednotkou $e \in \mathcal{A}$, resp. $e_1 \in \mathcal{A}_1$, a $S \subseteq \mathcal{A}$, $S_1 \subseteq \mathcal{A}_1$ sú ich lineárne podpriestory, $C^*(S) = \mathcal{A}$, $C^*(S_1) = \mathcal{A}_1$. Ďalej nech $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{A}_1$ je úplná izometria na, $\varphi(e) = e_1$ a nech ω je hraničná reprezentácia algebry $\mathcal{A}$ vzhľadom k S . Potom existuje hraničná reprezentácia ω_1 algebry $\mathcal{A}_1$ vzhľadom k S_1 tak, že

$$\omega_1 \circ \varphi(a) = \omega(a), \quad a \in S.$$

Definícia 2.4. Uvažujme C^* -algebru $\mathcal{A} = C^*(S)$, $e \in S$, a nech $J \subseteq \mathcal{A}$ je obojstranný ideál v $\mathcal{A}$, tj. pre každý prvok $a \in \mathcal{A}$ a $j \in J$ ležia prvky aj , ja opäť v J . Ideál J nazveme *hraničný ideál* pre S , ak kvocientové zobrazenie $q : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/J$ je úplná izometria na S . Ďalej hraničný ideál, ktorý obsahuje všetky ostatné hraničné ideály, sa nazýva *Šilov ideál* pre systém S .

Komutatívny prípad:

Definícia 2.5. Nech $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X)$ je komutatívna C^* -algebra, X je kompaktný Hausdorffov priestor. Nech S je podpriestor v $\mathcal{C}(X)$ obsahujúci konštanty, ktorý oddeľuje body X . Potom *hranicou* pre S sa nazýva najmenšia uzavretá množina $K \subseteq X$ taká, že

$$\sup\{|f(x)| : x \in K\} = \sup\{|f(x)| : x \in X\}, \quad f \in S. \quad (2.2)$$

Najmenšia uzavretá množina $K \subseteq X$ spĺňajúca (2.2) sa nazýva *Šilova hranica* pre S .

Ukážeme si, že Šilov ideál je zovšeobecnením Šilovej hranice pre nekomutatívne C^* -algebry.

Tvrdenie 2.6. Nech X , $\mathcal{A}$, S sú ako v predpokladoch Definície 2.5 a $K \subseteq X$ je uzavretá množina. Definujme

$$J_K := \{f \in \mathcal{C}(X) : f(x) = 0, x \in K\}. \quad (2.3)$$

Potom J_K je hraničný ideál pre S práve vtedy, keď K je hranica pre S . Ďalej, J_K je Šilov ideál pre S práve vtedy, keď K je Šilova hranica pre S .

Dôkaz. V prvom rade, J_K je zrejme uzavretý ideál v $\mathcal{C}(X)$. Nech J_K je hraničný ideál pre S , takže kvocientové zobrazenie

$$q : f \in \mathcal{C}(X) \mapsto [f] \in \mathcal{C}(X)/J_K$$

je úplná izometria na S . Potom pre $f \in S$ platí

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} |f(x)| &= \|f\|_{\mathcal{C}(X)} = \|[f]\|_{\mathcal{C}(X)/J_K} \\ &= \inf\{\|g\|_{\mathcal{C}(X)} : g \in \mathcal{C}(X), g(x) = f(x), x \in K\} = \sup_{x \in K} |f(x)|, \end{aligned}$$

kde posledná rovnosť platí pretože k funkcii $f \upharpoonright_K \in \mathcal{C}(K)$ podľa Tietzeho vety existuje $g \in \mathcal{C}(X)$ tak, že na K je $g = f \upharpoonright_K = f$ a $\sup |g(X)| = \sup |f(K)|$.

Naopak, ak platí podmienka $\sup |f(K)| = \sup |f(X)|$, potom dostávame, že q je izometria S na svoj obraz v $\mathcal{C}(X)/J_K$. Naviac, kvocientové zobrazenie je pozitívne a obraz q je komutatívna C^* -algebra $\mathcal{C}(X)/J_K$, takže podľa Tvrdenia 1.41 je q úplne pozitívne a pretože zachováva jednotku, je to úplná kontrakcia (Tvrdenie 1.47). Použijeme rovnaké úvahy pre zobrazenie q^{-1} , čo je opäť pozitívne zobrazenie do komutatívnej C^* -algebry $\mathcal{C}(X)$, takže je úplne pozitívne a teda úplne kontraktívne. Máme, že q i q^{-1} sú úplne kontraktívne a teda $q : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X)/J_K$ je úplná izometria na S , čo znamená, že J_K je hraničný ideál. Napokon priamo z definície J_K je vidieť, že množina K je najmenšia práve vtedy, keď je ideál J_K najväčší. $\square$

2.2 Formulácia problému

Motivácia - komutatívny prípad:

Definícia 2.7. Nech $S \subseteq \mathcal{C}(X)$, X je kompaktný Hausdorffov priestor. Pre $x \in X$ definujeme množinu reprezentujúcich mier na S

$$M_x = \{\mu \in \mathcal{M}^1(X) : f(x) = \mu(f), f \in S\},$$

kde $\mathcal{M}^1(X)$ je priestor pravdepodobnostných mier na X a zápisom $\mu(f)$ myslíme $\int_X f d\mu$. Pre S definujeme *Choquetovu hranicu* ako množinu tých bodov $x \in X$, pre ktoré je Dirakova miera jediná reprezentujúca miera na S . Píšeme

$$\text{ch}_S X = \{x \in X : M_x = \{\varepsilon_x\}\}.$$

O existencii Choquetovej hranice hovorí nasledujúce tvrdenie, dôkaz sa dá nájsť napríklad v [1, Tvrdenie 1.5.4].

Tvrdenie 2.8. *Choquetova hranica $\text{ch}_S X$ je vždy neprázdna množina.*

Výsledok, ktorý chceme zovšeobecniť pre nekomutatívne C^* -algebry (dá sa nájsť napríklad v [11, Proposition 6.4]):

Veta 2.9. *Nech M je lineárny podpriestor v $\mathcal{C}(X)$, ktorý obsahuje konštanty a oddeľuje body X . Potom uzáver Choquetovej hranice je Šilova hranica pre M .*

Poznámka 2.10. Veta 2.9 v sebe okrem iného obsahuje informáciu o existencii Šilovej hranice.

Naším cieľom teraz bude rozšíriť problematiku Vety 2.9 pre nekomutatívne C^* -algebry. Uvažujme našu situáciu, tj. máme operátorový systém S generujúci C^* -algebru $\mathcal{A} = C^*(S)$. Bude nás zaujímať, či

$$\begin{aligned} &\text{prienik jadier všetkých hraničných reprezentácií algebry } \mathcal{A} \text{ vzhľadom} \\ &\text{ k } S \text{ je Šilov ideál pre } S. \end{aligned} \tag{2.4}$$

I keď to tak na prvý pohľad nevyzerá, ukážeme si, že práve táto otázka je nekomutatívnou formuláciou uvedeného výsledku z teórie komutatívnych C^* -algebier (Vety 2.9).

Uvažujme teda $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X)$, $S \subseteq \mathcal{A}$ je ako v predpokladoch Vety 2.9. Už vieme, že ireducibilné reprezentácie sú práve zobrazenia $\varphi_x : f \in \mathcal{A} \mapsto f(x)$, $x \in X$ (v zmysle Poznámky 1.24). Z nich hraničné reprezentácie vzhľadom k S sú φ_x prislúchajúce tým bodom $x \in X$, pre ktoré existuje jediná reprezentujúca miera vzhľadom k S , tj. $M_x = \{\varepsilon_x\}$. Totiž, ak pre nejaké $x \in X$ existuje $\mu_x \in M_x$, $\mu_x \neq \varepsilon_x$, potom $\mu_x(f) = f(x) = \varepsilon_x(f)$ pre $f \in S$, a teda μ_x, ε_x sú dve pozitívne rozšírenia $\varphi_x \upharpoonright_S$ na $\mathcal{A}$. A pretože $\mathcal{A}$ je komutatívna C^* -algebra, sú úplne pozitívne podľa Tvrdenia 1.42. Takže hraničné reprezentácie $\mathcal{C}(X)$ vzhľadom k S sú

$$\partial S = \{\varphi_x : x \in \text{ch}_S X\}.$$

Označme

$$K := \bigcap_{\omega \in \partial S} \ker \omega = \{f \in \mathcal{C}(X) : f|_{\text{ch}_S X} = 0\} = \{f \in \mathcal{C}(X) : f|_{\overline{\text{ch}_S X}} = 0\}.$$

Takže K je presne ideál $J_{\overline{\text{ch}_S X}}$ prislúchajúci uzavretej množine $\overline{\text{ch}_S X}$ definovaný vzťahom (2.3). Podľa Tvrdenia 2.6 je K Šilov ideál pre S práve vtedy, keď $\overline{\text{ch}_S X}$ je Šilova hranica pre S . Čiže znenie Vety 2.9 preformulované do nekomutatívneho jazyka je nasledovné: *Pre lineárny podpriestor M v $\mathcal{C}(X)$, ktorý obsahuje konštanty a oddeľuje body X platí, že prienik všetkých hraničných reprezentácií C^* -algebry $\mathcal{C}(X)$ vzhľadom S je Šilov ideál pre S .*

Spolu s Poznámkou 2.10 teda máme existenciu Šilovho ideálu pre komutatívne C^* -algebry. Nás bude zaujímať, pre aké podpriestory S nekomutatívnych C^* -algebier tento výrok zostane v platnosti. Staré výsledky dávajú kladnú odpoveď pre tzv. *prípustné podpriestory* - viď Veta 2.14. Tieto výsledky publikoval William Arveson už v roku 1969 v [2, Sekcia 2.2].

2.3 Prípustné podpriestory

Definícia 2.11. Nech S je lineárny podpriestor generujúci C^* -algebru $\mathcal{A}$. S nazývame *prípustný podpriestor* $\mathcal{A}$, ak prienik jadier hraničných reprezentácií algebry $\mathcal{A}$ vzhľadom k S je hraničný ideál.

Tvrdenie 2.12. S je *prípustný podpriestor* v $\mathcal{A}$ práve vtedy keď platí

$$\|(a_{ij})\|_{M_n(\mathcal{A})} = \sup_{\omega \in \partial S} \|(\omega(a_{ij}))\|_{\mathcal{B}(H_\omega^n)}, \quad (a_{ij}) \in M_n(S), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.5)$$

kde H_ω je Hilbertov priestor prislúchajúci reprezentácii $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H_\omega)$.

Dôkaz. Označme $K := \bigcap_{\omega \in \partial S} \ker \omega$. Potom K je ideál v $\mathcal{A}$ a teda kvocient $\mathcal{A}/K$ je C^* -algebra. Ukážeme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnosť

$$\|(q(a_{ij}))\|_{M_n(\mathcal{A}/K)} = \sup_{\omega \in \partial S} \|(\omega(a_{ij}))\|_{\mathcal{B}(H_\omega^n)}, \quad (a_{ij}) \in M_n(\mathcal{A}), \quad (2.6)$$

kde $q : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/K$ značí kvocientové zobrazenie.

K tomu vezmeme direktnú sumu všetkých hraničných reprezentácií $\tau = \oplus\{\omega : \omega \in \partial S\}$, tzn. τ zobrazuje $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}(\oplus_\omega H_\omega)$. Vďaka vzťahom (1.1) je τ tiež reprezentáciou C^* -algebry $\mathcal{A}$. Definujme ďalej zobrazenie $\tilde{\tau}$ pomocou

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} : \mathcal{A}/K &\longrightarrow \mathcal{B}(\oplus_\omega H_\omega) \\ q(a) &\longmapsto \tau(a). \end{aligned}$$

Potom τ je dobre definované. Totiž ak $\tau(a) \neq \tau(b)$ pre nejaké $a, b \in \mathcal{A}$, podľa definície τ to znamená, že existuje $\omega \in \partial S$, pre ktoré $\omega(a) \neq \omega(b)$ a teda $a - b \notin \ker \omega$. Takže prvky a, b ležia v rôznych triedach ekvivalencie kvocientu $\mathcal{A}/K$.

Keď zopakujeme tú istú úvahu odzadu, zistíme, že $\tilde{\tau}$ je prosté a teda je to verná reprezentácia C^* -algebry $\mathcal{A}/K$. Podľa Poznámky 1.14 je to izometria, tj.

$$\|q(a)\|_{\mathcal{A}/K} = \|\tilde{\tau}(q(a))\|_{\mathcal{B}(\oplus_{\omega} H_{\omega})}, \quad a \in \mathcal{A}.$$

Rovnako to vyjde na vyšších úrovniach: Pre pevné $n \in \mathbb{N}$ je $\tilde{\tau}_n$ reprezentácia $M_n \otimes \mathcal{A}/K$ na $(\oplus_{\omega} H_{\omega})^n$ (viď Poznámka 1.36), ktorá je verná, pretože

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_n(q(b_{ij})) = \tilde{\tau}_n(q(a_{ij})) &\iff (\tau(b_{ij}))_{ij} = (\tau(a_{ij}))_{ij} \\ &\iff \tau(b_{ij}) = \tau(a_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n \\ &\iff q(a_{ij}) = q(b_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n \\ &\iff (q(a_{ij}))_{ij} = (q(b_{ij}))_{ij}. \end{aligned}$$

Takže $\tilde{\tau}$ je úplná izometria, čiže máme rovnosť

$$\|(q(a_{ij}))\|_{M_n(\mathcal{A}/K)} = \|\tilde{\tau}_n(q(a_{ij}))\|_{\mathcal{B}(H^n)}, \quad (a_{ij}) \in M_n(\mathcal{A}), \quad (2.7)$$

kde $H := \oplus_{\omega} H_{\omega}$.

Využijeme ďalšiu z vlastností direktnej sumy operátorov (1.1), konkrétne vlastnosť normy:

$$\|\tau(a)\| = \sup_{\omega \in \partial S} \|\omega(a)\|, \quad a \in \mathcal{A}.$$

Odtiaľ spolu s rovnosťou (2.7) dostávame

$$\|q(a)\|_{\mathcal{A}/K} = \|\tilde{\tau}(q(a))\|_{\mathcal{B}(H)} = \|\tau(a)\|_{\mathcal{B}(H)} = \sup_{\omega \in \partial S} \|\omega(a)\|_{\mathcal{B}(H_{\omega})}, \quad a \in \mathcal{A},$$

čo je požadovaná rovnosť (2.6) pre $n = 1$.

Pre $n > 1$ si stačí rozmyslieť, že

$$\tau_n = \oplus \omega_n. \quad (2.8)$$

Keď to dokážeme, potom rovnako ako pre $n = 1$ máme

$$\|\tau_n((a_{ij}))\|_{\mathcal{B}(H^n)} = \sup_{\omega \in \partial S} \|\omega_n((a_{ij}))\|_{\mathcal{B}(H_{\omega}^n)}$$

a opäť spolu s (2.7) dostaneme rovnosť (2.6) výpočtom

$$\begin{aligned} \|(q(a_{ij}))\|_{M_n(\mathcal{A}/K)} &= \|\tilde{\tau}_n(q(a_{ij}))\|_{\mathcal{B}(H^n)} \\ &= \|(\tilde{\tau}(q(a_{ij})))_{ij}\|_{\mathcal{B}(H^n)} \\ &= \|(\tau(a_{ij}))_{ij}\|_{\mathcal{B}(H^n)} \\ &= \|\tau_n((a_{ij})_{ij})\|_{\mathcal{B}(H^n)} \\ &= \sup_{\omega \in \partial S} \|\omega_n((a_{ij})_{ij})\|_{\mathcal{B}(H_{\omega}^n)} \\ &= \sup_{\omega \in \partial S} \|(\omega(a_{ij}))_{ij}\|_{\mathcal{B}(H_{\omega}^n)}. \end{aligned}$$

Ukážme si prečo platí (2.8). V prvok kroku si uvedomíme, že môžeme stotožniť priestory $\oplus_{\omega}(H_{\omega}^n) = (\oplus_{\omega} H_{\omega})^n$. Nech $\xi \in \oplus_{\omega}(H_{\omega}^n)$, tzn. $\xi = \{\xi_{\omega}\}_{\omega \in \partial S}$ pre $\xi_{\omega} \in H_{\omega}^n$, a teda $\xi_{\omega} = (\xi_{\omega}^1, \dots, \xi_{\omega}^n)$ pre $\xi_{\omega}^i \in H_{\omega}$, $i = 1, \dots, n$. Potom prvok $(\{\xi_{\omega}^1\}_{\omega}, \dots, \{\xi_{\omega}^n\}_{\omega})$ leží v $(\oplus_{\omega} H_{\omega})^n$ a platí:

$$\begin{aligned} \|(\{\xi_{\omega}^1\}_{\omega}, \dots, \{\xi_{\omega}^n\}_{\omega})\|_{(\oplus_{\omega} H_{\omega})^n}^2 &= \sum_{i=1}^n \| \{\xi_{\omega}^i\}_{\omega} \|_{\oplus_{\omega} H_{\omega}}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{\omega \in \partial S} \|\xi_{\omega}^i\|_{H_{\omega}}^2 \\ &= \sum_{\omega \in \partial S} \sum_{i=1}^n \|\xi_{\omega}^i\|_{H_{\omega}}^2 \\ &= \sum_{\omega \in \partial S} \|\xi_{\omega}\|_{H_{\omega}}^2 = \|\xi\|_{\oplus_{\omega}(H_{\omega})^n}^2. \end{aligned}$$

Z definície direktnej sumy Hilbertových priestorov máme zaručenú konvergenciu sumy $\sum_{\omega \in \partial S} \|\xi_{\omega}^i\|_{H_{\omega}}^2$, druhá suma je konečná, takže sumy vo výpočte sme mohli prehodiť.

V druhom kroku sa pozrieme ako fungujú operátory $(\oplus_{\omega} \omega_n)((a_{ij})) : \oplus_{\omega}(H_{\omega}^n) \longrightarrow \oplus_{\omega}(H_{\omega}^n)$, resp. $\tau_n((a_{ij})) : (\oplus_{\omega} H_{\omega})^n \longrightarrow (\oplus_{\omega} H_{\omega})^n$, pre $(a_{ij}) \in M_n(\mathcal{A})$. Pre ξ a jeho zložky ako vyššie máme:

$$\begin{aligned} (\oplus_{\omega} \omega_n)((a_{ij}))\xi &= \left(\begin{array}{ccc} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & (\omega(a_{ij}))_{i,j=1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{array} \right)_{\omega} \left(\begin{array}{c} \vdots \\ (\xi_{\omega}^i)_{i=1}^n \\ \vdots \end{array} \right)_{\omega} \\ &= \left(\begin{array}{c} \vdots \\ (\omega(a_{ij}))_{i,j=1}^n (\xi_{\omega}^i)_{i=1}^n \\ \vdots \end{array} \right)_{\omega} \\ &= \left(\begin{array}{c} \vdots \\ (\sum_{k=1}^n \omega(a_{ik} \xi_{\omega}^k))_{i=1}^n \\ \vdots \end{array} \right)_{\omega} \in \oplus_{\omega}(H_{\omega}^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_n((a_{ij})) \begin{pmatrix} \{\xi_{\omega}^1\}_{\omega} \\ \vdots \\ \{\xi_{\omega}^n\}_{\omega} \end{pmatrix} &= (\tau(a_{ij}))_{i,j=1}^n \begin{pmatrix} \{\xi_{\omega}^1\}_{\omega} \\ \vdots \\ \{\xi_{\omega}^n\}_{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \tau(a_{1k})(\{\xi_{\omega}^k\}_{\omega}) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \tau(a_{nk})(\{\xi_{\omega}^k\}_{\omega}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \{\sum_{k=1}^n \omega(a_{1k} \xi_{\omega}^k)\}_{\omega} \\ \vdots \\ \{\sum_{k=1}^n \omega(a_{nk} \xi_{\omega}^k)\}_{\omega} \end{pmatrix} \in (\oplus_{\omega} H_{\omega})^n \end{aligned}$$

Keď porovnáme tieto dva výsledky, zistíme, že sú rovnaké vzhľadom na rovnosť priestorov $\oplus_{\omega}(H_{\omega}^n) = (\oplus_{\omega} H_{\omega})^n$ z prvého kroku.

Teraz sa už venujme dokazovanému tvrdeniu. Ak S je prípustný podpriestor, podľa definície je q úplná izometria na S a teda pre každé $n \in \mathbb{N}$ a $(a_{ij}) \in M_n(S)$

máme spolu s rovnosťou (2.6)

$$\|(a_{ij})\|_{M_n(\mathcal{A})} = \|q_n((a_{ij}))\|_{M_n(\mathcal{A}/K)} = \|(q(a_{ij}))\|_{M_n(\mathcal{A}/K)} = \sup_{\omega \in \partial S} \|(\omega(a_{ij}))\|_{\mathcal{B}(H_\omega^n)}.$$

Na druhú stranu, ak pre S platí podmienka (2.5), potom vďaka dokázanej rovnosti 2.6 dostaneme pre každé $n \in \mathbb{N}$ a $(a_{ij}) \in M_n(S)$ výpočet

$$\|q_n((a_{ij}))\|_{M_n(\mathcal{A}/K)} = \|(q(a_{ij}))\|_{M_n(\mathcal{A}/K)} = \sup_{\omega \in \partial S} \|(\omega(a_{ij}))\|_{\mathcal{B}(H_\omega^n)} = \|(a_{ij})\|_{M_n(\mathcal{A})}$$

a teda požadované kvocientové zobrazenie je úplná izometria na S . $\square$

Nasledujúce výsledky sú prevzaté z [2, Proposition 2.2.3 a Theorem 2.2.3].

Tvrdenie 2.13. *Nech J je hraničný ideál pre systém $S \subseteq \mathcal{A} = C^*(S)$, $\omega \in \partial S$. Potom $J \subseteq \ker \omega$.*

Dôkaz. Podľa predpokladu je kvocientové zobrazenie $q : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/J$ na systéme S úplná izometria. Takže zobrazenie $q \upharpoonright_S$ je úplná izometria S na $q(S)$ a platí $(q \upharpoonright_S)(e) = e$. Podľa Vety 2.3 k ω existuje hraničná reprezentácia ω_1 C^* -algebry $\mathcal{A}/J$ vzhľadom ku $q(S)$ tak, že $\omega = \omega_1 \circ q$ na S . Pretože S generuje $\mathcal{A}$ a ω , $\omega_1 \circ q$ sú $*$ -homomorfizmy, je $\omega = \omega_1 \circ q$ na $\mathcal{A}$. Odtiaľ pre $x \in J = \ker q$ máme $\omega(x) = \omega_1(q(x)) = 0$, takže $x \in \ker \omega$. $\square$

Existencia Šilovho ideálu pre prípustné podpriestory:

Veta 2.14. *Nech S je prípustný podpriestor C^* -algebry $\mathcal{A} = C^*(S)$. Označme*

$$K = \bigcap_{\omega \in \partial S} \ker \omega.$$

Potom K je Šilov ideál pre S .

Dôkaz. Pretože S je prípustný podpriestor, podľa definície je K hraničný ideál. Nech J je ľubovoľný hraničný ideál pre S . Podľa predchádzajúceho tvrdenia je $J \subseteq \ker \omega$, pre každú hraničnú reprezentáciu $\omega \in \partial S$, takže $J \subseteq K$. $\square$

Kapitola 3

Maximálne UCP zobrazenia

V tejto kapitole sa budeme zaoberať úplne pozitívnymi zobrazeniami, ktoré zachovávajú jednotku. Skrátene budeme písať UCP* zobrazenia. Symbol S bude značiť vždy operátorový systém v C^* -algebre $\mathcal{A}$, H bude vyhradené pre Hilbertove priestory. Táto pasáž je spracovaná na základe 2.sekcie článku [4].

Definícia 3.1. $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ nazývame *UCP zobrazenie* ak je úplne pozitívne a $\varphi(e) = I$.

Pozorovanie 3.2. *Nech $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je UCP zobrazenie. Potom $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$, pre $x \in S$.*

Dôkaz. Podľa Vety 1.43 existuje úplne pozitívne zobrazenie $\varphi_1 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ tak, že $\varphi_1 \upharpoonright_S = \varphi$. Pre φ_1 zo Stinespringovej vety (Veta 1.37) existuje reprezentácia $\pi : S \longrightarrow \mathcal{B}(K)$, kde K je nejaký Hilbertov priestor, a operátor $V \in \mathcal{B}(H, K)$ tak, že $\varphi_1(a) = V^*\pi(a)V$ pre každé $a \in \mathcal{A}$. Keďže φ_1 je rozšírenie pre φ , platí $\varphi(a) = V^*\pi(a)V$ pre $a \in S$. Napokon, pretože π je *-homomorfizmus, dostávame

$$\varphi(a)^* = (V^*\pi(a)V)^* = V^*\pi(a)^*V = V^*\pi(a^*)V = \varphi(a^*), \quad a \in S.$$

□

Poznámka 3.3. Pozrime sa ešte, čo hovorí Stinespringova veta špeciálne pre UCP zobrazenia. Nech je teda $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ úplne pozitívne zobrazenie zachovávajúce jednotku. Uvažujme reprezentáciu π do operátorov na príslušnom Hilbertovom priestore K a operátor $V \in \mathcal{B}(H, K)$ spĺňajúce $\varphi(a) = V^*\pi(a)V$, pre každé $a \in \mathcal{A}$. Potom špeciálne pre jednotku $e \in \mathcal{A}$ je

$$I = \varphi(e) = V^*\pi(e)V = V^*V, \tag{3.1}$$

takže V je izometrické vnorenie H do K , pretože pre $x \in H$ je

$$\|Vx\|^2 = (Vx, Vx) = (x, V^*Vx) = (x, x) = \|x\|^2.$$

*Skratka UCP pochádza z výrazu *unital completely positive*.

To znamená, že pomocou V sa môžeme na H dívať ako na podpriestor K . Adjunkciu V^* potom môžeme vnímať ako ortogonálnu projekciu $P_H : K \longrightarrow H$. Totiž pre vďaka rovnosti (3.1) máme

$$(VV^*)^2 = VV^*VV^* = VIV^* = VV^*,$$

takže VV^* je ortogonálna projekcia K na VH . Stinespringova veta teda hovorí, že každé UCP zobrazenie $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ má tvar $\varphi(a) = P_H \pi(a) \upharpoonright_H$, $a \in \mathcal{A}$, kde π je vhodná reprezentácia C^* -algebry $\mathcal{A}$. Napokon, pre normu UCP zobrazenia to znamená, že $\|\varphi\| \leq \|\pi\|$ a to je podľa Poznámky 1.5 nanajvyš 1.

Podľa Vety 1.43 už vieme, že UCP zobrazenie $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ má úplne pozitívne rozšírenie na $C^*(S)$. Ďalej nás budú zaujímať také UCP zobrazenia, pre ktoré je toto rozšírenie multiplikatívne a jednoznačne určené.

Definícia 3.4. Majme C^* -algebru $\mathcal{A} = C^*(S)$. Hovoríme, že UCP zobrazenie $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ má *vlastnosť jednoznačného rozšírenia*, ak má jediné úplne pozitívne rozšírenie $\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ a toto $\tilde{\varphi}$ je reprezentáciou algebry $\mathcal{A}$.

Poznámka 3.5. UCP zobrazenie $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ má vlastnosť jednoznačného rozšírenia práve vtedy, keď každé úplne pozitívne rozšírenie zobrazenia φ na $\mathcal{A}$ je multiplikatívne. Totiž ak φ má vlastnosť jednoznačného rozšírenia, potom jeho rozšírenie na $\mathcal{A}$ je podľa Definície 3.4 reprezentácia a teda je určite multiplikatívne. Na druhú stranu, ak je nejaké úplne pozitívne rozšírenie pre φ multiplikatívne, je to už reprezentácia vďaka Pozorovaniu 3.2. Navyše toto rozšírenie je jednoznačné, pretože podľa predpokladu systém S generuje C^* -algebru $\mathcal{A}$.

Definícia 3.6. Pre UCP zobrazenia definujeme čiastočné usporiadanie $\preceq$ takto: Nech $\varphi_1 : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_1)$, $\varphi_2 : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_2)$ sú UCP, píšeme $\varphi_1 \preceq \varphi_2$, ak

$$H_1 \subseteq H_2 \quad \& \quad P_{H_1} \varphi_2(x) \upharpoonright_{H_1} = \varphi_1(x), \quad x \in S,$$

kde P_{H_1} značí ortogonálnu projekciu na podpriestor H_1 .

V tomto prípade nazveme φ_1 *kompresiou* φ_2 a naopak φ_2 *dilatáciou* φ_1 .

Pozorovanie 3.7. Nech $\psi : S \longrightarrow \mathcal{B}(K)$ je UCP zobrazenie, a H je podpriestor Hilbertovho priestoru K . Potom zobrazenie $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ definované

$$\varphi(x) := P_H \psi(x) \upharpoonright_H, \quad x \in S,$$

je opäť UCP zobrazenie.

Dôkaz. Okamžite z definície je vidieť, že φ zachováva jednotku a tiež že je pozitívne, pretože projekcia je pozitívne zobrazenie:

$$(P_H x, x) = (P_H x, P_H x) = \|P_H x\|^2 \geq 0, \quad x \in K.$$

Fixujme teda $n \in \mathbb{N}$ a uvažujme maticu $(a_{ij}) \in M_n(S)$. Voľme ľubovoľné $\xi \in H^n$, potom potrebujeme ukázať, že $(\varphi_n((a_{ij}))\xi, \xi)_{H^n} \geq 0$. Počítajme

$$\begin{aligned} (\varphi_n((a_{ij}))\xi, \xi)_{H^n} &= ((\varphi(a_{ij}))\xi, \xi)_{H^n} = \left(\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \varphi(a_{1k})\xi_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \varphi(a_{nk})\xi_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \right)_{H^n} \\ &= \sum_{k,l=1}^n (\varphi(a_{lk})\xi_k, \xi_l)_H = \sum_{k,l=1}^n (P_H \psi(a_{lk})\xi_k, \xi_l)_H \end{aligned}$$

Potom toto číslo je nezáporné, pretože ψ je podľa predpokladu úplne pozitívne takže

$$0 \leq (\psi_n((a_{ij}))\xi, \xi)_{K^n} = ((\psi(a_{ij}))\xi, \xi)_{K^n} = \sum_{k,l=1}^n (\psi(a_{lk})\xi_k, \xi_l)_K.$$

□

Poznámka 3.8. Pre UCP zobrazenia $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$, $\psi : S \longrightarrow \mathcal{B}(K)$ uvažujme zobrazenie $\varphi \oplus \psi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H \oplus K)$, ktoré bodu $x \in S$ priradí operátor $(\varphi \oplus \psi)(x)$ definovaný na algebraickom súčte Hilbertových priestorov H, K vzťahom

$$(\varphi \oplus \psi)(x)\xi = \varphi(x)P_H\xi + \psi(x)P_K\xi,$$

kde P_H, P_K sú projekcie na príslušné podpriestory. Takto definované zobrazenie $\varphi \oplus \psi$ je dilatáciou φ i ψ , pretože

$$(\varphi \oplus \psi)(x)\xi = \underbrace{\varphi(x)P_H\xi}_{\in H} + \underbrace{\psi(x)P_K\xi}_{\in K}$$

a teda pre $x \in S$ je $(\varphi \oplus \psi)(x) \upharpoonright_H = \varphi(x) \in \mathcal{B}(H)$, takže $P_H(\varphi \oplus \psi)(x) \upharpoonright_H = \varphi(x)$. Analogicky $P_K(\varphi \oplus \psi)(x) \upharpoonright_K = \psi(x)$, $x \in S$.

Definícia 3.9. Nech φ je UCP zobrazenie. Dilatáciu $\varphi' \succeq \varphi$ nazývame *triviálna*, ak existuje UCP zobrazenie ψ tak, že $\varphi' = \varphi \oplus \psi$. Ďalej hovoríme, že zobrazenie φ je *maximálne*, ak je každá jeho dilatácia triviálna.

Poznámka 3.10. Maximálne zobrazenie sa dá ekvivalentne definovať nasledovne: UCP zobrazenie $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je *maximálne*, ak pre každú jeho dilatáciu $\varphi' : S \longrightarrow \mathcal{B}(H')$ platí, že $\varphi'(S)H \subseteq H$. Totiž za predpokladu, že φ maximálne v zmysle Definície 3.9 a $\varphi' \succeq \varphi$, potom existuje Hilbertov priestor K a UCP zobrazenie $\psi : S \longrightarrow \mathcal{B}(K)$, že $\varphi' = \varphi \oplus \psi$. Podľa definície $\varphi \oplus \psi$ je $\varphi(S)H \subseteq H$, $\psi(S)H = \{0\}$, takže $\varphi'(S)H = \varphi(S)H \oplus \psi(S)H \subseteq H$. Na druhú stranu, ak $\varphi'(S)H \subseteq H$, potom pre $x \in S$ je $\varphi'(x) \upharpoonright_H \in \mathcal{B}(H)$. Nájdeme Hilbertov priestor K , ktorý je algebraickým doplnkom H v H' a položíme $\psi(x) := \varphi'(x) \upharpoonright_K$. Potom $\varphi' = \varphi \oplus \psi$ a teda φ' je triviálna dilatácia φ .

Poznámka 3.11 (odstavce za definíciou 2.2 v článku). Obidve uvedené definície maximality požadujú aby príslušnú podmienku spĺňali všetky dilatácie daného zobrazenia. Všimnime si, že je možné sa obmedziť na špeciálne dilatácie. *UCP zobrazenie* $\varphi_1 : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_1)$ je maximálne práve vtedy, keď je splnená podmienka: Ak $\varphi_2 : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_2)$ je dilatácia pre φ_1 , pre ktorú je $H_2 = C^*(\varphi_2(S))H_1 := \{\psi(\xi) : \psi \in C^*(\varphi_2(S)), \xi \in H_1\}$, potom $H_1 = H_2$ a teda $\varphi_2 = \varphi_1$.

Najskôr si uvedomme, že $H_2 \supseteq H_1$ a teda táto podmienka má zmysel. Ale pretože S obsahuje jednotku a φ_2 ju zachováva, množina $C^*(\varphi_2(S)) \subseteq \mathcal{B}(H_2)$ obsahuje identitický operátor a teda určite $H_1 \subseteq C^*(\varphi_2(S))H_1 = H_2$. Nech je teda φ_1 maximálne a φ_2 je jeho dilatácia na $H_2 = C^*(\varphi_2(S))H_1$. Z ekvivalentnej definície (Poznámka 3.10) je priestor H_1 $\varphi_2(S)$ -invariantný, čiže aj $C^*(\varphi_2(S))$ -invariantný. Takže $H_2 \subseteq H_1$ a teda máme rovnosť priestorov H_2 a H_1 , čo vedie priamo k rovnosti zobrazení φ_1, φ_2 .

Na druhú stranu, nech pre φ_1 platí uvedená podmienka a nech $\varphi' : S \longrightarrow \mathcal{B}(H')$ je ľubovoľná dilatácia pre φ_1 . Potrebujeme ukázať, že je triviálna. V prípade, že $H' = C^*(\varphi'(S))H_1$, platí tvrdenie ihneď. Uvažujme teda len prípad $H' \supsetneq C^*(\varphi'(S))H_1$. Položme $H_2 = C^*(\varphi'(S))H_1$ a definujme

$$\varphi_2(s) := \varphi'(s) \upharpoonright_{H_2}, \quad \psi(s) := \varphi'(s) \upharpoonright_{H_2^\perp}, \quad s \in S,$$

kde $H_2^\perp$ značí ortogonálny doplnok H_2 v H' . Takto definované zobrazenia φ_2, φ' sú podľa Pozorovania 3.7 UCP a sú to zobrazenia do $\mathcal{B}(H_2)$, respektíve $\mathcal{B}(H_2^\perp)$, pretože priestory $H_2, H_2^\perp$ sú $C^*(\varphi'(S))$ -invariantné. To plynie ihneď z definície priestoru H_2 . Potom určite $\varphi_2 \succeq \varphi_1$. Zostáva si rozmyslieť, že $H_2 = C^*(\varphi_2(S))H_1$, odtiaľ už dostaneme $\varphi' = \varphi_2 \oplus \psi = \varphi_1 \oplus \psi$. Ale pretože podľa definície sa pre každé $s \in S$ operátory $\varphi'(s)$ a $\varphi_2(s)$ rovnajú špeciálne na H_1 , platí na H_1 tiež rovnosť $C^*(\varphi'(S)) = C^*(\varphi_2(S))$ a teda $C^*(\varphi'(S))H_1 = C^*(\varphi_2(S))H_1$.

Poznámka 3.12. Nech H je separabilný Hilbertov priestor, S separabilný operátorový systém a $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je UCP zobrazenie. Potom každá jeho maximálna dilatácia $\varphi' : S \longrightarrow \mathcal{B}(H')$ na Hilbertovom priestore H' sa dá napísať ako $\varphi' = \tilde{\varphi} \oplus \lambda$, kde $\tilde{\varphi}$ je maximálna dilatácia pre φ na nejakom separabilnom Hilbertovom priestore $\tilde{H} \supseteq H$ a λ je nejaké UCP zobrazenie. To plynie okamžite z úvah v Poznámke 3.11, pretože pre separabilný priestor H a separabilný operátorový systém S je tiež priestor $\tilde{H} := C^*(\varphi'(S))H$ separabilný. Potom stačí položiť $\tilde{\varphi}(s) := P_{\tilde{H}}\varphi'(s) \upharpoonright_{\tilde{H}}$ a $\lambda(s) := P_{\tilde{H}^\perp}\varphi'(s) \upharpoonright_{\tilde{H}^\perp}$, $s \in S$.

Tvrdenie 3.13. *UCP zobrazenie $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je maximálne práve vtedy, keď má vlastnosť jednoznačného rozšírenia.*

V dôkaze uvedeného tvrdenia využijeme akúsi zovšeobecnenú Schwarzovu nerovnosť, ktorá je priamym dôsledkom Stinespringovej vety. Spísané na základe [6, str. 85]

Lema 3.14. *Nech $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je úplne pozitívne úplne kontraktívne zobrazenie. Potom pre každé $x \in \mathcal{A}$ platí nerovnosť*

$$\varphi(a)^*\varphi(a) \leq \varphi(a^*a).$$

Dôkaz. Podľa Stinespringovej vety (Veta 1.37) píšme $\varphi(a) = V^*\pi(a)V$, $a \in \mathcal{A}$, kde $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(K)$ je reprezentácia a $V \in \mathcal{B}(H, K)$. Z konštrukcie operátora V (viď dôkaz Vety 1.37) je $\|V\xi\|^2 = (\varphi(e)\xi, \xi) \leq \|\varphi(e)\|\|\xi\|^2$ a teda pre úplne kontraktívne φ je V kontrakcia. Dostávame

$$((I - VV^*)\xi, \xi) = (\xi, \xi) - (VV^*\xi, \xi) = \|\xi\|^2 - \|V^*\xi\|^2 = \|\xi\|^2 - \|V\xi\|^2 \geq 0,$$

kde I značí identitu na H . Teda operátor $I - VV^*$ je pozitívny, čo znamená $VV^* \leq I$. Vďaka tomu už získame požadovanú nerovnosť:

$$\varphi(a)^*\varphi(a) = V^*\pi(a)^*VV^*\pi(a)V \leq V^*\pi(a)^*\pi(a)V = V^*\pi(a^*a)V = \varphi(a^*a).$$

□

Dôkaz Tvrdenia 3.13. Predpokladajme, že φ je maximálne a $\varphi' : C^*(S) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ je nejaké jeho úplne pozitívne rozšírenie. Potrebujeme ukázať, že φ' je multiplikatívne. Podľa Stinespringovej vety (Veta 1.37) existuje Hilbertov priestor K , reprezentácia $\pi : C^*(S) \rightarrow \mathcal{B}(K)$ a operátor $V \in \mathcal{B}(H, K)$ tak, že $\varphi'(x) = V^*\pi(x)V$, $x \in C^*(S)$. Pretože φ zachováva jednotku, je $I = \varphi(e) = V^*\pi(e)V = V^*V$. Podľa Poznámky 3.3 môžeme chápať H ako podpriestor v K a adjunkciu V^* ako projekciu na H čiže máme prepis $\varphi'(x) = P_H\pi(x) \upharpoonright_H$, $x \in C^*(S)$, čo znamená, že $\pi \succeq \varphi'$. Naviac, bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $K = \text{span}\{\pi(C^*(S))H\}$. Totiž ak by sme uvažovali $K_0 := \text{span}\{\pi(C^*(S))H\}$, potom reprezentácia definovaná $\pi_0(x) := \pi(x) \upharpoonright_{K_0}$, $x \in C^*(S)$, by tiež spĺňala $\varphi'(x) = V^*\pi_0(x)V$ pre $x \in C^*(S)$ a príslušný operátor $V \in \mathcal{B}(H, K_0)$. Z ekvivalentnej definície maximality φ (Poznámka 3.10) máme $\pi(C^*(S))H \subseteq H$, takže $K = H$ a teda $\varphi' = \pi$ je multiplikatívne.

Na druhú stranu, nech φ má vlastnosť jednoznačného rozšírenia a $\varphi' : S \rightarrow \mathcal{B}(K)$ je ľubovoľná dilatácia φ . Ukážeme, že $\varphi'(S)H \subseteq H$. Podľa Vety 1.44 existuje $\psi : C^*(S) \rightarrow \mathcal{B}(K)$ úplne pozitívne lineárne rozšírenie φ' . Označme $\psi'(x) := P_H\psi(x) \upharpoonright_H$, $x \in C^*(S)$, kompresiu ψ . Potom ψ' je úplne pozitívne zobrazenie $C^*(S)$ do $\mathcal{B}(H)$ a pre $x \in S$ je

$$\psi'(x) = P_H\psi(x) \upharpoonright_H = P_H\varphi'(x) \upharpoonright_H = \varphi(x).$$

Takže ψ' je úplne pozitívne rozšírenie φ . Podľa predpokladu má φ vlastnosť jednoznačného rozšírenia, čiže ψ' je multiplikatívne. Spolu s použitím Lemy 3.14 a Pozorovania 3.2 dostávame pre $x \in C^*(S)$ nerovnosť

$$P_H\psi(x)^*P_H\psi(x)P_H = \psi'(x)^*\psi'(x) = \psi'(x^*x) = P_H\psi(x^*x)P_H \geq P_H\psi(x)^*\psi(x)P_H.$$

Pre úplnosť pripomeňme, že predpoklad úplnej kontraktivity ψ pre použitie Lemy 3.14 je splnený, pretože ψ je rozšírenie φ' , ktoré ako dilatácia φ zachováva

jednotku (viď napríklad Tvrdenie 1.45). Odtiaľ pre $x \in C^*(S)$ a $\xi \in H$ počítajme

$$\begin{aligned}
\|(1 - P_H)\psi(x)P_H\xi\|^2 &= ((1 - P_H)\psi(x)P_H\xi, (1 - P_H)\psi(x)P_H\xi) \\
&= \|\psi(x)P_H\xi\|^2 + \|P_H\psi(x)P_H\xi\|^2 - 2(\psi(x)P_H\xi, P_H\psi(x)P_H\xi) \\
&= \|\psi(x)P_H\xi\|^2 + \|P_H\psi(x)P_H\xi\|^2 - 2(\xi, P_H\psi(x)^*P_H\psi(x)P_H\xi) \\
&\leq \|\psi(x)P_H\xi\|^2 + \|P_H\psi(x)P_H\xi\|^2 - 2(\xi, P_H\psi(x)^*\psi(x)P_H\xi) \\
&= \|\psi(x)P_H\xi\|^2 + \|P_H\psi(x)P_H\xi\|^2 - 2\|\psi(x)P_H\xi\|^2 \\
&= \|P_H\psi(x)P_H\xi\|^2 - \|\psi(x)P_H\xi\|^2 \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Teda $(1 - P_H)\psi(x)P_H = 0$, pre každé $x \in C^*(S)$. To ale znamená, že podpriestor $H \subseteq K$ je $\psi(C^*(S))$ -invariantný a pretože ψ je rozšírenie φ' , je $\varphi'(S) \subseteq \psi(C^*(S))$ a teda H je tým skôr $\varphi'(S)$ -invariantný. Takže sme ukázali, že pre každú dilatáciu $\varphi' \succeq \varphi$ je $\varphi'(S)H \subseteq H$, čo je ekvivalentná definícia maximality pre φ . $\square$

Tvrdenie 3.15. *Uvažujme postupnosť podpriestorov $H_1 \subseteq H_2 \subseteq H_3 \subseteq \dots$ Hilbertovho priestoru $H = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n}$ a postupnosť UCP zobrazení $\varphi_n : S \rightarrow \mathcal{B}(H_n)$ takých, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $\varphi_n \preceq \varphi_{n+1}$. Potom existuje práve jedno UCP zobrazenie $\varphi : S \rightarrow \mathcal{B}(H)$ tak, že φ je dilatáciou φ_n , pre každé $n \in \mathbb{N}$.*

Poznámka 3.16. Nech $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je postupnosť operátorov, $T_n \in \mathcal{B}(H_n)$, kde H_n sú podpriestory spĺňajúce $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots$ v Hilbertovom priestore $\bigcup_n H_n$. Nech tieto operátory spĺňajú podmienky

$$T_n = P_{H_n} T_{n+1} \upharpoonright_{H_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{a} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty.$$

Potom existuje práve jeden operátor $T \in \mathcal{B}(\overline{\bigcup_n H_n})$ tak, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $P_{H_n} T \upharpoonright_{H_n} = T_n$. Podrobnejšie, T definujeme na $\bigcup_n H_n$ podľa predpokladu pre operátory T_n a potom ho jednonačne rošírime na $\overline{\bigcup_n H_n}$. Potom navyše pre jeho normu zrejme platí $\|T\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|$.

Dôkaz Tvrdenia 3.15. Dôkaz je priamym dôsledkom Poznámky 3.16, pretože pre každé $x \in S$ dostaneme z definície dilatácie postupnosť operátorov $\varphi_n(x)$ spĺňajúcu predpoklady. Predpoklad o konečnosti suprema noriem operátorov $\varphi_n(x)$ pre pevné $x \in S$ je splnený, pretože podľa Poznámky 3.3 je $\|\varphi_n(x)\| \leq \|x\|$, pre každé $n \in \mathbb{N}$. Pre každé $x \in S$ tak dostaneme operátor $T_x \in \mathcal{B}(\bigcup_n H_n)$ s patričnými vlastnosťami. Hľadané zobrazenie φ definujeme ako $\varphi(x) = T_x$. Z vlastnosti

$$P_{H_n} T_x \upharpoonright_{H_n} = \varphi_n(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

v každom bode $x \in S$ sa okamžite overí, že φ zachováva jednotku a je zrejme dilatáciou každého φ_n . Zostáva nám overiť, že φ je úplne pozitívne. V prvom kroku ukážeme, že φ je pozitívne, tj. že $(\varphi(x)\xi, \xi)_H \geq 0$ pre každé $x \in S$ a $\xi \in H$. Voľme teda $x \in S$, $\xi \in H$ ľubovoľné a označme $\xi_n := P_{H_n}\xi$. Voľme $\varepsilon > 0$, potom pretože $H = \overline{\bigcup_n H_n}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\eta \in H_{n_0}$ tak, že $\|\xi - \eta\| < \varepsilon$. Potom,

pretože projekcia na podpriestor H_0 realizuje vzdialenosť od tohoto podpriestoru, dostávame

$$\|(I - P_{H_{n_0}})\xi\| = \|\xi - P_{H_{n_0}}\xi\| \leq \|\xi - \eta\| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Ďalej, pre $n \geq n_0$ je $H_n \supseteq H_{n_0}$, takže $P_{H_n} \geq P_{H_{n_0}}$ a teda $(I - P_{H_n}) \leq (I - P_{H_{n_0}})$. Odtiaľ pre projekcie $(I - P_{H_n})$ dostávame

$$\begin{aligned} \|\xi - P_{H_n}\xi\|^2 &= ((I - P_{H_n})\xi, (I - P_{H_n})\xi)_H = ((I - P_{H_n})\xi, \xi)_H \\ &\leq ((I - P_{H_{n_0}})\xi, \xi)_H = \|\xi - P_{H_{n_0}}\xi\|^2 < \varepsilon^2, \quad n \geq n_0, \end{aligned}$$

kde posledná nerovnosť je (3.2). Takže pre každé $n \geq n_0$ je $\|\xi - \xi_n\| < \varepsilon^2$ a teda $\xi_n \rightarrow \xi$ pre $n \rightarrow \infty$ v norme priestoru H . Dostávame

$$(\varphi(x)\xi, \xi)_H = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(x)\xi_n, \xi_n)_H = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n(x)\xi_n, \xi_n)_{H_n} \geq 0,$$

pretože φ_n sú pozitívne zobrazenia.

Úplnú pozitivitu dostaneme analogickou úvahou na úrovni matíc: Voľme $k \in \mathbb{N}$ pevné, maticu $(x_{ij}) \in M_k(S)$ a vektor $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^k) \in H^k$. Uvažujme postupnosť vektorov $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\xi_n = \{\xi_n^1, \dots, \xi_n^k\} \in H^k$, kde $\xi_n^i := P_{H_n}\xi^i$, $i = 1, \dots, k$. K zadanému $\varepsilon > 0$ nájdeme pre každé $i = 1, \dots, k$ index $n_0^i \in \mathbb{N}$ a vektor $\eta^i \in H_{n_0^i}$ tak, že $\|\xi^i - \eta^i\| < \varepsilon$. Položme

$$n_0 := \max\{n_0^i : i = 1, \dots, k\}.$$

Potom podobne ako v prvom kroku je

$$\|(I - P_{H_{n_0}})\xi^i\| = \|\xi^i - P_{H_{n_0}}\xi^i\| \leq \|\xi^i - \eta^i\| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, k,$$

a teda pre každé $n \geq n_0$ dostávame

$$\|\xi - \xi_n\|^2 = \sum_{i=1}^k \|(I - P_{H_n})\xi^i\|^2 \leq \sum_{i=1}^k \|(I - P_{H_{n_0}})\xi^i\|^2 \leq k\varepsilon^2.$$

Takže opäť postupnosť ξ_n konverguje v norme priestoru H^k k vektoru ξ . Označme výnimočne indexom (k) k -tu úroveň zobrazenia φ , tj. $\varphi_{(k)} : (s_{ij}) \in M_k(S) \mapsto (\varphi(s_{ij})) \in \mathcal{B}(H^k)$. Potom môžeme písať

$$(\varphi_{(k)}((x_{ij}))\xi, \xi)_{H^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_{(k)}((x_{ij}))\xi_n, \xi_n)_{H^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} ((\varphi_n)_{(k)}((x_{ij}))\xi_n, \xi_n)_{H_n^k} \geq 0,$$

pretože φ_n sú úplne pozitívne. Takže φ je úplne pozitívne zobrazenie, čo sme potrebovali k tomu aby to bolo UCP zobrazenie. $\square$

Definícia 3.17. Nech $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je UCP zobrazenie, F je podmnožina kartézskeho súčinu $S \times H$. Hovoríme, že φ je *maximálne na F* , ak pre každú jeho dilatáciu $\psi : S \longrightarrow \mathcal{B}(K)$, $K \supseteq H$, platí

$$\psi(x)\xi = \varphi(x)\xi, \quad (x, \xi) \in F.$$

Pozorovanie 3.18. *UCP zobrazenie $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je maximálne práve vtedy, keď je maximálne na súčine $S \times H$.*

Dôkaz. Predpokladajme, že φ je maximálne. Nech $\psi : S \longrightarrow \mathcal{B}(K)$ je ľubovoľná jeho dilatácia a (s, ξ) ľubovoľný prvok súčiny $S \times H$. Z maximality existuje UCP zobrazenie $\lambda : S \longrightarrow \mathcal{B}(H')$, $K = H \oplus H'$, že $\psi = \varphi \oplus \lambda$. Potom $\psi(s)\xi = \varphi(s)P_H\xi + \lambda(s)P_{H'}\xi = \varphi(s)\xi$, pretože $\xi \in H$.

Na druhú stranu, nech $\psi : S \longrightarrow \mathcal{B}(K)$ je opäť ľubovoľná dilatácia φ . Potom podľa predpokladu platí pre každé $s \in S$ a každé $\xi \in H$ rovnosť $\psi(s)\xi = \varphi(s)\xi$, a $\varphi(s)\xi$ je prvkom priestoru H . Takže $\psi(S)H \subseteq H$, čo je ekvivalentná podmienka maximality pre φ (viď Poznámka 3.10). $\square$

Poznámka 3.19. Uvažujme UCP zobrazenie φ maximálne na množine $F \subseteq S \times H$ a nejakú jeho dilatáciu ψ . Nech ψ' je dilatáciou ψ , potom z tranzitivity je $\psi' \succeq \varphi$ a z maximality φ na F je

$$\psi'(x)\xi = \varphi(x)\xi = \psi(x)\xi, \quad (x, \xi) \in F.$$

To hovorí, že každá dilatácia UCP zobrazenia maximálneho na F je tiež maximálna na F .

Lema 3.20. *Nech S je separabilný operátorový systém, $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je UCP zobrazenie, kde H je separabilný Hilbertov priestor, a $(x, \xi) \in S \times H$ je pevné. Potom k φ existuje dilatácia $\tilde{\varphi} : S \longrightarrow \mathcal{B}(K)$ tak, že $K \supseteq H$ je tiež separabilný Hilbertov priestor a $\tilde{\varphi}$ je maximálne na (x, ξ) .*

Dôkaz. Nech ψ je ľubovoľná dilatácia φ . Pretože φ je úplne pozitívne, je podľa Tvrdenia 1.47 úplne kontraktívne a teda $\|\psi(x)\xi\| \leq \|\psi(x)\|\|\xi\| \leq \|x\|\|\xi\|$. Vďaka tomu je supremum hodnôt $\|\psi(s)\xi\|$ cez všetky dilatácie k φ konečné. Z definície suprema existuje dilatácia $\varphi_1 : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_1)$ na separabilnom Hilbertovom priestore H_1 spĺňajúca

$$\|\varphi_1(x)\xi\| \geq \sup_{\psi \succeq \varphi} \|\psi(x)\xi\| - 1.$$

To, že priestor H_1 môžeme brať separabilný, plynie z Poznámky 3.12. Rovnakým spôsobom nájdeme k φ_1 dilatáciu $\varphi_2 : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_2)$, kde H_2 je opäť separabilný Hilbertov priestor, pre ktorú platí

$$\|\varphi_2(x)\xi\| \geq \sup_{\psi \succeq \varphi_1} \|\psi(x)\xi\| - \frac{1}{2}.$$

Indukciou nájdeme postupnosť UCP zobrazení $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, takú, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $\varphi_{n+1} \succeq \varphi_n$ dilatáciou na separabilnom Hilbertovom priestore $H_{n+1} \supseteq H_n$ a platí

$$\|\varphi_{n+1}(x)\xi\| \geq \sup_{\psi \succeq \varphi_n} \|\psi(x)\xi\| - \frac{1}{n+1}.$$

Položme $H_\infty := \overline{\bigcup_{n=1}^\infty H_n}$. Na základe Tvrdenia 3.15 existuje jednoznačne určené $\tilde{\varphi} : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_\infty)$ také, že pre každé $x \in S$ a $n \in \mathbb{N}$ je $P_{H_n}\tilde{\varphi}(x) \upharpoonright_{H_n} = \varphi_n(x)$. Potrebujeme ukázať, že $\tilde{\varphi}$ je maximálne na (x, ξ) . Voľme dilatáciu $\phi \succeq \tilde{\varphi}$, ukážeme rovnosť $\tilde{\varphi}(x)\xi = \phi(x)\xi$. Vezmime pevné $m \in \mathbb{N}$, potom vďaka $\phi \succeq \tilde{\varphi} \succeq \varphi_n$ (pre každé $n \in \mathbb{N}$) dostávame okamžité nerovnosť

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}(x)\xi\| &\geq \|P_{H_{m+1}}\tilde{\varphi}(x)\xi\| = \|\varphi_{m+1}(x)\xi\| \geq \sup_{\psi \succeq \varphi_m} \|\psi(x)\xi\| - \frac{1}{m+1} \\ &\geq \|\phi(x)\xi\| - \frac{1}{m+1}. \end{aligned}$$

Takže máme $\|\tilde{\varphi}(x)\xi\| \geq \|\phi(x)\xi\|$. Ďalej keďže $\xi \in H \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_\infty$, je podľa definície dilatácie $\tilde{\varphi}(x)\xi = P_{H_\infty}\phi(x)\xi$ a teda dostaneme

$$\begin{aligned} \|\phi(x)\xi - \tilde{\varphi}(x)\xi\|^2 &= \|\phi(x)\xi - P_{H_\infty}\phi(x)\xi\|^2 \\ &= \|\phi(x)\xi\|^2 - 2(P_{H_\infty}\phi(x)\xi, \phi(x)\xi) + \|P_{H_\infty}\phi(x)\xi\|^2 \\ &= \|\phi(x)\xi\|^2 - 2(P_{H_\infty}\phi(x)\xi, P_{H_\infty}\phi(x)\xi) + \|P_{H_\infty}\phi(x)\xi\|^2 \\ &= \|\phi(x)\xi\|^2 - 2\|P_{H_\infty}\phi(x)\xi\|^2 + \|P_{H_\infty}\phi(x)\xi\|^2 \\ &= \|\phi(x)\xi\|^2 - \|P_{H_\infty}\phi(x)\xi\|^2 \\ &= \|\phi(x)\xi\|^2 - \|\tilde{\varphi}(x)\xi\|^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Odtiaľ máme požadovanú rovnosť $\phi(x)\xi = \tilde{\varphi}(x)\xi$ a teda $\tilde{\varphi}$ je hľadaná dilatácia zobrazenia φ na separabilnom Hilbertovom priestore $K := H_\infty$, ktorá je maximálna na (x, ξ) . $\square$

Veta 3.21. *Nech S je separabilný operátorový systém, H_0 je separabilný Hilbertov priestor a $\varphi_0 : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_0)$ je UCP zobrazenie. Potom existuje $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ dilatácia φ_0 na separabilný Hilbertov priestor $H \supseteq H_0$, ktorá má vlastnosť jednoznačného rozšírenia.*

Dôkaz. V prvom kroku nájdeme UCP zobrazenie $\varphi_1 : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_1)$, kde $H_1 \supseteq H_0$ je separabilný Hilbertov priestor, ktoré je maximálne na súčine $S \times H_0$ a $\varphi_1 \succeq \varphi_0$. Nech $C \subset S$ je spočítateľná hustá podmnožina systému S a $D \subset H_0$ je spočítateľná hustá v priestore H_0 . Píšme $C \times D = \{z_1, z_2, z_3, \dots\}$. K φ_0 a z_1 nájdeme podľa Lemy 3.20 zobrazenie $\omega_1 \succeq \varphi_0$ na separabilnom priestore $K_1 \supseteq H$ maximálne na z_1 . Rovnako nájdeme k ω_1 a z_2 dilatáciu $\omega_2 : S \longrightarrow \mathcal{B}(K_2)$ maximálnu na z_2 , pre $K_2 \supseteq K_1$ separabilný Hilbertov priestor. Indukciou nájdeme postupnosť zobrazení $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ na príslušných separabilných priestoroch $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \dots$ spĺňajúcu $\varphi_0 \preceq \omega_1 \preceq \omega_2 \preceq \dots$ a ω_n je maximálne na z_n , pre každé $n \in \mathbb{N}$. Naviac, vďaka tranzitivite relácie $\succeq$ a Poznámke 3.19 je každé ω_n maximálne na množine $\{z_1, \dots, z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. K tejto postupnosti zobrazení nájdeme podľa Tvrdenia 3.15 UCP zobrazenie $\varphi_1 : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_1)$, kde $H_1 = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty K_n}$, ktoré pre každé $n \in \mathbb{N}$ spĺňa

$$P_{K_n}\varphi_1(x) \upharpoonright_{K_n} = \omega_n(x), \quad x \in S.$$

Potom zrejme $\varphi_1 \succeq \varphi_0$ a φ_1 je maximálne na množine $C \times D$. Z hustoty množín C, D a spojitosti je potom maximálne na celom súčine $S \times H_0$. Podrobne, voľme $(x, \xi) \in S \times H_0$, z hustoty nájdeme postupnosť $\{x_n\}$ v C , že $x_n \rightarrow x$, a postupnosť $\{\xi_n\}$ v D , že $\xi_n \rightarrow \xi$. Potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ z maximality φ_1 na $C \times D$ vieme, že platí

$$\varphi_1(x_n)\xi_n = \psi(x_n)\xi_n, \quad (3.3)$$

pre každú dilatáciu $\psi \succeq \varphi_1$. Pretože φ_1, ψ sú UCP, sú automaticky spojitý, čiže $\varphi_1(x_n) \rightarrow \varphi_1(x)$ a $\psi(x_n) \rightarrow \psi(x)$. Napokon, pretože $\varphi_1(x)$ a $\psi(x)$ sú obmedzené lineárne operátory a teda spojitý, platí

$$\varphi_1(x)\xi_n \rightarrow \varphi_1(x)\xi \quad \text{a} \quad \psi(x)\xi_n \rightarrow \psi(x)\xi.$$

Odtiaľ spolu so vzťahom (3.3) dostávame rovnosť $\varphi_1(x)\xi = \psi(x)\xi$ pre každé $\psi \succeq \varphi_1$, a teda maximalitu φ_1 na $S \times H_0$.

Indukciou, opakovaním prvého kroku, nájdeme postupnosť separabilných Hilbertových priestorov $H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots$ a postupnosť UCP zobrazení $\varphi_0 \preceq \varphi_1 \preceq \varphi_2 \preceq \dots$ takú, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $\varphi_n : S \rightarrow \mathcal{B}(H_n)$ maximálne na súčine $S \times H_{n-1}$. Opätovným použitím Tvrdenia 3.15 nájdeme jednoznačne určené UCP zobrazenie $\varphi : S \rightarrow \mathcal{B}(H)$ pre $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ také, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$P_{H_n}\varphi(x) \upharpoonright_{H_n} = \varphi_n(x), \quad x \in S.$$

K dokončeniu dôkazu potrebujeme ukázať, že takto vybrané φ má vlastnosť jednoznačného rozšírenia. Podľa kombinácie Tvrdenia 3.13 a Pozorovania 3.18 nám stačí ukázať, že φ je maximálne na $S \times H$. Ale pretože pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $\varphi \succeq \varphi_n$ a φ_n je maximálne na $S \times H_{n-1}$, je φ maximálne na $S \times H_n$, pre každé $n \in \mathbb{N}$ (Poznámka 3.19) a teda je maximálne na $S \times \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$. Konečne, z hustoty $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ v H je maximálne na $S \times H$, čím je dôkaz hotový. $\square$

Kapitola 4

BW-topológia

V tejto kapitole zavedieme istú slabú topológiu na priestore operátorovo - hodnotových lineárnych zobrazení. Konkrétne, uvažujme C^* -algebru $\mathcal{A}$ a operátorový systém S generujúci $\mathcal{A}$. Pre úplnosť poznamenajme, že ako S stačí v celej kapitole uvažovať ľubovoľný lineárny podpriestor, my sa obmedzíme na tento špeciálny prípad len pre jednotnosť práce. Nech ďalej H značí stále Hilbertov priestor. Bude nás zaujímať priestor obmedzených lineárnych zobrazení z S do $\mathcal{B}(H)$, ktorý budeme značiť $\mathbf{B}(S, H)$. Cieľom je na tomto priestore zaviesť nejakú slabú topológiu, s ktorou bude duálom nejakého Banachovho priestoru. Slabé topológie na $\mathcal{B}(H)$:

Definícia 4.1. *Silná operátorová topológia (SOT) je generovaná systémom pseudonoriem*

$$\{T \mapsto \|T\xi\| : \xi \in H\},$$

slabá operátorová topológia (WOT) je generovaná systémom pseudonoriem

$$\{T \mapsto (T\xi, \eta) : \xi, \eta \in H\}.$$

Sú to teda najslabšie topológie na $\mathcal{B}(H)$, v ktorých sú všetky pseudonormy príslušného systému spojené.

Býva užitočné vedieť, že na konvexných množinách tieto topológie splývajú. Dôkaz tohto faktu sa dá nájsť v [7, Theorem 5.1.2].

Tvrdenie 4.2. *Nech $A \subseteq \mathcal{B}(H)$ je konvexná. Potom množina A je WOT-uzavretá práve vtedy, keď je SOT-uzavretá.*

Ďalej budeme potrebovať niekoľko vlastností jednotkovej gule v $\mathcal{B}(H)$ vzhľadom k WOT-topológii. Pre dôkaz nasledujúceho faktu viď [7, Theorem 5.1.3].

Tvrdenie 4.3. *Jednotková guľa $B_{\mathcal{B}(H)}$ je WOT-kompaktná.*

Tvrdenie 4.4. *Nech H je separabilný Hilbertov priestor. Potom jednotková guľa $B_{\mathcal{B}(H)}$ je WOT-metrizovateľná.*

Dôkaz. Označme $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ spočítateľnú hustú podmnožinu v B_H . Potom podľa definície WOT-topológie sú funkcionály $T \mapsto (T\xi_n, \xi_k)$ pre $k, n \in \mathbb{N}$ a $T \in B_{\mathcal{B}(H)}$ spojité a z hustoty oddeľujú body $B_{\mathcal{B}(H)}$. Takže

$$\rho(S, T) := \sum_{k, n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+k}} |(S - T)\xi_n, \xi_k|, \quad S, T \in B_{\mathcal{B}(H)},$$

definuje metriku na $B_{\mathcal{B}(H)}$. □

BW-topológia:

Definícia 4.5. Pre $r > 0$ označme uzavretú guľu s polomerom r priestoru $\mathbf{B}(S, H)$ symbolom $\mathbf{B}_r(S, H)$, t.j.

$$\mathbf{B}_r(S, H) = \{\varphi \in \mathbf{B}(S, H) : \|\varphi(a)\| \leq r\|a\|, a \in S\}.$$

Na $\mathbf{B}_r(S, H)$ zavedieme *BW-topológiu* takto: net $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$, $\varphi_\alpha \in \mathbf{B}_r(S, H)$, konverguje v BW-topológii k $\varphi \in \mathbf{B}_r(S, H)$, ak $\varphi_\alpha(a)$ konverguje k $\varphi(a)$ v slabej operátorovej topológii, pre každé $a \in S$. Potom hovoríme, že množina $U \in \mathbf{B}(S, H)$ je *BW-otvorená*, ak $U \cap \mathbf{B}_r(S, H)$ je otvorená v BW-topológii definovanej na $\mathbf{B}_r(S, H)$, pre každé $r > 0$.

Ukážeme si niekoľko základných vlastností tejto topológie. Je jednoduchšie a názornejšie odvodzovať ich vo všeobecnejšom prípade než na priestore $\mathbf{B}(S, H)$ a to na priestore $\mathcal{B}(X, Y^*)$, kde X, Y sú Banachove priestory. Zavedieme značenie $L := \mathcal{B}(X, Y^*)$ a na tomto priestore budeme uvažovať príslušné topológie:

σ : topológia projektívne generovaná systémom pseudonoriem $\{p_{x,y} : x \in X, y \in Y\}$, kde

$$p_{x,y}(T) := |Tx(y)|, \quad T \in L,$$

$b\sigma$: množina $U \subseteq L$ je $b\sigma$ -otvorená, ak $U \cap rB_L$ je σ -otvorená, pre každé $r > 0$.

Poznámka 4.6. Priamo z definície týchto topológií je zrejmé, že σ je slabšia topológia než $b\sigma$ a na obmedzených množinách tieto topológie splývajú.

Tvrdenie 4.7. Jednotková guľa B_L je kompaktná v topológii σ .

Dôkaz. Uvažujme vnorenie B_L do súčinu kompakto

$$\varphi : T \in B_L \mapsto \{Tx(y)\}_{(x,y) \in X \times Y} \in \prod_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} B(0, \|x\| \|y\|).$$

Potom φ je spojité vnorenie do kompaktu, pretože všetky jeho zložky sú podľa definície σ -topológie spojité. Stačí si teda rozmyslieť, že B_L je σ -uzavretá podmnožina v L . Nech $\{T_i\}_{i \in I}$ je net operátorov z B_L a $T_i \rightarrow T$ v σ , tzn.

$$T_i x(y) \rightarrow Tx(y), \quad (x, y) \in X \times Y. \quad (4.1)$$

Potom T je zrejme lineárny operátor z X do $Y^\#$. Ďalej pre pevné $x \in X$ je Tx prvkom Y^* , lebo

$$|Tx(y)| \leq \|T\| \|x\|, \quad y \in B_Y$$

a pretože T_i sú z jednotkovej gule, je $|T_i x(y)| \leq 1$, pre každé $x \in B_X$ a $y \in B_Y$ a teda pre tieto x, y je $|Tx(y)| \leq 1$ vďaka (4.1). Prechodom k supremu cez $B_X \times B_Y$ dostávame, že $\|T\| \leq 1$ a teda T leží v B_L , čo bolo treba ukázať. $\square$

Tvrdenie 4.8. *Jednotková guľa B_L je $b\sigma$ -kompaktná.*

Dôkaz. Dôkaz plynie okamžite z predchádzajúceho Tvrdenia a Poznámky 4.6. $\square$

Tvrdenie 4.9. *Nech $\mathcal{A}$ je systém takých množín A , že $A = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^\infty$, kde $x_i \in B_X$, a $y_i \in Y$ splňajú $y_i \rightarrow 0$ pre $i \rightarrow \infty$. Pre $A \in \mathcal{A}$ označme*

$$\begin{aligned} A^\bullet &:= \{T \in L : |Tx_i(y_i)| < 1, (x_i, y_i) \in A\}, \\ A^\circ &:= \{T \in L : |Tx_i(y_i)| \leq 1, (x_i, y_i) \in A\}. \end{aligned}$$

Potom systém $\{A^\bullet : A \in \mathcal{A}\}$ tvorí bázu okolia nuly v $b\sigma$ -topológii.

Dôkaz. V prvom kroku ukážeme, že pre $A \in \mathcal{A}$ je $A^\bullet$ $b\sigma$ -otvorená. Nech $A \in \mathcal{A}$ a máme dané $r > 0$, potom

$$A^\bullet \cap rB_L = \{T \in rB_L : |Tx_i(y_i)| < 1, (x_i, y_i) \in A\}.$$

Pre $T \in A^\bullet \cap rB_L$ je $|Tx_i(y_i)| \leq \|Tx_i\| \|y_i\| \leq r \|x_i\| \|y_i\| \leq r \|y_i\|$, pre každé $(x_i, y_i) \in A$. Pretože $y_i \rightarrow 0$, množina $A_1 := \{(x_i, y_i) \in A : \|y_i\| \geq \frac{1}{r}\}$ je konečná. Potom pre $(x_i, y_i) \in A \setminus A_1$ je $|Tx_i(y_i)| \leq r \|y_i\| < r \frac{1}{r} = 1$. Takže môžeme písať

$$A^\bullet \cap rB_L = \{T \in rB_L : |Tx_i(y_i)| < 1, (x_i, y_i) \in A_1\}$$

a táto množina je $b\sigma$ -otvorená podľa definície $b\sigma$ -topológie.

V druhom kroku dokážeme nasledujúce tvrdenie: *Nech $n \in \mathbb{N}$, $U \subset L$ je $b\sigma$ -otvorené okolie nuly a $A_n = \{(x_i, y_i)\}_{i \in I_n}$ je konečná množina splňajúca $A_n^\circ \cap nB_L \subseteq U$. Potom existuje konečná množina $B_n = \{(x_j, y_j)\}_{j \in J_n}$ taká, že pre každé $j \in J_n$ je $x_j \in B_X$, $\|y_j\| \leq \frac{1}{n}$ a*

$$(A_n \cup B_n)^\circ \cap (n+1)B_L \subseteq U.$$

Označme $\mathcal{B}$ systém všetkých takýchto množín, tj.

$$\mathcal{B} = \{\{(x_j, y_j)\}_{j \in J} : J \text{ konečná}, x_j \in B_X, \|y_j\| \leq \frac{1}{n}, y_j \in Y\}$$

a predpokladajme pre spor, že pre každú množinu $B \in \mathcal{B}$ platí

$$(A_n \cup B)^\circ \cap (n+1)B_L \cap U^c \neq \emptyset, \quad (4.2)$$

kde U^c značí doplnok množiny U v L . Z definície systému $\mathcal{B}$ je zrejmé, že ak $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, potom aj množina $B_1 \cup B_2$ je v systéme $\mathcal{B}$. Ďalej, pre $B \in \mathcal{B}$

je $(A_n \cup B)^\circ \cap (n+1)B_L \cap U^c$ σ -uzavretá množina. To platí vďaka tomu, že $(n+1)B_L \cap U^c$ σ -uzavretá priamo z definície topológie σ a $(A_n \cup B)^\circ$ je σ -uzavretá, pretože môžeme písať

$$(A_n \cup B)^\circ = \bigcap_{(x_i, y_i) \in A_n \cup B} f_{(x_i, y_i)}^{-1}[0, 1],$$

kde $f_{(x_i, y_i)} : T \in L \mapsto |Tx_i(y_i)|$ sú podľa definície σ -topológie spojité funkcionály pre každé $(x_i, y_i) \in A_n \cup B$. Dostávame, že $\{(A_n \cup B)^\circ \cap (n+1)B_L \cap U^c : B \in \mathcal{B}\}$ je centrovateľný systém σ -uzavretých množín v $(n+1) - B_L$. Totiž pre ľubovoľné $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}$ je priamo z definície $^\circ$

$$(A_n \cup B_1)^\circ \cap \dots \cap (A_n \cup B_k)^\circ = (A_n \cup B_1 \cup \dots \cup B_k)^\circ$$

a pretože $\bigcup_{i=1}^k B_i$ je prvkom systému $\mathcal{B}$, platí podľa predpokladu (4.2) potrebné

$$\bigcap_{i=1}^k \left((A_n \cup B_i)^\circ \cap (n+1)B_L \cap U^c \right) = \left((A_n \cup \bigcup_{i=1}^k B_i)^\circ \cap (n+1)B_L \cap U^c \right) \neq \emptyset.$$

Z úplnosti teda existuje operátor $T \in L$ taký, že

$$T \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \left((A_n \cup B)^\circ \cap (n+1)B_L \cap U^c \right).$$

Podľa definície systému $\mathcal{B}$ a $^\circ$ to znamená, že pre každé $x \in B_X$ a každé $y \in Y$ spĺňajúce $\|y\| \leq \frac{1}{n}$ platí $|Tx(y)| \leq 1$. Prechodom k supremu cez všetky takéto x, y dostávame

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B_X} \sup_{y \in \frac{1}{n}B_Y} |Tx(y)| &\leq 1 \\ \sup_{x \in B_X} \|Tx\| \cdot \frac{1}{n} &\leq 1 \\ \|Tx\| &\leq n \end{aligned}$$

a teda $T \in nB_L$. Odtiaľ vďaka tomu, že priamo z definície je $A_n^\circ \supseteq (A_n \cup B)^\circ$, platí $T \in A_n^\circ \cap nB_L \cap U^c$, čo je v spore s inklúziou $A_n \cap nB_L \subseteq U$.

Teraz sa už venujme dokazovanému tvrdeniu. Nech U je $b\sigma$ -okolie $0 \in L$, hľadáme $A \in \mathcal{A}$ takú, že $A^\bullet \subseteq U$. Z definície topológie $b\sigma$ nájdeme množinu $A_1 = \{(x_i, y_i)\}_{i \in I_1}$, kde I_1 je konečná, že $A_1^\circ \cap B_L \subseteq U$. Ďalej pomocou práve dokázaného tvrdenia zkonštruujeme pre $n \geq 2$ indukciou množiny $A_n = \{(x_i, y_i)\}_{i \in I_n}$, kde I_n je konečná pre každé $n \in \mathbb{N}$, také, že A_n majú príslušné vlastnosti a

$$(A_1 \cup \dots \cup A_n)^\circ \cap nB_L \subseteq U.$$

Položme $A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n = \{(x_i, y_i)\}_{i \in I}$, kde $I = \bigcup_{n=1}^\infty I_n$. Potom pre každé $i \in I$ je $x_i \in B_X$ a vďaka podmienke $\|y_i\| \leq \frac{1}{n}$ pre $i \in I_n$ dostávame $y_i \rightarrow 0$ pre $i \rightarrow \infty$. Táto množina z konštrukcie spĺňa $A^\circ \cap nB_L \subseteq U$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, takže $A^\circ \subseteq U$ a teda aj $A^\bullet \subseteq U$. $\square$

Dôsledok 4.10. $(L, b\sigma)$ je lokálne konvexný priestor.

Dôkaz. Podľa definície lokálne konvexného priestoru treba ukázať, že na priestore L existuje báza okolia nuly v topológii $b\sigma$, ktorá je tvorená konvexnými vyváženými množinami. Vďaka predchádzajúcemu Tvrdeniu 4.9 stačí ukázať, že množiny $A^\bullet$ sú konvexné a vyvážené, pre $A \in \mathcal{A}$. Obidve vlastnosti plynú okamžite z definície. $\square$

Poznámka 4.11. Je jednoduché si rozmyslieť, že každý lineárny $b\sigma$ -spojitý funkcionál $f : L \rightarrow \mathbb{C}$ je obmedzený: Nech f je $b\sigma$ -spojitý ale neobmedzený. To znamená, že existuje postupnosť operátorov $\{T_n\}$ v B_L tak, že $|f(T_n)| \rightarrow \infty$ pre $n \rightarrow \infty$. Výberom vhodnej podpostupnosti dokážeme zariadiť, aby $|f(T_n)| \geq n^2$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Pretože pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $\|T_n\| \leq 1$, postupnosť $\{\frac{1}{n}T_n\}$ konverguje k nule v norme priestoru L . Potom $\frac{1}{n}T_n \rightarrow 0$ aj v $b\sigma$ -topológii, pretože tá je slabšia než normová a teda z predpokladu $b\sigma$ -spojitosti funkcionálu f dostávame $f(\frac{1}{n}T_n) \rightarrow 0$ pre $n \rightarrow \infty$. Ale pritom má platiť $|f(\frac{1}{n}T_n)| = \frac{1}{n}|f(T_n)| \geq \frac{1}{n}n^2 = n$ a to je v spore s konvergenciou k nule.

Veta 4.12. Lineárny funkcionál $f : L \rightarrow \mathbb{C}$ je $b\sigma$ -spojitý práve vtedy, keď sa dá vyjadriť v tvare

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_{x_i y_i}, \quad (4.3)$$

kde $x_i \in B_X$, $y_i \in Y$, $y_i \rightarrow 0$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \ell^1$ a $f_{x_i y_i}(T) := Tx_i(y_i)$, pre $T \in L$.

Dôkaz. Nech f je $b\sigma$ -spojitý funkcionál na L , čiže je obmedzený na nejakom $b\sigma$ -okolí $0 \in L$. To znamená, že existuje množina $A = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i \in B_X$ a $y_i \rightarrow 0$ v Y pre $i \rightarrow \infty$ tak, že $|f(T)| < 1$ pre $T \in A^\bullet$. Definujme zobrazenie

$$\begin{aligned} I : L &\longrightarrow c_0 \\ T &\mapsto \{Tx_i(y_i)\}_{i=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Obor hodnôt leží skutočne v c_0 , pretože pre $T \in L$ je $\{Tx_i\}_{i=1}^{\infty}$ je obmedzená postupnosť v Y^* a $y_i \rightarrow 0$. Ďalej uvažujme zobrazenie

$$\begin{aligned} \varphi : I(L) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \{Tx_i(y_i)\}_{i=1}^{\infty} &\mapsto f(T). \end{aligned}$$

Potom φ je dobre definované: Nech $T_1, T_2 \in L$ sú také, že $\{T_1 x_i(y_i)\}_{i=1}^{\infty} = \{T_2 x_i(y_i)\}_{i=1}^{\infty}$, tzn. $T_1 x_i(y_i) = T_2 x_i(y_i)$ pre každé $(x_i, y_i) \in A$. Takže pre každé $(x_i, y_i) \in A$ máme $(T_1 - T_2)x_i(y_i) = 0$ a teda aj $m(T_1 - T_2)x_i(y_i) = 0$, pre každé $m \in \mathbb{N}$. Podľa definície $A^\bullet$ potom pre každé $m \in \mathbb{N}$ operátor $m(T_1 - T_2)$ leží v $A^\bullet$ a podľa voľby A preň platí $|f(m(T_1 - T_2))| < 1$. Odtiaľ $|f(T_1 - T_2)| < \frac{1}{m}$ pre ľubovoľne veľké m , takže $f(T_1) = f(T_2)$, čo sme potrebovali.

Ďalej ukážeme, že φ je spojité. Nech $z_n = \{T_n x_i(y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť v $I(L) \subset$

c_0 , ktorá konverguje k $0 \in c_0$, tj. $\sup_{i \in \mathbb{N}} |T_n x_i(y_i)| \rightarrow 0$ pre $n \rightarrow \infty$. Chceme ukázať, že $\varphi(T_n) \rightarrow 0$, čiže že $f(T_n) \rightarrow 0$ pre $n \rightarrow \infty$. Budeme postupovať sporom, nech teda existuje $\delta > 0$ a podpostupnosť v $\{T_n\}$ (budeme ju značiť opäť $\{T_n\}$) tak, že $|f(T_n)| \geq \delta$, pre každé $n \in \mathbb{N}$. Pretože $\sup_{i \in \mathbb{N}} |T_n x_i(y_i)| \rightarrow 0$, bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $\sup_{i \in \mathbb{N}} |T_n x_i(y_i)| \leq 2^{-n}$ (zariadime ďalším výberom dostatočne rýchlo konvergujúcej podpostupnosti z $\{T_n\}$). Napokon pre každé $n \in \mathbb{N}$ vezmeme $\alpha_n \in \mathbb{T}$ ($= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$), že $f(\alpha_n T_n) = |f(T_n)|$. Potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ je operátor $\sum_{k=1}^n \alpha_k T_k$ prvkom $A^\bullet$, pretože

$$|(\sum_{k=1}^n \alpha_k T_k)x_i(y_i)| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| |T_k x_i(y_i)| < \sum_{k=1}^n 2^{-k} < 1, \quad (x_i, y_i) \in A$$

Takže podľa voľby množiny A je $|f(\sum_{k=1}^n \alpha_k T_k)| < 1$. Ale tiež platí

$$|f(\sum_{k=1}^n \alpha_k T_k)| = |\sum_{k=1}^n f(\alpha_k T_k)| = \sum_{k=1}^n |f(T_k)| \geq n\delta,$$

čo dáva požadovaný spor, pretože voľbou dostatočne veľkého $n \in \mathbb{N}$ dokážeme zaistiť nerovnosť $|f(\sum_{k=1}^n \alpha_k T_k)| \geq 1$.

K φ teda existuje spojité lineárne rozšírenie $\tilde{\varphi}$ na celý priestor c_0 , takže $\tilde{\varphi} \in c_0^*$ a $\tilde{\varphi} = \varphi$ na $I(L)$. Pretože c_0^* je izometricky izomorfný s ℓ^1 pomocou zobrazenia $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \ell^1 \mapsto I_\alpha \in c_0^*$, kde

$$I_\alpha(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i z_i, \quad z = (z_1, z_2, \dots) \in c_0,$$

existuje $\alpha \in \ell^1$ tak, že $\tilde{\varphi}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i z_i$, pre $z \in c_0$. Potom pre $T \in L$ platí:

$$f(T) = \varphi(\{T x_i(y_i)\}_i) = \varphi(I(T)) = \tilde{\varphi}(I(T)) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i T x_i(y_i),$$

čo je požadované vyjadrenie.

Na druhú stranu, nech funkcionál $f : L \rightarrow \mathbb{C}$ má tvar (4.3). Potom f je σ -spojitý, pretože funkcionály $f_{x_i, y_i} : T \in L \mapsto T x_i(y_i)$ sú σ -spojité priamo z definície σ a sčítanie a násobenie skalárom sú spojité operácie. A pretože topológia σ je slabšia než $b\sigma$, je f určite $b\sigma$ -spojitý. □

Definícia 4.13. Definujeme

$$L_* := \{f : L \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ je lineárny, } b\sigma\text{-spojitý}\}.$$

Tvrdenie 4.14. (i) $L_* \subset L^*$.

(ii) Na L_* je norma definovaná

$$\|f\|_{L_*} := \sup\{|f(T)| : T \in B_L\}, \quad f \in L_* \quad (4.4)$$

a $(L_*, \|\cdot\|_{L_*})$ je Banachov priestor.

(iii) Uvažujme zobrazenie

$$\begin{aligned} I : T \in L &\mapsto \varphi_T \in (L_*)^* \\ \varphi_T(f) &:= f(T), \quad f \in L_*. \end{aligned}$$

Potom I je izometria na $(L_*)^*$ a je to $b\sigma - w^*$ -spojité zobrazenie.

Dôkaz. Poznámka 4.11 dáva okamžite (i), takže začneme dôkazom tvrdenia (ii). Pretože podľa (i) je každý $b\sigma$ -spojitý lineárny funkcionál obmedzený, norma $\|\cdot\|_{L_*}$ je dobre definovaná. Uvažujme teda postupnosť $\{f_k\}$ v L_* , ktorá spĺňa $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty$. Potrebujeme nájsť funkcionál $f \in L_*$ taký, že $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Definujeme

$$f : T \in L \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} f_k(T) \in \mathbb{C}.$$

Potom f je určite lineárny funkcionál. Pretože f_k sú $b\sigma$ -spojité, sú tiež funkcionály $\sum_{k=1}^n f_k$ $b\sigma$ -spojité pre každé $n \in \mathbb{N}$, čo podľa definície znamená, že sú σ -spojité na rB_L , pre každé $r > 0$. Fixujme ľubovoľné $r > 0$, potom pre $T \in rB_L$ máme

$$|f(T) - (\sum_{k=1}^n f_k)(T)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(T)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(T)| \leq r \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|.$$

Pretože predpokladáme $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty$, voľbou dostatočne veľkého $n \in \mathbb{N}$ sa dá zariadiť, aby hodnota na pravej strane bola ľubovoľne malá. Dostávame, že postupnosť $\{\sum_{k=1}^n f_k\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne k f na rB_L a teda f je σ -spojitý funkcionál na rB_L . A pretože $r > 0$ bolo ľubovoľné, je f $b\sigma$ spojité funkcionál na L a teda $f \in L_*$.

(iii) Najskôr si rozmyslíme, že I je dobre definované. Nech $T \in L$ je ľubovoľné, potom pre $f \in L_*$ je

$$|I(T)f| = |\varphi_T(f)| = |f(T)| \leq \|f\| \|T\|$$

a teda $\|I(T)\| \leq \|T\|$, čiže $I(T) \in (L_*)^*$.

Ukážeme, že I je izometria. Už vieme, že $\|I(T)\| \leq \|T\|$, potrebujeme ešte opačnú nerovnosť. Funkcionály $f_{xy} : T \in L \mapsto Tx(y)$ ($x \in X, y \in Y$) sú z definície $b\sigma$ -spojité a $\|f_{xy}\| \leq \|x\| \|y\|$ a teda $\{f_{xy} : x \in B_X, y \in B_Y\} \subset B_{L_*}$. Výpočtom

$$\begin{aligned} \|I(T)\| &= \sup_{f \in B_{L_*}} |I(T)(f)| = \sup_{f \in B_{L_*}} |f(T)| \geq \sup_{x \in B_X} \sup_{y \in B_Y} |f_{xy}(T)| \\ &= \sup_{x \in B_X} \sup_{y \in B_Y} |Tx(y)| = \|T\| \end{aligned}$$

dostávame požadované $\|I(T)\| \geq \|T\|$.

Ďalej dokážeme, že obraz I je $(L_*)^*$. Majme dané $\varphi \in (L_*)^*$. Definujme operátor T pomocou

$$Tx(y) := \varphi(f_{xy}), \quad x \in X, y \in Y.$$

Ukážeme, že T je dobre definovaný operátor z L : Pre každé $x \in X$ je

$$\|Tx\| = \sup_{y \in B_Y} \|Tx(y)\| = \sup_{y \in B_Y} \|\varphi(f_{xy})\| \leq \|\varphi\| \|x\|$$

a teda Tx je prvkom Y^* . Ďalej podobne

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \sup_{y \in B_Y} \|Tx(y)\| = \sup_{x \in B_X} \sup_{y \in B_Y} \|\varphi(f_{xy})\| \leq \|\varphi\|,$$

takže $T : X \longrightarrow Y^*$ je spojitý, čiže $T \in \mathcal{B}(X, Y^*) = L$. Teraz ukážeme, že takto definovaný operátor T spĺňa $I(T) = \varphi$: Nech $f \in L_*$ je ľubovoľné, píšme $f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_{x_i y_i}$ (vyjadrenie (4.3) z Vety 4.12). Pretože φ je spojitý a lineárny, platí

$$\begin{aligned} I(T)(f) &= f(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_{x_i y_i}(T) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i T x_i(y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi(f_{x_i y_i}) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_{x_i y_i}\right) = \varphi(f). \end{aligned}$$

Zostáva nám zdôvodniť, že I je $b\sigma - w^*$ -spojitý. Topológia w^* na $(L_*)^*$ je podľa definície generovaná systémom pseudonormami $\mathcal{P} = \{p : \varphi \in (L_*)^* \mapsto |\varphi(f)|, f \in L_*\}$ a platí, že zobrazenie $I : (L, b\sigma) \longrightarrow ((L_*)^*, w^*)$ je spojitý práve vtedy, keď zloženie $p \circ I$ je spojitý pre každú pseudonormu $p \in \mathcal{P}$. Ale pre $f \in L_*$ je podľa definície $b\sigma$ -topológie zobrazenie $T \in L \mapsto I(T)(f)$ $b\sigma$ -spojitý, takže I je $b\sigma - w^*$ -spojitý. $\square$

Za X , resp. Y^* , vezmime S , resp. $\mathcal{B}(H)$, takže Y je predual k priestoru obmedzených operátorov na Hilbertovom priestore H . V tejto chvíli nám stačí vedieť, že existuje taký Banachov priestor, ktorého duálom je $\mathcal{B}(H)$. Jedná sa o priestor tzv. nukleárných operátorov - všetko potrebné k tejto téme sa dá nájsť v [10], konkrétne viď Proposition 16.26. Potom z predchádzajúceho všeobecného kontextu dostávame okamžite nasledujúce potrebné tvrdenia:

Tvrdenie 4.15. Označme $\mathbf{B}(S, H)_*$ priestor BW-spojitéch lineárnych funkcionálov na $\mathbf{B}(S, H)$. Potom

$$\|f\| := \sup\{|\varphi(f)| : \varphi \in \mathbf{B}_1(S, H)\}$$

je norma na $\mathbf{B}(S, H)_*$ a $(\mathbf{B}(S, H), \|\cdot\|)$ je Banachov priestor.

Tvrdenie 4.16. Zobrazenie $I : \varphi \in \mathbf{B}(S, H) \mapsto I_\varphi \in (\mathbf{B}(S, H)_*)^*$ definované

$$I_\varphi(f) := f(\varphi), \quad f \in \mathbf{B}(S, H)_*$$

je BW- w^* -spojité prosté zobrazenie na $(\mathbf{B}(S, H)_*)^*$.

Tvrdenie 4.17. BW-uzavreté obmedzené množiny v $\mathbf{B}(S, H)$ sú BW-kompaktné.

Dôkaz. Plyní okamžite z Tvrdenia 4.8, prenesením do uvažovaného špeciálneho kontextu $\mathbf{B}(S, H)$. $\square$

Tvrdenie 4.18. Pre separabilný operátorový systém S a separabilný Hilbertov priestor H je jednotková guľa $\mathbf{B}_1(S, H)$ metrizovateľná v BW-topológii.

Dôkaz. Označme $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ hustú podmnožinu v B_S a pre $\phi_1, \phi_2 \in \mathbf{B}_1(S, H)$ definujme

$$\rho(\phi_1, \phi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tilde{\rho}(\phi_1(x_n), \phi_2(x_n)),$$

kde $\tilde{\rho}$ je metrika na jednotkovej guli v $\mathcal{B}(H)$ kompatibilná so slabou operátorovou topológiou (Tvrdenie 4.4). Potom ρ je vďaka hustote $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ v B_S metrikou na $\mathbf{B}_1(S, H)$. Priamo z definície BW-topológie net $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ z $\mathbf{B}_1(S, H)$ konverguje k $\phi \in \mathbf{B}_1(S, H)$ v BW práve vtedy, keď tam konverguje v ρ , takže ρ je kompatibilná s topológiou BW. $\square$

Kapitola 5

Rezy a systémy UCP zobrazení

5.1 Výsledky z deskriptívnej teórie množín

Pripomenutie pojmov:

Definícia 5.1. Nech P je topologický priestor.

- Priestor P sa nazýva *poľský*, ak je homeomorfný separabilnému úplnému metrickému priestoru.
- Nech P je poľský priestor. Množinu $A \subseteq P$ nazývame *analytická*, ak existuje poľský priestor Q a spojitý zobrazenie $f : Q \longrightarrow P$ tak, že $A = f(Q)$.
- Pod pojmom *borelovský priestor* budeme rozumieť topologický priestor $(X, \mathcal{B})$, kde $\mathcal{B}$ značí borelovské množiny v X , tj. σ -algebru generovanú otvorenými množinami priestoru X .
- Ďalej hovoríme, že borelovský priestor X je *spočítateľne separovaný*, ak existuje systém borelovských množín $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $E_n \subseteq X$, oddeľujúci body X . To znamená, že pre každú dvojicu rôznych bodov x, y existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\chi_{E_n}(x) \neq \chi_{E_n}(y)$, kde χ_{E_n} je charakteristická funkcia množiny E_n .
- Konečne, borelovský priestor X je *štandardný*, ak je izomorfný borelovskej podmnožine nejakého poľského priestoru. To znamená, že existuje poľský priestor Q , borelovská podmnožina $M \subseteq Q$ a borelovská bijekcia $f : X \longrightarrow M$ s borelovskou inverziou.

Poznámka 5.2. Medzi borelovskými a analytickými množinami platí nasledujúci vzťah: Každá borelovská podmnožina nespočítateľného poľského priestoru je analytická, ale nie každá analytická je borelovská. Pre dôkaz viď [8, Theorem 14.2].

Poznámka 5.3. Každý nespočítateľný štandardný borelovský priestor je izomorfný intervalu $[0, 1]$. Dôkaz je v [8, Theorem 15.6].

Definícia 5.4. Nech X, Y sú množiny, uvažujme zobrazenie $f : X \longrightarrow Y$, ktoré je na. Potom *rezom pre f* rozumieme zobrazenie $g : Y \longrightarrow X$ také, že zložením $f \circ g$ dostaneme identitu na Y .

Definícia 5.5. Uvažujme štandardný borelovský priestor X . Množinu $A \subseteq X$ nazývame *absolútne merateľná*, ak pre každú konečnú nezápornú mieru μ na X existujú borelovské množiny E_μ, F_μ tak, že $E_\mu \subseteq A \subseteq F_\mu$ a $\mu(F_\mu \setminus E_\mu) = 0$.

Definícia 5.6. Nech X, Y sú štandardné borelovské priestory. Hovoríme, že zobrazenie $g : X \longrightarrow Y$ je *absolútne merateľné*, ak pre každú borelovskú množinu $A \subseteq Y$ je jej vzor $g^{-1}(A)$ absolútne merateľná množina v X .

Poznámka 5.7. Opäť ekvivalentne je zobrazenie absolútne merateľné, ak je μ -merateľné pre každú konečnú nezápornú mieru na uvažovanom priestore.

Budeme potrebovať nasledujúcu vetu o existencii absolútne merateľného rezu. Jej dôkaz sa dá nájsť v [3, Theorem 3.4.3] pre analytický priestor X , čo je slabší predpoklad než potrebujeme my.

Veta 5.8. *Nech X je štandardný borelovský priestor, Y je spočítateľne separovaný borelovský priestor a $f : X \longrightarrow Y$ je borelovské zobrazenie na. Potom f má absolútne merateľný rez.*

Veta 5.9. *Nech X, Y sú štandardné borelovské priestory, $f : X \longrightarrow Y$ je borelovské zobrazenie na. Nech existuje absolútne merateľný rez g pre f . Potom pre každú konečnú nezápornú mieru μ na Y existuje borelovská funkcia $g_\mu : Y \longrightarrow X$, ktorá sa rovná μ -skoro všade g .*

Dôkaz. Nech μ je daná nezáporná konečná miera na Y . Uvažujme najskôr prípad, že priestor X je konečný alebo spočítateľný. Označme $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ systém všetkých borelovských podmnožín X . Podľa definície absolútnej merateľnosti existujú pre každé $n \in \mathbb{N}$ borelovské množiny $E_n, F_n \subseteq Y$ tak, že $E_n \subseteq g^{-1}(B_n) \subseteq F_n$ a $\mu(F_n \setminus E_n) = 0$. Definujme funkciu $g_\mu : Y \longrightarrow X$ takto:

$$g_\mu(y) := \begin{cases} g(y), & \text{ak } \exists n \in \mathbb{N} : y \in E_n \\ \tilde{x} & \text{inak,} \end{cases}$$

kde $\tilde{x}$ je ľubovoľný prvok množiny $X \setminus g(\bigcup_n E_n)$. (V prípade, že taký prvok neexistuje, bolo pôvodné zobrazenie g borelovské a teda nie je čo dokazovať.) Potom $g_\mu = g$ μ -skoro všade vďaka tomu, že $g_\mu = g$ na $\bigcup_n E_n$ a $\mu(X \setminus \bigcup_n E_n) = 0$, a je to borelovské zobrazenie, pretože pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ je

$$g_\mu^{-1}(B_n) = \begin{cases} E_n, & \tilde{x} \notin B_n \\ E_n \cup (\bigcup_k F_k \setminus \bigcup_k E_k), & \tilde{x} \in B_n, \end{cases}$$

a to je v oboch prípadoch borelovská podmnožina v Y .

V prípade, že priestor X je nespočítateľný, podľa Poznámky 5.3 je izomorfný intervalu $[0, 1]$. Takže zobrazenie g je μ -merateľná funkcia s oborom hodnôt v $[0, 1]$. V dôsledku Luzinovej vety sa musí μ -skoro všade zhodovať s nejakou borelovskou funkciou g_μ . $\square$

Veta 5.10. *Nech X, Y sú štandardné borelovské priestory a $f : X \longrightarrow Y$ je borelovské zobrazenie. Potom $f(X)$ je absolútne merateľná množina v Y .*

Naznačíme ako je možné dospieť k tomuto výsledku: Najskôr, Tvrdenie [8, Proposition 14.4 (ii)] hovorí, že borelovský obraz analytickej podmnožiny poľského priestoru je analytická množina. Pretože máme X štandardný borelovský priestor, je podľa definície izomorfný borelovskej podmnožine poľského priestoru. A pretože borelovské množiny sú analytické (Poznámka 5.2), dostávame, že $f(X)$ je analytická podmnožina v Y . Napokon, podľa Vety [8, Theorem 21.10] je každá analytická podmnožina štandardného borelovského priestoru absolútne merateľná a teda $f(X)$ je absolútne merateľná množina v Y .

Na základe týchto poznatkov teraz dokážeme výsledok, ktorý budeme potrebovať pre túto prácu:

Veta 5.11. *Nech X, Y sú štandardné borelovské priestory a zobrazenie $f : X \longrightarrow Y$ je borelovské a na. Ďalej nech μ je konečná nezáporná miera na Y . Potom existuje borelovská podmnožina $N \subseteq Y$ nulovej miery μ a borelovské zobrazenie $g : Y \setminus N \longrightarrow X$ tak, že $f \circ g$ je identita na $Y \setminus N$.*

Dôkaz. Stačí si rozmyslieť, že štandardný borelovský priestor je spočítateľne separovaný. Potom totiž podľa Vety 5.8 existuje absolútne merateľný rez g pre f . K danej miere μ existuje z Vety 5.9 borelovská funkcia g_μ , pre ktorú $g_\mu = g$ skoro všade, tzn. že existuje borelovská množina $N \subseteq Y$, že $\mu(N) = 0$ a $g_\mu = g$ na $Y \setminus N$. Z definície rezu je $f \circ g$ identita na Y , teda na $Y \setminus N$ je $f \circ g_\mu = f \circ g$ tiež identita. Funkcia g_μ je teda hľadaná borelovská funkcia.

Podľa definície je Y izomorfný borelovskej podmnožine separabilného úplného metrického priestoru. Označme $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ hustú podmnožinu v Y . Pre $m, n \in \mathbb{N}$ definujeme množiny

$$E_{m,n} = \left\{ y \in Y : \text{dist}(y, y_n) < \frac{1}{m} \right\}.$$

Potom systém $\{E_{m,n} : m, n \in \mathbb{N}\}$ oddeľuje body Y : Pre danú dvojicu x, y nájdeme $m \in \mathbb{N}$, pre ktoré je $\text{dist}(x, y) > \frac{2}{m}$. Potom z hustoty nájdeme $n \in \mathbb{N}$ také, že $\text{dist}(x, y_n) < \frac{1}{m}$, takže x leží v $E_{m,n}$, ale $\text{dist}(y, y_n) > \frac{1}{m}$ z trojuholníkovej nerovnosti, čiže y v $E_{m,n}$ neleží. $\square$

Poznámka 5.12. V dôkaze sme elementárne dokazovali, že štandardný borelovský priestor je spočítateľne separovaný. Tento výsledok je tiež okamžite vidieť z toho, že štandardný borelovský priestor ako “podmnožina” separabilného metrického priestoru má spočítateľnú bázu.

Zvyšok kapitoly je postavíme podľa [4].

5.2 Hilbertovské zväzky

Definícia 5.13. Nech X je štandardný borelovský priestor. *Štandardným zväzkom separabilných Hilbertových priestorov* (skrátene *hilbertovským zväzkom*) nazývame systém $H = \{H_x : x \in X\}$ splňajúci nasledujúce podmienky:

- (i) Existuje surjektívne borelovské zobrazenie $p : H \longrightarrow X$ také, že pre každé $x \in X$ je $p^{-1}(x) = H_x$ separabilný Hilbertov priestor, v ktorom sú operácie sčítanie, násobenie skalárom a skalárny súčin borelovsky merateľné (pre upresnenie vid' Poznámka 5.15),
- (ii) existujú borelovské rezy $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ pre p , $\xi_n : x \in X \mapsto \xi_n(x) \in H_x$, pre ktoré platí

$$H_x = \overline{\text{span}}\{\xi_1(x), \xi_2(x), \dots\}, \quad x \in X.$$

Poznámka 5.14. Je zvykom predpokladať, že priestory H_x sú netriviálne, t.j. $H_x \neq \{0\}$, pre každé $x \in X$.

V ďalšom budeme stále uvažovať separabilný oparátorový systém S a štandardný borelovský priestor X . Písmeno H bude vyhradené pre hilbertovský zväzok $H = \{H_x : x \in X\}$, pokiaľ nebude povedané inak.

Poznámka 5.15. Pozrime sa precíznejšie na podmienku borelovskosti operácií na H_x . Definíciným oborom operácií sčítanie a skalárny súčin je množina $\{(\xi, \eta) \in H \times H : p(\xi) = p(\eta)\}$ a pre násobenie skalárom je to celý súčin $\mathbb{C} \times H$. Podmienka hovorí, že funkcie $(\xi, \eta) \mapsto \xi + \eta$, respektíve $(\xi, \eta) \mapsto (\xi, \eta)_{H_x}$, respektíve $(\lambda, \xi) \mapsto \lambda\xi$, sú borelovsky merateľné.

Poznámka 5.16. Nech $\mu : H \longrightarrow \mathbb{C}$ je borelovská funkcia. Definujme funkciu $g : H \longrightarrow H$ predpisom $g(\xi) = \mu(\xi)\xi$, pre $\xi \in H$. Všimnime si, že túto funkciu môžeme napísať ako zloženie $g = g_1 \circ g_2$, kde

$$\begin{aligned} g_1 : (\lambda, \xi) \in \mathbb{C} \times H &\mapsto \lambda\xi \in H, \\ g_2 : \xi \in H &\mapsto (\mu(\xi), \xi) \in \mathbb{C} \times H. \end{aligned}$$

Pretože g_1 je podľa definície borelovská a g_2 je borelovská vďaka predpokladu borelovskosti funkcie μ , dostávame že takto definovaná funkcia g je borelovská.

Dôsledok 5.17. Nech $\lambda : X \longrightarrow \mathbb{C}$ je borelovská a $p : H \longrightarrow X$ je borelovské zobrazenie dané Definíciou 5.13. Ďalej nech pre p je daný borelovský rez $\xi : x \in X \mapsto \xi(x) \in H_x$. Potom zobrazenie

$$\varphi : x \in X \mapsto \lambda(x)\xi(x)$$

je tiež borelovským rezom pre p .

Dôkaz. Podľa definície rezu je $p \circ \xi = id_X$. Pre $x \in X$ počítajme:

$$\varphi(x) = \lambda(x)\xi(x) = \lambda(id_X(x))\xi(x) = \lambda(p(\xi(x))\xi(x) = (\lambda \circ p)(\xi(x))\xi(x).$$

Funkcia $\lambda \circ p : H \longrightarrow \mathbb{C}$ je ako zloženie borelovských zobrazení borelovská a teda podľa Poznámky 5.16 je φ borelovská.

Zostáva si uvedomiť, že φ je skutočne rezom pre p , t.j. že $p \circ \varphi = id_X$. Voľme $x \in X$ ľubovoľné, potom

$$(p \circ \varphi)(x) = p(\underbrace{\lambda(x)\xi(x)}_{\in H_x = p^{-1}(x)}) = x.$$

□

Poznámka 5.18. Všimnime si ešte, že ak máme dva borelovské rezy φ_1, φ_2 pre $p : H \longrightarrow X$, potom ich súčet je vďaka podmienke (i) Definície 5.13 borelovské zobrazenie a navyiac je opäť rezom pre p , pretože pre $x \in X$ je

$$(p \circ (\varphi_1 + \varphi_2))(x) = p(\underbrace{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}_{\in H_x}) = x.$$

Poznámka 5.19. Všimnime si, že vďaka Dôsledku 5.17 a Poznámke 5.18 je každá lineárna kombinácia rezov opäť rezom pre daný zväzok. Takže pre množinu rezov $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ z Definície 5.13 je množina všetkých ich lineárnych kombinácií s racionálnymi koeficientami opäť spočítateľná množina rezov, označme ju $\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\}$. Potom tieto rezy splňajú

$$H_x = \overline{\{\eta_1(x), \eta_2(x), \dots\}}, \quad x \in X.$$

Miesto rezov daných definíciou Hilbertovského zväzku budeme väčšinou uvažovať práve množinu týchto upravených rezov.

Lema 5.20. *Pre hilbertovský zväzok $H = \{H_x : x \in X\}$ existujú borelovské rezy $\eta_n : x \in X \mapsto \eta_n(x) \in H_x$ také, že platí*

$$\|\eta_n(x)\| \in \{0, 1\}, \quad x \in X, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.1)$$

$$(\eta_i(x), \eta_j(x))_{H_x} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{N}, \quad x \in X \quad (5.2)$$

a tieto rezy generujú priestory H_x v zmysle

$$H_x = \overline{\text{span}\{\eta_1(x), \eta_2(x), \dots\}}, \quad x \in X.$$

Dôkaz. Vezmime borelovské rezy $\xi_1, \xi_2, \dots$ z definície hilbertovského zväzku a zortogonalizujeme ich spôsobom obdobným Gramm-Schidtovmu ortogonalizačnému procesu. Konkrétne, položme

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_1(x) &:= \xi_1(x), \\ \tilde{\xi}_n(x) &:= \xi_n(x) - \sum_{i=1}^{n-1} (\xi_n, \tilde{\xi}_i(x))_{H_x} \tilde{\xi}_i(x), \quad n > 1, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Tým dostaneme zobrazenia spĺňajúce (5.2). Potom definujeme hľadané zobrazenia $\eta_n : x \in X \mapsto \eta_n(x) \in H_x$ pomocou

$$\eta_n(x) = \begin{cases} \frac{\tilde{\xi}_n(x)}{\|\tilde{\xi}_n(x)\|}, & \text{ak } \tilde{\xi}_n(x) \neq 0, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Funkcia $x \in X \mapsto \|\tilde{\xi}_n(x)\|$ je borelovská vďaka borelovskosti rezov $\tilde{\xi}_k$ a skalárneho súčinu na H_x z definície, lebo $\|\tilde{\xi}_k(x)\|^2 = (\tilde{\xi}_k(x), \tilde{\xi}_k(x))_{H_x}$. Podľa Dôsledku 5.17 a Poznámky 5.18 sú teda zobrazenia $\eta_1, \eta_2, \dots$ opäť borelovskými rezmi. Tieto už spĺňajú i podmienku (5.1). $\square$

Poznámka 5.21. Neskôr sa nám bude tiež hodiť, že pre hilbertovský zväzok $H = \{H_x : x \in X\}$ existujú borelovské rezy $\eta_1, \eta_2, \dots$ také, že množina $\{\eta_1(x), \eta_2(x), \dots\}$ je hustá v jednotkovej guli priestoru H_x pre každé $x \in X$. K tomu stačí rezy $\xi_1, \xi_2, \dots$ z Poznámky 5.19 upraviť nasledovne:

$$\eta_n(x) = \begin{cases} \xi_n(x) & \text{ak } \|\xi_n(x)\| \leq 1, \\ \frac{1}{\|\xi_n(x)\|} \xi_n(x) & \text{inak.} \end{cases}$$

Že sa jedná o borelovské rezy sa ukáže pomocou už popísaných úvah.

Definícia 5.22. Hovoríme, že hilbertovské zväzky H^1, H^2 sú *izomorfné*, ak existuje izomorfizmus $U : H^1 \longrightarrow H^2$ taký, že pre každé $x \in X$ je $U \upharpoonright_{H_x} : H_x^1 \longrightarrow H_x^2$ unitárny operátor.

Definícia 5.23. Pre $n = 1, 2, \dots, \infty$ definujeme množiny

$$X_n := \{x \in X : \dim H_x = n\}.$$

Tvrdenie 5.24. Množiny X_n sú borelovské, pre každé $n = 1, 2, \dots, \infty$.

Dôkaz. Uvažujme najskôr konečné $n \in \mathbb{N}$. Nech $\eta_1, \eta_2, \dots$ sú rezy z Lemy 5.20. Podľa definície X_n je pre $x \in X_n$ dimenzia priestoru H_x rovná n a vektory $\eta_k(x)$ ($k \in \mathbb{N}$) sú navzájom kolmé, môže byť maximálne n z týchto vektorov nenulových. Ale vďaka vlastnosti $H_x = \overline{\text{span}}\{\eta_1(x), \eta_2(x), \dots\}$ je nenulových práve n vektorov množiny $\{\eta_1(x), \eta_2(x), \dots\}$. Odtiaľ dostávame, že $x \in X$ je prvkom množiny X_n práve vtedy, keď existuje n -prvková množina indexov $F_n \subset \mathbb{N}$ tak, že $\eta_i(x) \neq 0$ práve pre $i \in F_n$. Ak k tomu použijeme vlastnosť normy, že $\|\eta_k(x)\| = 0$ práve keď $\eta_k(x) = 0$, máme nasledovnú charakteristiku množiny X_n :

$$\begin{aligned} X_n &= \{x \in X : \#\{i \in \mathbb{N} : \|\eta_i(x)\| > 0\} = n\} \\ &= \bigcup_{F \subset \mathbb{N}, |F|=n} \{x \in X : \|\eta_i(x)\| > 0, i \in F \text{ \& } \|\eta_j(x)\| = 0, j \in \mathbb{N} \setminus F\} \\ &= \bigcup_{F \subset \mathbb{N}, |F|=n} \left(\bigcap_{i \in F} \{x \in X : \|\eta_i(x)\| > 0\} \cap \bigcap_{j \in \mathbb{N} \setminus F} \{x \in X : \|\eta_j(x)\| = 0\} \right). \end{aligned}$$

Pretože funkcia $x \in X \mapsto \|\eta_k(x)\|$ je borelovská pre všetky $k \in \mathbb{N}$ (viď dôkaz Lemy 5.20), množina $\{x \in X : \|\eta_i(x)\| > 0\}$ je ako vzor otvoreného intervalu $(0, \infty)$ pri borelovskej funkcii borelovská a teda aj jej doplnok v X , tj. množina $\{x \in X : \|\eta_i(x)\| = 0\}$ je borelovská (pre ľubovoľné $i \in \mathbb{N}$). Keďže všetky prieniky a zjednotenie v uvedenej charakteristike množiny X_n sú spočítateľné, je i množina X_n borelovská.

Zostáva nám prípad $n = \infty$. Ale pretože $X = \bigcup \{X_n : n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}$, môžeme X_∞ písať ako rozdiel borelovských množín

$$X_\infty = X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n,$$

takže aj X_∞ je borelovská množina. $\square$

Lema 5.25. *Nech H je štandardný borelovský priestor a H je separabilný Hilbertov priestor. Potom súčin $X \times H$ tvorí hilbertovský zväzok.*

Dôkaz. Potrebujeme overiť podmienky z Definície 5.13. Pozrime sa najskôr na (i): Definujme zobrazenie

$$\begin{aligned} p : X \times H &\longrightarrow X \\ (x, \xi) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Potom p je zrejme borelovské a je na. Ďalej ak pre $x \in X$ budeme uvažovať na priestore $p^{-1}(x) = \{x\} \times H$ operácie definované

$$\begin{aligned} + & : ((x, \xi_1), (x, \xi_2)) \in (\{x\} \times H) \times (\{x\} \times H) \mapsto (x, \xi_1 + \xi_2) \in \{x\} \times H, \\ \cdot & : (\lambda, (x, \xi)) \in \mathbb{C} \times (\{x\} \times H) \mapsto (x, \lambda \xi) \in \{x\} \times H, \\ (\cdot, \cdot)_{\{x\} \times H} & : ((x, \xi_1), (x, \xi_2)) \in (\{x\} \times H) \times (\{x\} \times H) \mapsto (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

potom tieto operácie sú určite borelovsky merateľné a máme splnenú (i). K tomu aby sme ukázali platnosť podmienky (ii) vezmeme množinu $\{\eta_1, \eta_2, \dots\}$ hustú v B_H a definujme zobrazenia

$$\xi_n : x \in X \mapsto (x, \eta_n) \in \{x\} \times H, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Potom pre každé $x \in X$ je $\overline{\text{span}}\{\xi_1(x), \xi_2(x), \dots\} = \{x\} \times H$ a platí

$$(p \circ \xi_n)(x) = p((x, \eta_n)) = x, \quad n \in \mathbb{N},$$

takže $p \circ \xi_n = \text{id}_X$ a teda ξ_n sú rezmi pre p . $\square$

Tvrdenie 5.26. *Nech $H = \{H_x : x \in X\}$ je hilbertovský zväzok s príslušným borelovským zobrazením $p : H \longrightarrow X$. Potom jeho restrikcia na X_n , t.j.*

$$H \upharpoonright_{X_n} = \{H_x : x \in X_n\} = \{p^{-1}(x) : x \in X_n\},$$

je izomorfná zväzku určenému zobrazením

$$q : \begin{cases} X_n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow X_n, & \text{v prípade } n < \infty, \\ X_\infty \times \ell^2 \longrightarrow X_\infty, & \text{ak } n = \infty. \end{cases}$$

Dôkaz. Rozoberieme najskôr prípad, keď $n < \infty$. Vezmime pevné konečné n . Ukážeme, že existujú zobrazenia $e_i : x \in X_n \mapsto e_i(x) \in H_x$, $i = 1, \dots, n$ také, že množina $\{e_1(x), \dots, e_n(x)\}$ tvorí ortonormálnu bázu v H_x pre všetky $x \in X_n$. K tomu vezmime rezy $\eta_1, \eta_2 \dots$ z Lemy 5.20 a pre každú n -prvkovú podmnožinu $F \subset \mathbb{N}$ označme

$$X_n^F = \{x \in X_n : \forall k \in F \quad \eta_k(x) \neq 0\}.$$

Tieto množiny sú borelovské vďaka borelovskosti rezov $\eta_1, \eta_2, \dots$. Pretože dimenzia priestoru H_x je n a rezy $\eta_1, \eta_2, \dots$ spĺňajú (5.2), pre každé $x \in X_n$ existuje jednoznačne určená množina indexov $F = \{k_1, \dots, k_n\}$ takých, že $\eta_{k_i}(x) \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. To znamená, že

$$X_n = \bigcup_{F \subset \mathbb{N}, |F|=n} X_n^F$$

je spočítateľný dizjunktný rozklad množiny X_n na borelovské podmnožiny X_n^F také, že pre každé $x \in X_n^F$ tvorí množina $\{\eta_{k_1}(x), \dots, \eta_{k_n}(x)\}$ ortonormálnu bázu priestoru H_x . Môžeme teda definovať $e_1, e_2, \dots$ takto: Pre $x \in X_n$ nájdeme $F = \{k_1, \dots, k_n\} \subset \mathbb{N}$ takú, že $x \in X_n^F$ a položíme

$$e_i(x) := \eta_{k_i}(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Ďalej pre $x \in X_n$ uvažujme zobrazenia

$$\begin{aligned} U_x : H_x &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ \xi &\longmapsto ((\xi, e_1(x))_{H_x}, \dots, (\xi, e_n(x))_{H_x}). \end{aligned}$$

Ukážeme, že hľadaný izomorfizmus bude zobrazenie definované takto:

$$\begin{aligned} U : H \upharpoonright_{X_n} &\longrightarrow X_n \times \mathbb{C}^n \\ \xi &\longmapsto (x, U_x \xi), \end{aligned}$$

kde $x \in X_n$ je také, že $\xi \in p^{-1}(x)$.

Najskôr overíme, že $U \upharpoonright_{H_x}$ je unitárny operátor. K tomu potrebujeme, aby bol unitárny operátor U_x , pre každé $x \in X_n$. Vezmime pevné $x \in X_n$ a pozrime sa ako vyzerá adjungovaný operátor U_x^* . Podľa definície má platiť

$$(U_x \xi, \lambda)_{\mathbb{C}^n} = (\xi, U_x^* \lambda)_{H_x}, \quad \xi \in H_x, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Počítajme:

$$(U_x \xi, \lambda)_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i (\xi, e_i(x))_{H_x} = \sum_{i=1}^n (\xi, \lambda_i e_i(x))_{H_x} = (\xi, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i(x))_{H_x},$$

takže $U_x^* \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i(x)$, pre $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. Chceme, že $U_x U_x^* = I = U_x^* U_x$:

$$\begin{aligned}
U_x^* U_x \xi &= U_x^* ((\xi, e_1(x))_{H_x}, \dots, (\xi, e_n(x))_{H_x}) \\
&= \sum_{i=1}^n (\xi, e_i(x))_{H_x} e_i(x) = \xi, \quad \xi \in H_x \\
U_x U_x^* \lambda &= U_x \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i(x) \right) \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i(x), e_1(x) \right)_{H_x}, \dots, \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i(x), e_n(x) \right)_{H_x} \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i(x), e_1(x))_{H_x}, \dots, \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i(x), e_n(x))_{H_x} \right) \\
&= (\lambda_1 \|e_1\|^2, \dots, \lambda_n \|e_n\|^2) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}^n.
\end{aligned}$$

Ďalej si rozmyslíme, že U je prosté. Nech $\eta_1 \neq \eta_2$ sú prvky $H \upharpoonright_{X_n}$. Potom určite $(x_1, U_{x_1} \eta_1) \neq (x_2, U_{x_2} \eta_2)$ v prípade, že $x_1 \neq x_2$. Nech teda $\eta_1, \eta_2 \in p^{-1}(x)$ pre nejaké $x \in X_n$. Predpokladajme pre spor, že $U_x \eta_1 = U_x \eta_2$, t.j. pre každé $i = 1, \dots, n$ je $(\eta_1, e_i(x))_{H_x} = (\eta_2, e_i(x))_{H_x}$. Pretože $e_1(x), \dots, e_n(x)$ tvoria bázu v H_x , platí rovnosť $(\eta_1, \xi)_{H_x} = (\eta_2, \xi)_{H_x}$ pre všetky prvky $x \in H_x$ a teda $\eta_1 = \eta_2$, čo je potrebný spor.

K tomu, aby U bolo na treba ukázať, že U_x je na $\mathbb{C}^n$, pre všetky $x \in X_n$. K danému $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ prvok definovaný $\xi := \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i(x)$ splňa $U_x \xi = \lambda$. Konečne U je spojitý, pretože U_x sú spojitý vďaka spojitosti skalárneho súčinu, a U^{-1} je spojitý, pretože $U_x^{-1} = U_x^*$ a to je spojitý z vlastností adjungovaného oprátora.

Zostáva nám rozobrať prípad, keď $n = \infty$. Potrebujeme opäť zkonštruovať zobrazenia $e_1, e_2, \dots$ tak, že pre každé $x \in X_\infty$ je množina $\{e_1(x), e_2(x), e_3(x), \dots\}$ ortonormálnou bázou priestoru H_x . Opäť vezmime rezy $\eta_1, \eta_2 \dots$ z Lemy 5.20 a postupujme nasledujúcou indukciou:

V prvom kroku definujeme pre $k_1 \in \mathbb{N}$ množiny

$$X_\infty^{\{k_1\}} := \{x \in X_\infty : (\forall k \leq k_1)(\eta_k(x) = 0) \& (\eta_{k_1+1}(x) \neq 0)\}.$$

Potom

$$X_\infty = \bigcup_{k_1 \in \mathbb{N}} X_\infty^{\{k_1\}}$$

je dizjunktné zjednotenie borelovských množín, pretože rezy $\eta_1, \eta_2, \dots$ sú borelovské. Takže pre $x \in X_\infty$ nájdeme jednoznačné $k_1 \in \mathbb{N}$ také, že $x \in X_\infty^{\{k_1\}}$. Potom zobrazenia definované vzťahom

$$e_n(x) := \eta_{k_1+1}(x), \quad n \geq 1$$

sú borelovské s vlastnosťami (5.1), (5.2) a platí, že $e_1(x) \neq 0$ pre každé $x \in X_\infty$. V druhom kroku definujeme množiny

$$\begin{aligned}
X_\infty^{\{k_1, k_2\}} &:= \{x \in X_\infty^{\{k_1\}} : (\forall k \leq k_1 + 1 + k_2, k > k_1 + 1) \\
&\quad (\eta_k(x) = 0) \& (\eta_{k_1+1+k_2+1}(x) \neq 0)\}.
\end{aligned}$$

Dostávame dizjunktný rozklad na borelovské množiny

$$X_{\infty}^{\{k_1\}} = \bigcup_{k_2 \in \mathbb{N}} X_{\infty}^{\{k_1, k_2\}}$$

a zobrazenia upravené pomocou

$$e_n(x) := e_{n+k_2}(x), \quad n \geq 2$$

sú borelovské, spĺňajú (5.1), (5.2) a pre $k = 1, 2$ je $e_k(x) \neq 0$ pre každé $x \in X_{\infty}$. V $(i+1)$ -vom kroku predpokladajme, že máme borelovské zobrazenia $e_1, e_2, \dots$ spĺňajúce podmienky (5.1), (5.2) a pre každé $k = 1, \dots, i$ platí $e_k(x) \neq 0$. Množiny $X_{\infty}^{\{k_1, \dots, k_i\}}$ z i -teho kroku rozložíme dizjunktne opäť na borelovské množiny

$$X_{\infty}^{\{k_1, \dots, k_{i+1}\}} := \{x \in X_{\infty}^{\{k_1, \dots, k_i\}} : \quad (\forall k \leq k_1 + \dots + k_i + i - 1, k > k_1 + \dots + k_i + i) \\ (\eta_k(x) = 0) \ \& \ (\eta_{k_1 + \dots + k_i + i + 1}(x) \neq 0)\}$$

a položíme

$$e_n(x) := e_{n+k_{i+1}}(x), \quad n \geq i+1,$$

kde k_{i+1} sme našli k x také, že $x \in X_{\infty}^{\{k_1, \dots, k_{i+1}\}}$.

Nekonečnou indukciou dostaneme borelovské zobrazenia $e_1, e_2, \dots$ také, že $e_k(x) \neq 0$ pre každé $k \in \mathbb{N}$ a majú vlastnosti (5.1), (5.2) a

$$H_x = \overline{\text{span}}\{e_1(x), e_2(x), \dots\}, \quad x \in X_{\infty},$$

čo sme presne potrebovali. Operátor U_x v tomto prípade definujeme

$$\begin{aligned} U_x : H_x &\longrightarrow \ell^2 \\ \xi &\longmapsto ((\xi, e_1(x))_{H_x}, (\xi, e_2(x))_{H_x}, \dots). \end{aligned}$$

Keďže $e_n(x)_{n=1}^{\infty}$ je ortonormálna báza, Parsevalova rovnosť $\sum_{n=1}^{\infty} \|(\xi, e_n(x))_{H_x}\|^2 = \|\xi\|^2$ zaručí, že $U_x \xi$ leží v ℓ^2 , pre každé $\xi \in H_x$. Potom hľadaný izomorfizmus je analogicky prvému prípadu definovaný

$$\begin{aligned} U : H \restriction_{X_{\infty}} &\longrightarrow X_{\infty} \times \ell^2 \\ \xi &\longmapsto (x, U_x \xi), \end{aligned}$$

kde $x \in X_{\infty}$ je opäť také, že $\xi \in p^{-1}(x)$. Dôkaz, že sa jedná o izomorfizmus, je obdobný konečnému prípadu. $\square$

5.3 Merateľné systémy operátorov

Majme hilbertovský zväzok $H = \{H_x : x \in X\}$ a borelovské zobrazenie $A : H \longrightarrow H$. Ak operátory $A_x := A \upharpoonright_{H_x}$ ležia v $\mathcal{B}(H_x)$ pre každé $x \in X$ a spĺňajú podmienku $\sup_{x \in X} \|A_x\| < \infty$, píšeme $A = \{A_x : x \in X\}$ a hovoríme, že A je *merateľný systém operátorov*. Poznamenajme, že množina všetkých takýchto operátorových systémov tvorí C^* -algebru s jednotkou. My sa budeme podrobnejšie zaoberať systémami UCP zobrazení na separabilnom operátorovom systéme S .

Definícia 5.27. Nech H je hilbertovský zväzok s príslušným zobrazením $p : H \longrightarrow X$. *Systémom UCP zobrazení* na S budeme rozumieť množinu $\phi = \{\phi_x : x \in X\}$ UCP zobrazení $\phi_x : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_x)$ takých, že pre každú dvojicu borelovských rezov ξ, η pre p a všetky $s \in S$ je

$$x \in X \mapsto (\phi_x(s)\xi(x), \eta(x))_{H_x} \in \mathbb{C}$$

borelovská funkcia na X .

Ďalej zavedieme značenie:

$$\begin{aligned} UCP(S, \mathcal{B}(H_x)) &= \{\phi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_x) : \phi \text{ je UCP}\}, \\ UCP(X, S, \mathcal{B}(H)) &= \{(x, \phi) : x \in X, \phi \in UCP(S, \mathcal{B}(H_x))\}. \end{aligned}$$

Tvrdenie 5.28. Na množine $UCP(X, S, \mathcal{B}(H))$ sa dá zaviesť štruktúra štandardného borelovského priestoru tak, že projekcia

$$\begin{aligned} p : UCP(X, S, \mathcal{B}(H)) &\longrightarrow X \\ (x, \phi) &\longmapsto x \end{aligned}$$

je borelovské zobrazenie.

V Dôkaze budeme potrebovať nasledujúcu vlastnosť kovergencie v slabej operátorovej topológii:

Lema 5.29. Nech K je Hilbertov priestor a $n \in \mathbb{N}$. Nech sú pre každé $i, j = 1, \dots, n$ dané postupnosti operátorov $\{T_{ij}^k\}_{k=1}^\infty$ v $\mathcal{B}(K)$ také, že postupnosť $\{T_{ij}^k\}$ konverguje vo WOT k operátoru $T_{ij} \in \mathcal{B}(K)$ pre $k \rightarrow \infty$, $i, j = 1, \dots, n$. Potom matica $(T_{ij})_{ij} \in M_n(\mathcal{B}(K)) = \mathcal{B}(K^n)$ WOT-konverguje k matici $(T_{ij})_{ij}$.

Dôkaz. Pre $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ a $y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$ máme

$$\begin{aligned} ((T_{ij}^k)_{ij}x, y)_{K^n} &= \left(\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n T_{1j}^k x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n T_{nj}^k x_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right)_{K^n} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n T_{ij}^k x_j, y_i \right)_K \\ &= \sum_{i,j=1}^n (T_{ij}^k x_j, y_i)_K \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n (T_{ij} x_j, y_i)_K = \dots = ((T_{ij})_{ij}x, y)_{K^n}. \end{aligned}$$

□

Dôkaz Tvrdenia 5.28. V prvom kroku predpokladajme, že pre každé $x \in X$ je $H_x = K$ pre nejaký separabilný Hilbertov priestor K . To znamená, že $UCP(S, \mathcal{B}(H_x)) = UCP(S, \mathcal{B}(K))$, pre všetky $x \in X$ a teda $UCP(X, S, \mathcal{B}(H)) = X \times UCP(S, \mathcal{B}(K))$. Na $UCP(S, \mathcal{B}(K))$ uvažujme BW-topológiu zdedenú z $\mathbf{B}(S, K)$ (viď Definícia 4.5). V tejto topológii je $UCP(S, \mathcal{B}(K))$ metrizovateľný, pretože UCP zobrazenia sú úplne kontraktívne (Tvrdenie 1.47) a teda $UCP(S, \mathcal{B}(K)) \subseteq \mathbf{B}_1(S, K)$, čo je BW-metrizovateľná množina (viď Tvrdenie 4.18).

Ďalej ukážeme, že $UCP(S, \mathcal{B}(K))$ je BW-kompaktný. Opäť využijeme znalosti zo 4.kapitoly. A síce, že $\mathbf{B}_1(S, K)$ je kompaktná v BW (Tvrdenie 4.17), takže stačí ukázať, že $UCP(S, \mathcal{B}(K))$ je jej BW-uzavretá podmnožina. Už máme metrizovateľnosť, uvažujme teda postupnosť* $\{\phi^k\}_{k=1}^\infty$ v $UCP(S, \mathcal{B}(K))$ BW-konvergujúcu k ϕ . Potrebujeme ukázať, že ϕ leží v $UCP(S, \mathcal{B}(K))$. Podľa definície BW-topológie teda vieme, že pre každé $s \in S$ platí

$$(\phi^k(s)x, y)_K \rightarrow (\phi(s)x, y)_K, \quad k \rightarrow \infty, \quad x, y \in K.$$

Odtiaľ ihneď dostávame, že ϕ zachováva jednotku, totiž

$$(\phi(e)x, y)_K = \lim_{k \rightarrow \infty} (\phi^k(e)x, y)_K = (x, y), \quad x, y \in K$$

a je pozitívne, pretože pre každé $s \geq 0$ je

$$(\phi(s)x, y)_K = \lim_{k \rightarrow \infty} (\phi^k(s)x, y)_K \geq 0, \quad x \in K.$$

Pre dôkaz úplnej positivity voľme $n \in \mathbb{N}$ a pozitívnu maticu $(s_{ij}) \in M_n(S)$. Potom s použitím Lemy 5.29 môžeme pre $x \in K^n$ písať

$$\begin{aligned} (\phi_n((s_{ij})_{ij})x, x)_{K^n} &= ((\phi(s_{ij}))_{ij}x, x)_{K^n} = \lim_{k \rightarrow \infty} ((\phi^k(s_{ij}))_{ij}x, x)_{K^n} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\phi_n^k((s_{ij})_{ij})x, x)_{K^n} \geq 0 \end{aligned}$$

a teda ϕ je UCP zobrazenie z S do $\mathcal{B}(K)$, čo sme potrebovali.

Takže máme, že $UCP(S, \mathcal{B}(K))$ je metrizovateľný kompaktný, čiže je izomorfný borelovskej podmnožine separabilného úplného metrického priestoru. To znamená, že $UCP(X, S, \mathcal{B}(H)) = X \times UCP(S, \mathcal{B}(K))$ je súčin štandardných borelovských priestorov a teda je to štandardný borelovský priestor s príslušným zobrazením $p : X \times UCP(S, \mathcal{B}(K)) \rightarrow X$, pre ktoré je $p^{-1}(x) = K$. Takémuto zväzku hovoríme *triviálny zväzok*.

V druhom kroku majme prípad všeobecného zväzku $UCP(X, S, \mathcal{B}(H))$ s príslušným zobrazením $p : UCP(X, S, \mathcal{B}(H)) \rightarrow X$. Podľa Tvrdenia 5.26 je restringovaný zväzok $H \upharpoonright_{X_n}$ izomorfný zväzku $X_n \times \mathbb{C}^n$ pre $n \in \mathbb{N}$, respektíve zväzku

*Výnimočne indexujeme postupnosť horným indexom, pretože dolný index zobrazenia ϕ je použitý pre úrovňové zobrazenie $\phi_n : M_n(S) \rightarrow \mathcal{B}(H_n)$.

$X_n \times \ell^2$ pre $n = \infty$ (v zmysle Definície 5.22). Odtiaľ dostávame izomorfizmy zväzkov

$$\begin{aligned} UCP(X_n, S, \mathcal{B}(H \upharpoonright_{X_n})) &\cong UCP(X_n, S, \mathcal{B}(X_n \times \mathbb{C}^n)), \quad n \in \mathbb{N}, \\ UCP(X_\infty, S, \mathcal{B}(H \upharpoonright_{X_\infty})) &\cong UCP(X_\infty, S, \mathcal{B}(X_\infty \times \ell^2)). \end{aligned}$$

Ale na pravej strane už máme prípad z prvého kroku, takže dostávame, že pre každé $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ je zväzok $UCP(X_n, S, \mathcal{B}(H \upharpoonright_{X_n}))$ izomorfný triviálnemu zväzku, konkrétne

$$\begin{aligned} UCP(X_n, S, \mathcal{B}(H \upharpoonright_{X_n})) &\cong X_n \times UCP(S, \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)), \quad n \in \mathbb{N}, \\ UCP(X_\infty, S, \mathcal{B}(H \upharpoonright_{X_\infty})) &\cong X_\infty \times UCP(S, \mathcal{B}(\ell^2)). \end{aligned}$$

Ďalej pretože priestor X je dizjunktným zjednotením množín X_n , môžeme zväzok $UCP(X, S, \mathcal{B}(H))$ písať opäť ako spočítateľné dizjunktné zjednotenie týchto triviálnych zväzkov:

$$\begin{aligned} UCP(X, S, \mathcal{B}(H)) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} UCP(X_n, S, \mathcal{B}(H \upharpoonright_{X_n})) \\ &= (X_\infty \times UCP(S, \mathcal{B}(\ell^2))) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X_n \times UCP(S, \mathcal{B}(\mathbb{C}^n))). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Na týchto zväzkoch sme borelovskú štruktúru zaviedli v prvom kroku, takže $UCP(X, S, \mathcal{B}(H))$ je dizjunktným zjednotením štandardných borelovských priestorov a teda je to štandardný borelovský priestor. $\square$

Pozorovanie 5.30. *Nech je dané zobrazenie $x \in X \mapsto A_x \in \mathcal{B}(K)$, kde A_x je samoadjungovaný operátor na Hilbertovom priestore K . Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

- (i) *Pre každé $\xi, \eta \in K$ je funkcia $x \in X \mapsto (A_x \xi, \eta) \in \mathbb{C}$ borelovská.*
- (ii) *Pre každé borelovské zobrazenia $\xi, \eta : X \rightarrow K$ je funkcia $x \in X \mapsto (A_x \xi(x), \eta(x))$ borelovská.*

Dôkaz. Tvrdenie (ii) zrejme implikuje (i), takže potrebujeme ukázať, že (i) implikuje (ii). Nech $\{e_1, e_2, \dots\}$ je ortonormálna báza priestoru K . Potom

$$\begin{aligned} (A_x \xi(x), \eta(x)) &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_x \xi(x), e_n)(e_n, \eta(x)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\xi(x), A_x e_n)(e_n, \eta(x)) \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} (\xi(x), e_m)(e_m, A_x e_n)(e_n, \eta(x)), \end{aligned}$$

a podľa predpokladu sú ξ, η borelovské a z (ii) je $x \mapsto (e_m, A_x e_n)$ tiež borelovská, takže aj $x \mapsto (A_x \xi(x), \eta(x))$ je borelovská funkcia. $\square$

Poznámka 5.31 (Merateľnosť rezov). Uvažujme Hilbertovský zväzok $H = \{H_x : x \in X\}$ a systém UCP zobrazení $\phi = \{\phi_x : x \in X\}$. Potom zobrazenie $\Phi : x \in X \mapsto (x, \phi_x) \in UCP(X, S, \mathcal{B}(H))$ je rez pre zväzok $UCP(X, S, \mathcal{B}(H))$ s príslušným borelovským zobrazením

$$\begin{aligned} p : UCP(X, S, \mathcal{B}(H)) &\longrightarrow X \\ (x, \psi) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Ukážeme, že merateľnosť systému $\phi = \{\phi_x : x \in X\}$ daná Definíciou 5.27 je ekvivalentná merateľnosti rezu Φ .

Najskôr si situáciu mierne zjednodušíme, totiž vďaka dizjunktnému rozkladu zväzku $UCP(X, S, \mathcal{B}(H))$ na triviálne zväzky (viď vzťah (5.3)) môžeme bez újmy na všeobecnosti miesto $UCP(X, S, \mathcal{B}(H))$ uvažovať triviálny zväzok $X \times UCP(S, \mathcal{B}(K))$, kde K je separabilný Hilbertov priestor. Ďalej definujeme zobrazenie

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : X &\longrightarrow UCP(S, \mathcal{B}(K)) \\ x &\longmapsto \phi_x. \end{aligned}$$

Potom zrejme Φ je borelovské práve vtedy, keď $\tilde{\Phi}$ je borelovské. Budeme teda skúmať merateľnosť zobrazenia $\tilde{\Phi}$. Na $UCP(S, \mathcal{B}(K))$ máme BW-topológiu zdedenú z $\mathbf{B}_1(S, \mathcal{B}(K))$, tzn. topológiu projektívne generovanú systémom pseudonoriem $\mathcal{P} = \{p : \varphi \in \mathcal{B}(K) \mapsto |(\varphi(s)\xi, \eta)_K| : s \in S, \xi, \eta \in K\}$. Naviac už vieme, že $UCP(S, \mathcal{B}(K))$ je metrizable kompaktný v BW (viď dôkaz Tvrdenia 5.28), takže systém pseudonoriem generujúci BW topológiu tohto priestoru môžeme brať spočítateľný. Borelovskosť zobrazenia $\tilde{\Phi}$ v tejto topológii znamená, že funkcia $p \circ \tilde{\Phi} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ je borelovská, pre každú pseudonormu $p \in \mathcal{P}$, tj. že sú borelovské funkcie

$$x \in X \mapsto (\phi_x(s)\xi, \eta)_K \quad s \in S, \quad \xi, \eta \in K. \quad (5.4)$$

Na druhú stranu, merateľnosť systému $\phi = \{\phi_x : x \in X\}$ podľa Definície 5.27 znamená, že pre každé $s \in S$ a pre každú dvojicu rezov $\xi, \eta : X \longrightarrow H$ je funkcia

$$x \in X \mapsto (\phi_x(s)\xi(x), \eta(x))$$

borelovská. Táto podmienka zrejme implikuje podmienku (5.4), zaujíma nás teda obrátená implikácia. Pre každé $x \in X$ existujú samoadjungované zobrazenia $\phi_x^1, \phi_x^2 : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_x)$ také, že

$$\phi_x(s) = \phi_x^1(s) + i\phi_x^2(s), \quad s \in S.$$

Konkrétne, stačí položiť $\phi_x^1(s) := \frac{1}{2}(\phi_x(s) + \phi_x(s)^*)$ a $\phi_x^2(s) := \frac{1}{2i}(\phi_x(s) - \phi_x(s)^*)$, $s \in S$. Potom ϕ_x^1, ϕ_x^2 sú určite opäť UCP zobrazenia a podľa predchádzajúceho Pozorovania 5.30 sú uvažované dve definície merateľnosti pre zobrazenia $x \in X \mapsto \phi_x^j$, $j = 1, 2$, ekvivalentné. Pretože súčet i násobenie skalárom sú borelovské operácie, sú tieto definície ekvivalentné i pre zobrazenia ϕ_x pre každé $x \in X$.

5.4 Dilatácie systémov UCP zobrazení a ich rezy

Máme štandardný borelovský zväzok separabilných Hilbertových priestorov $H = \{H_x : x \in X\}$ a systém UCP zobrazení $\phi = \{\phi_x : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_x) : x \in X\}$ na separabilnom operátorovom systéme S .

Definícia 5.32. *Dilatáciou systému ϕ rozumieme systém $\psi = \{\psi_x : x \in X\}$ UCP zobrazení $\psi_x : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_x \oplus \ell^2)$ takých, že pre každé $s \in S$, $x \in X$ a $\xi, \eta \in H_x$ platí*

$$(\psi_x(s)\xi, \eta) = (\phi_x(s)\xi, \eta).$$

Takže dilatácia systému ϕ žije na zväzku $K = \{K_x : x \in X\}$ separabilných Hilbertových priestorov $K_x = H_x \oplus \ell^2$, $x \in X$. Ďalej pre $x \in X$ definujeme množinu

$$D_x = \{\psi \in UCP(S, \mathcal{B}(H_x \oplus \ell^2)) : (\psi(s)\xi, \eta) = (\phi_x(s)\xi, \eta), s \in S, \xi, \eta \in H_x\}$$

a potom

$$D = \{(x, \psi) : x \in X, \psi \in D_x\} \subset UCP(X, S, \mathcal{B}(H \oplus \ell^2)).$$

Takto definovaná D tvorí tzv. *dilatačný zväzok* s projekciou $p : (x, \psi) \in D \mapsto x \in X$. Borelovskú štruktúru zdedí z $UCP(X, S, \mathcal{B}(H \oplus \ell^2))$, vďaka tomu je projekcia p borelovská.

Poznámka 5.33. Prvky množiny D_x sú teda práve všetky dilatácie $\psi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_x \oplus \ell^2)$ zobrazenia ϕ_x . Totiž pre $\psi \in D_x$ je podľa definície $(\psi(s)\xi, \eta)_{H_x \oplus \ell^2} = (\phi_x(s)\xi, \eta)_{H_x}$, $s \in S$, $\xi, \eta \in H_x$. Potom máme

$$((P_{H_x}\psi(s) \upharpoonright_{H_x})\xi, \eta)_{H_x} = (\psi(s)\xi, P_{H_x}\eta)_{H_x \oplus \ell^2} = (\psi(s)\xi, \eta)_{H_x \oplus \ell^2} = (\phi_x(s)\xi, \eta)_{H_x}$$

pre každé $\xi, \eta \in H_x$ a teda $P_{H_x}\psi(s) \upharpoonright_{H_x} = \phi_x(s)$ pre každé $s \in S$. Rovnako dostaneme opačnú implikáciu, prehádzaním poradia rovností.

Lema 5.34. *D je borelovská podmnožina v $UCP(X, S, \mathcal{B}(H \oplus \ell^2))$, takže je to štandardný borelovský priestor.*

Dôkaz. Pre $x \in X$ označme P_x projekciu $H_x \oplus \ell^2$ na H_x a definujme kompresiu

$$\begin{aligned} \gamma_x : UCP(S, \mathcal{B}(H_x \oplus \ell^2)) &\longrightarrow UCP(S, \mathcal{B}(H_x)) \\ \gamma_x(\psi)(s) &:= P_x\psi(s) \upharpoonright_{H_x}, \quad s \in S. \end{aligned}$$

Potom γ_x je borelovské zobrazenie. K tomu podľa definície BW topológie na $UCP(S, \mathcal{B}(H_x))$ potrebujeme overiť, že funkcia

$$\varphi \in UCP(S, \mathcal{B}(H_x \oplus \ell^2)) \mapsto (P_x\varphi(s) \upharpoonright_{H_x} \xi, \eta)_{H_x} \quad (5.5)$$

je borelovská pre každé $\xi, \eta \in H_x$ a každé $s \in S$ (vysvetlenie je analogické postupu, ktorý viedol k (5.4)). Ale pretože $\xi, \eta \in H_x$, dostávame spolu s vlastnosťami projekcie

$$(P_x\varphi(s) \upharpoonright_{H_x} \xi, \eta)_{H_x} = (\varphi(s)(P_x\xi), P_x\eta)_{H_x \oplus \ell^2} = (\varphi(s)\xi, \eta)_{H_x \oplus \ell^2}.$$

Ale z definície BW topológie na $UCP(S, \mathcal{B}(H_x \oplus \ell^2))$ je funkcia $\varphi \in UCP(S, \mathcal{B}(H_x \oplus \ell^2)) \mapsto (\varphi(s)\xi, \eta)_{H_x \oplus \ell^2}$ borelovská a teda je borelovská i funkcia (5.5).
Ďalej definujeme zobrazenie

$$\begin{aligned} \gamma : UCP(X, S, \mathcal{B}(H \oplus \ell^2)) &\longrightarrow UCP(X, S, \mathcal{B}(H)) \\ (x, \psi) &\longmapsto (x, \gamma_x(\psi)). \end{aligned}$$

Potom zobrazenie γ je borelovské vďaka merateľnosti zobrazení γ_x . Všimnime si, že množinu D môžeme tiež charakterizovať pomocou zobrazenia γ takto:

$$D = \{(x, \psi) \in UCP(X, S, \mathcal{B}(H_x \oplus \ell^2)) : \gamma(x, \psi) = (x, \phi_x)\}.$$

Podmienka $\gamma(x, \psi) = (x, \phi_x)$ je totiž podľa definície zobrazenia γ ekvivalentná tomu, že $\gamma_x(\psi) = \phi_x$, tzn. že pre každé $s \in S$ je $P_x \psi(s) \upharpoonright_{H_x} = \phi_x(s)$. A to je ekvivalentné tomu, že pre každú dvojicu $\xi, \eta \in H_x$ je $(\psi(s)\xi, \eta) = (\phi_x(s)\xi, \eta)$. Takže $D = \gamma^{-1}(UCP(X, S, \mathcal{B}(H)))$ a teda je vzorom štandardného borelovského priestoru pri borelovskom zobrazení γ , čo je borelovská množina v $UCP(X, S, \mathcal{B}(H \oplus \ell^2))$. □

Poznámka 5.35. Pre $x \in X$ je množina $D_x = p^{-1}(x)$ konvexná a uzavretá v $UCP(S, \mathcal{B}(H_x \oplus \ell^2))$. Uzavretosť plynie so spojitosti skalárneho súčinu a konvexita sa overí priamo z definície:

Nech $\psi_1, \psi_2 \in D_x$, $\alpha \in (0, 1)$. Pre každé $s \in S$ a každú dvojicu $\xi, \eta \in H_x$ máme z linearity skalárneho súčinu v prvej zložke rovnosť

$$((\alpha\psi_1 + (1-\alpha)\psi_2)(s)\xi, \eta)_{H_x} = \alpha \underbrace{(\psi_1(s)\xi, \eta)_{H_x}}_{(\phi_x(s)\xi, \eta)_{H_x}} + (1-\alpha) \underbrace{(\psi_2(s)\xi, \eta)_{H_x}}_{(\phi_x(s)\xi, \eta)_{H_x}} = (\phi_x(s)\xi, \eta)_{H_x},$$

takže konvexná kombinácia $\alpha\psi_1 + (1-\alpha)\psi_2$ leží v D_x .

Tvrdenie 5.36. *Majme dané $s \in S$ a borelovský rez ξ pre zväzok $H = \{H_x : x \in X\}$. Potom pre $x \in X$ platí, že ϕ_x je maximálne na $(s, \xi(x))$ práve vtedy, keď každé $\psi \in D_x$ spĺňa nerovnosť*

$$\|\psi(s)\xi(x)\| \leq \|\phi_x(s)\xi(x)\|.$$

Dôkaz. Predpokladajme, že ϕ_x je maximálne na $(s, \xi(x))$, t.j. podľa definície platí pre každú jeho dilatáciu $\psi \succeq \phi_x$ rovnosť $\psi(s)\xi(x) = \phi_x(s)\xi(x)$. Špeciálne platí táto rovnosť pre všetky $\psi \in D_x$, pretože zjavne zobrazenia z D_x sú dilatáciami pre ϕ_x , takže platí dokonca $\|\psi(s)\xi(x)\| = \|\phi_x(s)\xi(x)\|$.

Na druhú stranu, nech $\|\psi(s)\xi(x)\| \leq \|\phi_x(s)\xi(x)\|$ pre ψ prebiehajúce D_x . Voľme ω dilatáciu zobrazenia ϕ_x , $\omega : S \longrightarrow \mathcal{B}(K)$, $K \supseteq H_x$. Na základe Poznámky 3.12 existujú UCP zobrazenia ω_0, λ , pričom $\omega_0 : S \longrightarrow \mathcal{B}(K_0)$ je dilatácia ϕ_x na separabilnom Hilbertovom priestore K_0 , $H_x \subseteq K_0 \subseteq K$, že $\omega = \omega_0 \oplus \lambda$. Vďaka separabilite má K_0 spočítateľnú ortonormálnu bázu a z Riesz-Fisherovej vety existuje izometrický izomorfizmus medzi K_0 a $H_x \oplus \ell^2$, resp. K_0 a $H_x \oplus \mathbb{C}^k$ - v

případe, že rozdiel $K_0 \ominus H_x$ má konečnú dimenziu $k \in \mathbb{N}$. Formálne, ak označíme $\tilde{K}_0$ doplnok H_x v K_0 , spomínaný izomorfizmus je zobrazenie

$$\begin{aligned} I : H_x \oplus \tilde{K}_0 &\longrightarrow H_x \oplus \ell^2 \quad (\text{resp. } H_x \oplus \mathbb{C}^k) \\ (\xi, \eta) &\mapsto (\xi, \{(\eta, e_i)_{\tilde{K}_0}\}_i), \end{aligned}$$

kde $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ (resp. $\{e_i\}_{i=1}^k$) je ortonormálna báza priestoru $\tilde{K}_0$. Definujme zobrazenie $\omega'_0 : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_x \oplus \ell^2)$ (resp. do $\mathcal{B}(H_x \oplus \mathbb{C}^k)$) vzťahom $\omega'_0(a) = I\omega_0(a)I^*$, pre $a \in S$. Potom $\omega'_0 = \omega_0$ na H_x a teda

$$P_{H_x}\omega'_0(a) \upharpoonright_{H_x} = P_{H_x}\omega_0(a) \upharpoonright_{H_x} = \phi_x(a), \quad a \in S,$$

takže ω'_0 je opäť dilatáciou ϕ_x . Napokon uvažujme zobrazenie $\psi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_x \oplus \ell^2)$ definované

$$\psi := \begin{cases} \omega'_0 & K_0 \cong H_x \oplus \ell^2 \\ \omega'_0 \oplus \mu & K_0 \cong H_x \oplus \mathbb{C}^k, \end{cases}$$

kde $\mu : S \longrightarrow \mathcal{B}(\ell^2 \ominus \mathbb{C}^k)$ je nejaké UCP zobrazenie - môžeme ho zostrojiť napríklad nasledovne: Vezmime ľubovoľnú reprezentáciu $\pi : S \longrightarrow \mathcal{B}(G)$ na Hilbertovom priestore G , to je UCP zobrazenie (Poznámka 1.35) a potom μ definujeme ako kompresiu π na podpriestor $\ell^2 \ominus \mathbb{C}^k$. Potom opäť $\psi \succeq \phi_x$ a teda $\psi \in D_x$ (viď Poznámka 5.33). Naviac, pretože $\xi(x)$ je prvkom priestoru H_x a $K_0 \supseteq H_x$, platí

$$\begin{aligned} \|\omega(s)\xi(x)\| &= \|\omega_0(s)\xi(x)\| = \|(I^*\omega'_0(s)I)(\xi(x))\| \\ &\leq \|I^*\|\|\omega'_0(s)\xi(x)\| = \|\psi(s)\xi(x)\|. \end{aligned}$$

Použili sme, že I je izometria a teda $\|I^*\| = \|I\| = 1$ a je to identický operátor na H_x . Odtiaľ dostávame

$$\begin{aligned} \|\omega(s)\xi(x) - \phi_x(s)\xi(x)\|^2 &= \|\omega(s)\xi(x) - P_{H_x}\omega(s)\xi(x)\|^2 \\ &= \|\omega(s)\xi(x)\|^2 - \|P_{H_x}\omega(s)\xi(x)\|^2 \\ &\leq \|\psi(s)\xi(x)\|^2 - \|P_{H_x}\omega(s)\xi(x)\|^2 \\ &= \|\psi(s)\xi(x)\|^2 - \|\phi_x(s)\xi(x)\|^2 \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

pretože ψ leží v D_x a teda podľa predpokladu splňa nerovnosť $\|\psi(s)\xi(x)\| \leq \|\phi_x(s)\xi(x)\|$. Takže máme rovnosť $\omega(s)\xi(x) = \phi_x(s)\xi(x)$, čiže maximalitu zobrazenia ϕ_x na $(s, \xi(x))$. □

Definícia 5.37. Nech μ je pravdepodobnostná miera na X . Hovoríme, že systém UCP zobrazení $\phi = \{\phi_x : x \in X\}$ je *maximálny μ -skoro všade*, ak existuje borelovská množina $N \subseteq X$ μ -miery 0 tak, že ϕ_x je maximálne zobrazenie pre všetky $x \in X \setminus N$.

V ďalšom budeme uvažovať stále nasledujúcu situáciu: $\phi = \{\phi_x : x \in X\}$ bude stále rovnaký systém UCP zobrazení ako doteraz, μ bude vždy značiť pravdepodobnostnú mieru na X .

Lema 5.38. *Nech pre každé $s \in S$ a pre každý borelovský rez $\xi : x \in X \mapsto H_x$ existuje borelovská podmnožina $N_{s,\xi} \subseteq X$ μ -miery 0 tak, že pre všetky $x \in X \setminus N_{s,\xi}$ platí nerovnosť*

$$\|\psi(s)\xi(x)\| \leq \|\phi_x(s)\xi(x)\|, \quad \psi \in D_x.$$

Potom systém ϕ je maximálny μ -skoro všade.

Dôkaz. Označme C spočítateľnú hustú podmnožinu systému S . Ďalej označme $D = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ postupnosť borelovských rezov pre zväzok $H = \{H_x : x \in X\}$ z Poznámky 5.19. Pre každú dvojicu $(s, \xi) \in C \times D$ nájdeme podľa predpokladu borelovskú podmnožinu $N_{s,\xi} \subseteq X$ tak, že $\mu(N_{s,\xi}) = 0$ a pre všetky $x \in X \setminus N_{s,\xi}$ je $\|\psi(s)\xi(x)\| \leq \|\phi_x(s)\xi(x)\|$, pre $\psi \in D_x$. Položme

$$N = \bigcup_{s \in C} \bigcup_{\xi \in D} N_{s,\xi}.$$

Potom pretože tieto zjednotenia sú spočítateľné, je $\mu(N) = 0$ a pre každé $x \in X \setminus N$ máme

$$\|\psi(s)\xi(x)\| \leq \|\phi_x(s)\xi(x)\|, \quad \psi \in D_x, (s, \xi) \in C \times D.$$

Zo spojitosti normy a operátorov $\psi(s), \phi_x(s)$ dostávame pre každé $x \in X \setminus N$

$$\|\psi(s)\eta\| \leq \|\phi_x(s)\eta\|, \quad \psi \in D_x, s \in \overline{C} = S, \eta \in \overline{\{\xi_1(x), \xi_2(x), \dots\}} = H_x.$$

Teda pre každé $x \in X \setminus N$ je podľa Tvrdenia 5.36 ϕ_x maximálne na $S \times H_x$ a teda na základe Poznámky 3.18 je maximálne. Takže systém ϕ je maximálny μ -skoro všade. $\square$

Veta 5.39. *Nech systém ϕ nie je μ -skoro všade maximálny. Potom existuje $s \in S$, borelovský rez ξ pre zväzok $H = \{H_x : x \in X\}$, borelovská množina $X_0 \subseteq X$ kladnej μ -miery a borelovská funkcia $g_0 : x \in X_0 \mapsto \psi_x \in D_x$ tak, že*

$$\|\psi_x(s)\xi(x)\| > \|\phi_x(s)\xi(x)\|, \quad x \in X_0. \quad (5.6)$$

Naviac, pre každé $x \in X_0$ je ψ_x netriviálnou dilatáciou ϕ_x , t.j. ϕ_x sa nedá napísať ako súčet $\phi_x \oplus \lambda_x$ pre žiadne UCP zobrazenie λ_x .

Dôkaz. Z predpokladu, že systém ϕ nie je maximálny μ -skoro všade, podľa Lemy 5.38 existuje $s \in S$ a borelovský rez $\xi : x \in X \mapsto \xi(x) \in H_x$ tak, že podmienka $\|\psi(s)\xi(x)\| \leq \|\phi_x(s)\xi(x)\|$, $\psi \in D_x$, nie je splnená pre x prebiehajúce nejakú množinu kladnej μ -miery. To znamená, že ak $E \subset X$ je borelovská podmnožina, pre ktorú platí

$$\sup_{\psi \in D_x} \|\psi(s)\xi(x)\| \leq \|\phi_x(s)\xi(x)\|, \quad x \in E,$$

potom $\mu(X \setminus E) > 0$. Vezmime rezy $\eta_1, \eta_2, \dots$ pre zväzok H z Poznámky 5.21, t.j. borelovské rezy spĺňajúce

$$\overline{\{\eta_1(x), \eta_2(x), \dots\}} = B_{H_x}, \quad x \in X.$$

Pre $k \in \mathbb{N}$ definujeme funkcie $F_k : D \longrightarrow [0, \infty)$ vzťahom

$$F_k(x, \psi) := |(\psi(s)\xi(x), \eta_k(x))_{H_x}|, \quad (x, \psi) \in D.$$

Takto definované F_k sú borelovské funkcie, pretože podľa Definície 5.27 sú zobrazenia $\varphi_k : x \mapsto (\phi_x(s)\xi(x), \eta_k(x))$ borelovské a podľa definície množiny D_x je pre $\psi \in D_x$

$$(\psi(s)\xi(x), \eta_k(x)) = (\phi_x(s)\xi(x), \eta_k(x))$$

a teda $F_k(x, \psi) = |\varphi_k(x)|$ sú borelovské, pre všetky $k \in \mathbb{N}$.

Ďalej platí, že funkcie $F_k \upharpoonright_{\{x\} \times D_x}$ sú spojité, pre každé $x \in X$ a $k \in \mathbb{N}$, pretože sú tam konštantné: pre pevné $x \in X$ a $k \in \mathbb{N}$ máme

$$F_k(x, \psi) = |(\psi(s)\xi(x), \eta_k(x))| = |(\phi_x(s)\xi(x), \eta_k(x))| = F_k(x, \phi_x), \quad \psi \in D_x.$$

Dokážeme nasledujúci fakt: *pre fixované $x \in X$ je ϕ_x je maximálne na $(s, \xi(x))$ práve vtedy, keď platí nerovnosť*

$$F_k(x, \psi) \leq \|\phi_x(s)\xi(x)\|, \quad \psi \in D_x, k \in \mathbb{N}. \quad (5.7)$$

Nech je ϕ_x maximálne na $(s, \xi(x))$, potom podľa Tvrdenia 5.36 platí pre každé $\psi \in D_x$ nerovnosť $\|\psi(s)\xi(x)\| \leq \|\phi_x(s)\xi(x)\|$. Pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$ a $\psi \in D_x$ dostávame

$$F_k(x, \psi) = |(\psi(s)\xi(x), \eta_k(x))| \leq \|\psi(s)\xi(x)\| \|\eta_k(x)\| \leq \|\phi_x(s)\xi(x)\|.$$

Použili sme Cauchy-Schwarzovu nerovnosť a fakt, že $\eta_k(x)$ leží v jednotkovej guli priestoru H_x .

Na druhú stranu, predpokladajme, že platí vzťah (5.7). Opäť podľa Tvrdenia 5.36 stačí ukázať, že

$$\|\psi(s)\xi(x)\| \leq \|\phi_x(s)\xi(x)\|, \quad \psi \in D_x.$$

Voľme $\varepsilon > 0$ a fixujme $\psi \in D_x$. V prípade, že $\|\psi(s)\xi(x)\| = 0$ máme požadovanú nerovnosť ihneď, predpokladajme teda $\|\psi(s)\xi(x)\| > 0$. Potom zo spojitosti skalárneho súčinu nájdeme δ -okolie $\mathcal{U}_\delta$ bodu $\psi(s)\xi(x)$ v H_x , že pre každé $\eta \in \mathcal{U}_\delta$ je $(\psi(s)\xi(x), \eta)_{H_x} > 0$. Ďalej z hustoty $\{\eta_1(x), \eta_2(x), \dots\}$ v B_{H_x} existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ také, že

$$\left\| \eta_{k_0}(x) - \frac{\psi(s)\xi(x)}{\|\psi(s)\xi(x)\|} \right\| < \min\{\varepsilon, \delta\}.$$

Potom

$$\begin{aligned} \|\psi(s)\xi(x)\| &= |(\psi(s)\xi(x), \eta_{k_0}(x))| = \left| \|\psi(s)\xi(x)\| - (\psi(s)\xi(x), \eta_{k_0}(x)) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\|\psi(s)\xi(x)\|} (\psi(s)\xi(x), \psi(s)\xi(x)) - (\psi(s)\xi(x), \eta_{k_0}(x)) \right| \\ &= \left| (\psi(s)\xi(x), \frac{\psi(s)\xi(x)}{\|\psi(s)\xi(x)\|} - \eta_{k_0}(x)) \right| \\ &\leq \varepsilon \|\psi(s)\xi(x)\|, \end{aligned}$$

vd'aka Cauchy-Schwarzovej nerovnosti a voľby η_{k_0} . Z tohto výpočtu dostávame, že

$$\|\psi(s)\xi(x)\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |(\psi(s)\xi(x), \eta_k(x))| = \sup_{k \in \mathbb{N}} F_k(x, \psi) \leq \|\phi_x(s)\xi(x)\|,$$

kde poslednú nerovnosť získame z predpokladu. Pretože $\psi \in D_x$ sme brali ľubovoľné, máme túto nerovnosť pre každé $\psi \in D_x$ a teda ϕ_x je maximálne na $(s, \xi(x))$. Tým je dokončený dôkaz faktu.

V ďalšom kroku definujeme množinu

$$D_+ := \bigcup_{k=1}^{\infty} \{(x, \psi) \in D : F_k(x, \psi) > \|\phi_x(s)\xi(x)\|\}.$$

Túto množinu môžeme napísať ako zjednotenie borelovských množín

$$D_+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^{-1}((0, \infty))$$

a teda je to borelovská podmnožina v D , takže je to štandardný borelovský priestor. Uvažujme projekciu $p : (x, \psi) \in D \mapsto x \in X$, potom $p \upharpoonright_{D_+}$ je borelovská funkcia. Označme $X_+ := p(D_+)$. Táto množina nemusí byť borelovská, ale podľa Vety 5.10 je absolútne merateľná, tzn. existujú borelovské podmnožiny E_μ, F_μ priestoru X také, že $E_\mu \subseteq X_+ \subseteq F_\mu$ a $\mu(F_\mu \setminus E_\mu) = 0$. Vďaka dokázanej charakteristike maximality ϕ_x pomocou vzťahu (5.7) môžeme množinu X_+ prepísať takto:

$$X_+ = \{x \in X : \phi_x \text{ nie je maximálne na } (s, \xi(x))\}.$$

Pretože $F_\mu \supseteq X_+$, určite sú zobrazenia ϕ_x maximálne na $(s, \xi(x))$ pre $x \in X \setminus F_\mu$. Odtiaľ podľa voľby s a ξ musí mať množina F_μ kladnú μ -mieru. Takže máme $\mu(E_\mu) = \mu(F_\mu) > 0$. Položme

$$D_0 := \{(x, \psi) \in D_+ : x \in E_\mu\}.$$

Množiny E_μ a D_0 sú ako borelovské podmnožiny štandardných borelovských priestorov $(X \text{ resp. } UCP(X, S, \mathcal{B}(H_x \oplus \ell^2)))$ štandardnými borelovskými priestormi a projekcia $q : (x, \psi) \in D_0 \mapsto x \in E_\mu$ je borelovské zobrazenie na E_μ . Takže podľa Vety 5.11 existuje borelovská množina $N \subseteq E_\mu$, $\mu(N) = 0$, a borelovské zobrazenie $g : x \in E_\mu \setminus N \mapsto (x, \psi_x) \in D_0$, ktoré je rezom pre q , t.j. $q \circ g = id_{E_\mu \setminus N}$. Potom množina $X_0 := E_\mu \setminus N$ je hľadaná borelovská množina kladnej μ -miery a zobrazenie $x \in X_0 \mapsto \psi_x$ je hľadané borelovské zobrazenie g_0 spĺňajúce (5.6).

Zostáva ukázať, že pre každé $x \in X_0$ je ψ_x netriviálnou dilatáciou ϕ_x . To, že je to dilatácia je jasné, pretože ψ_x je z D_x . Voľme pevné $x \in X_0$ a predpokladajme, že je táto dilatácia triviálna, teda že existuje nejaké UCP zobrazenie $\lambda_x : S \rightarrow \mathcal{B}(\ell^2)$, pre ktoré $\psi_x = \phi_x \oplus \lambda_x$. Potom pre $s \in S$ máme

$$\|\psi_x(s)\xi(x)\| = \|\phi_x(s) \underbrace{P_{H_x}\xi(x)}_{\xi(x)} + \lambda_x(s) \underbrace{P_{\ell^2}\xi(x)}_{\{0\}}\| = \|\phi_x(s)\xi(x)\|,$$

pretože $\xi(s) \in H_x$, a to je spor. □

Kapitola 6

Rozklad zobrazení s vlastností jednoznačného rozšíření

6.1 Direktný integrál

V tejto sekcii zavedieme pojem direktného integrálu a stručne zhrnieme potrebné znalosti. Zameriame sa na našu situáciu a v nej vyslovíme ideu konštrukcie tohoto objektu. Pre podrobné výsledky vo všeobecnejšom kontexte viď [14, sekcia IV.8], prípadne [7, sekcia 14.1].

Definícia 6.1. Nech X je štandardný borelovský priestor, μ je zúplnenie borelovskej miery na X a $\{H_p\}_{p \in X}$ je systém separabilných Hilbertových priestorov. Hilbertov priestor

$$H = \int_X^{\oplus} H_p d\mu(p)$$

nazveme *direktný integrál* $\{H_p : p \in X\}$, ak pre každé $x \in H$ existuje funkcia $p \in X \mapsto x(p) \in H_p$ tak, že platí:

- (i) Pre každú dvojicu $x, y \in H$ je funkcia $p \in X \mapsto (x(p), y(p))_{H_p}$ μ -integrovateľná a

$$(x, y)_H = \int_X (x(p), y(p))_{H_p} d\mu(p).$$

- (ii) Nech pre každé $p \in X$ máme prvok $u_p \in H_p$ a nech funkcia $p \in X \mapsto (u_p, y(p))_{H_p}$ je μ -integrovateľná, pre každé $y \in H$. Potom existuje $u \in H$ také, že $u(p) = u_p$ pre μ -skoro všetky $p \in X$.

Potom hovoríme, že $\int_X^{\oplus} H_p d\mu(p)$ je *rozklad priestoru* H a funkcia $p \mapsto x(p)$ je *rozklad prvku* x .

My budeme potrebovať vedieť spraviť direktný integrál Hilbertových priestorov tvoriacich štandardný hilbertovský zväzok. Pre tento špeciálny systém priestorov budú podmienky Definície 6.1 splnené vďaka existencii borelovských rezov

$\xi_1, \xi_2, \dots$ z Definície 5.13. Pre predstavu, vezme sa množina

$$\mathcal{M} = \left\{ \xi \in \prod_{x \in X} H_x : x \mapsto (\xi(x), \xi_n(x))_{H_x} \text{ je } \mu\text{-merateľná pre každé } n \in \mathbb{N} \right\}$$

a Hilbertov priestor H bude potom množina tých $\xi \in \mathcal{M}$, pre ktoré platí

$$\|\xi\| := \left(\int_X \|\xi(x)\|^2 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Potom H je lineárny priestor s operáciami definovanými prirodzene na jednotlivých súradniciach. Skalárny súčin je definovaný pomocou

$$(\xi, \eta)_H = \int_X (\xi(x), \eta(x))_{H_x} d\mu(x), \quad \xi, \eta \in H.$$

Napokon stotožníme vektory $\xi, \eta \in H$ vtedy, keď $\xi(x) = \eta(x)$ pre μ -skoro všetky $x \in X$. O tom, že uvedený postup je korektný sa podrobne píše v [14, str. 269-272]. Pre hilbertovské zväzky dostávame nasledujúce tvrdenie:

Veta 6.2. *Nech X je štandardný borelovský priestor s pravdepodobnostnou mierou μ a $\{H_x : x \in X\}$ je hilbertovský zväzok. Potom existuje Hilbertov priestor H , ktorý je direktným integrálom Hilbertových priestorov H_x , $x \in X$.*

Ak pre každé $x \in X$ máme operátor $T_x \in \mathcal{B}(H_x)$, zavedieme značenie $T = \int_X^\oplus T_x d\mu(x)$ pre operátor $T \in \mathcal{B}(H)$ definovaný

$$T(\xi) := \int_X^\oplus T_x \xi(x) d\mu(x), \quad \xi \in H.$$

Konečne, ak máme systém UCP zobrazení $\{\phi_x : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_x) : x \in X\}$, direktným integrálom $\int_X^\oplus \phi_x d\mu(x)$ budeme rozumieť zobrazenie $\phi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ definované

$$\phi(s) := \int_X^\oplus \phi_x(s) d\mu(x), \quad s \in S.$$

6.2 Potrebný výsledok

Uvažujeme opäť separabilný operátorový systém S . Ako motiváciu k hlavnému výsledku tejto kapitoly si najskôr rozmyslíme jednoduchšiu situáciu:

Pozorovanie 6.3. *Nech H je Hilbertov priestor a $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je UCP zobrazenie, ktoré má vlastnosť jednoznačného rozšírenia. Nech $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$ je nejaký rozklad zobrazenia φ na súčet UCP zobrazení. Potom zobrazenia φ_1, φ_2 majú tiež vlastnosť jednoznačného rozšírenia.*

Dôkaz. Podľa charakteristiky zobrazení s vlastnosťou jednoznačného rozšírenia z Tvrdenia 3.13 je zobrazenie φ maximálne a stačí nám ukázať, že i φ_1, φ_2 sú maximálne. Uvažujme teda $\tilde{\varphi}_1$ ľubovoľnú dilatáciu pre φ_1 . Potom zobrazenie $\tilde{\varphi}_1 \oplus \varphi_2$ je zrejme dilatáciou pre φ a teda z maximality φ musí byť triviálna. To znamená, že existuje UCP zobrazenie λ , pre ktoré platí

$$\tilde{\varphi}_1 \oplus \varphi_2 = \varphi \oplus \lambda = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \lambda.$$

Takže $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 \oplus \lambda$ je triviálna dilatácia, čo sme potrebovali pre maximalitu φ_1 . Z analogického dôvodu je maximálne φ_2 . $\square$

Veta 6.4. *Nech (X, μ) je štandardný borelovský pravdepodobnostný priestor, $\{H_x : x \in X\}$ je štandardný zväzok separabilných Hilbertových priestorov a $\phi = \{\phi_x : x \in X\}$ je systém UCP zobrazení $\phi_x : S \longrightarrow \mathcal{B}(H_x)$, $x \in X$. Označme H direktný integrál*

$$H = \int_X^{\oplus} H_x d\mu(x).$$

Ďalej predpokladajme, že zobrazenie $\phi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ definované ako

$$\phi(s) = \int_X^{\oplus} \phi_x(s) d\mu(x), \quad s \in S$$

má vlastnosť jednoznačného rozšírenia. Potom existuje borelovská množina $N \subseteq X$ μ -miery 0 tak, že pre každé $x \in X \setminus N$ má zobrazenie ϕ_x vlastnosť jednoznačného rozšírenia.

Dôkaz. Budeme postupovať sporom. Nech teda ϕ má vlastnosť jednoznačného rozšírenia, ale neexistuje taká množina $N \subseteq X$, $\mu(N) = 0$, aby ϕ_x mali vlastnosť jednoznačného rozšírenia pre $x \in X \setminus N$. Podľa Tvrdenia 3.13 a Definície 5.37 to znamená, že systém $\{\phi_x : x \in X\}$ nie je maximálny μ -skoro všade. Takže z Vety 5.39 máme borelovskú množinu $X_0 \subseteq X$ kladnej μ -miery a borelovský rez $\psi : x \in X_0 \mapsto \psi_x \in UCP(S, \mathcal{B}(H_x \oplus l^2))$, ktorý je dilatáciou systému $\{\phi_x : x \in X_0\}$. Ďalej vieme, že pre každé $x \in X_0$ je ψ_x netriviálnou dilatáciou pre ϕ_x . Definujme zväzok $\{K_x : x \in X\}$ takto

$$K_x := \begin{cases} H_x \oplus l^2, & x \in X_0 \\ H_x, & x \in X \setminus X_0 \end{cases}$$

a merateľný systém $\{\tilde{\phi}_x : S \longrightarrow \mathcal{B}(K_x) : x \in X\}$ takto

$$\tilde{\phi}_x := \begin{cases} \psi_x, & x \in X_0 \\ \phi_x, & x \in X \setminus X_0. \end{cases}$$

Systém $\{\tilde{\phi}_x : x \in X\}$ je zrejme dilatáciou systému $\{\phi_x : x \in X\}$. Ďalej položíme

$$K := \int_X^{\oplus} K_x d\mu(x),$$

potom zobrazenie definované $P := \int_X^\oplus P_x d\mu(x)$, kde P_x je projekcia K_x na H_x , je zrejme projekcia $K \rightarrow H$. Zobrazenie $\tilde{\phi} : S \rightarrow \mathcal{B}(K)$ definované

$$\tilde{\phi}(s) := \int_X^\oplus \tilde{\phi}_x(s) d\mu(x), \quad s \in S$$

je dilatáciou pre ϕ : K tomu voľme $s \in S$ a počítajme

$$P\tilde{\phi}(s) \upharpoonright_H = \left(\int_X^\oplus P_x \right) \tilde{\phi}(s) \upharpoonright_{\left(\int_X^\oplus H_x \right)} = \int_X^\oplus P_x \tilde{\phi}_x(s) \upharpoonright_{H_x} d\mu(x) = \phi(s).$$

Predpokladáme, že ϕ má vlastnosť jednoznačného rozšírenia, takže je maximálne (Tvrdenie 3.13). To znamená, že existuje UCP zobrazenie φ tak, že $\tilde{\phi} = \phi \oplus \varphi$. Potom pre $s \in S$ a $x \in K$ máme

$$P\tilde{\phi}(s)x = P(\phi(s) + \varphi(s))x = \underbrace{(P\phi(s))}_{\in \mathcal{B}(H)} + \underbrace{P\varphi(s)}_{\{0\}}x = \phi(s)Px = \tilde{\phi}(s)Px,$$

takže $P\tilde{\phi}(s) = \tilde{\phi}(s)P$ pre každé $s \in S$. Označme $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ spočítateľnú hustú podmnožinu v S , potom špeciálne $P\tilde{\phi}(a_n) = \tilde{\phi}(a_n)P$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že potom platí nasledujúci fakt: *Existuje borelovská podmnožina $N \subseteq X$ nulovej μ -miery tak, že pre každé $x \in X \setminus N$ platí $P_x \tilde{\phi}_x(a_n) = \tilde{\phi}_x(a_n)P_x$.*

K tomu uvažujme operátor $T_n := P\tilde{\phi}(a_n) - \tilde{\phi}(a_n)P$. To je nulový operátor na K , takže pre každú dvojicu $y, z \in K$ je $(T_n y, z)_K = 0$. Podľa definície direktného integrálu je

$$(T_n y, z) = \int_X^\oplus ((T_n y)(x), z(x)) d\mu(x), \quad y, z \in K. \quad (6.1)$$

Označme $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ borelovské rezy z definície štandardného Hilbertovského zväzku K , tzn. že splňajú

$$K_x = \overline{\{\xi_1(x), \xi_2(x), \dots\}}, \quad x \in X$$

a pre $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$ definujme operátor

$$T_{n,x} := P_x \tilde{\phi}_x(a_n) - \tilde{\phi}_x(a_n)P_x.$$

Potom pre $x \in X$ je priamo z definície príslušných zobrazení $(T_n \xi_k)(x) = T_{n,x} \xi_k(x)$, pre každé $k \in \mathbb{N}$. Dosadením $y = \xi_k$ a $z = T_n \xi_k$ do (6.1) dostávame pre každé $n, k \in \mathbb{N}$

$$0 = (T_n \xi_k, T_n \xi_k)_K = \int_X^\oplus (T_{n,k} \xi_k(x), T_{n,x} \xi_k(x)) d\mu(x) = \int_X^\oplus \|T_{n,k} \xi_k(x)\|^2 d\mu(x),$$

kde ξ_k v skalárnom súčine priestoru K chápeme ako ten prvok z K , ktorý má rozklad $x \in X \mapsto \xi_k(x)$. Odtiaľ pre každé $n, k \in \mathbb{N}$ existuje množina $N_{n,k} \subseteq X$, $\mu(N_{n,k}) = 0$, taká, že pre všetky $x \in X \setminus N_{n,k}$ je $T_{n,x} \xi_k(x) = 0$. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ položíme $N_n := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_{n,k}$. Potom toto spočítateľné zjednotenie má tiež nulovú

μ -mieru a pretože $\{\xi_1(x), \xi_2(x) \dots\}$ je hustou podmnožinou v K_x , je zo spojitosti pre pevné $n \in \mathbb{N}$ operátor $T_{n,x}$ nulový pre každé $x \in X \setminus N_n$. Napokon uvažujme množinu $N := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$. Potom $\mu(N) = 0$ a platí

$$T_{n,x} = 0, \quad x \in X \setminus N, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Podľa definície operátorov $T_{n,x}$ a vďaka hustote $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ v S dostávame požadované

$$P_x \tilde{\phi}_x(s) = \tilde{\phi}_x(s) P_x, \quad s \in S, \quad x \in X \setminus N.$$

Tým je dokončený dôkaz faktu.

Ďalej, pretože podľa definície zobrazení $\tilde{\phi}_x$ je $\tilde{\phi}_x = \psi_x$ pre $x \in X_0$, máme podľa predchádzajúceho kroku pre $s \in S$

$$P_x \psi_x(s) = \psi_x(s) P_x, \quad x \in X_0 \setminus N. \quad (6.2)$$

Poznamenajme, že množina X_0 má kladnú μ -mieru a teda aj $\mu(X_0 \setminus N) > 0$, takže $X_0 \setminus N$ je neprázdna množina. K dokončeniu dôkazu nám teda stačí ukázať, že pre každé $x \in X_0 \setminus N$ vieme nájsť UCP zobrazenie $\lambda_x : S \rightarrow \mathcal{B}(l^2)$ spĺňajúce $\psi_x = \phi_x \oplus \lambda_x$. To bude v spore s tým, že ψ_x je netriviálnou dilatáciou ϕ_x pre všetky $x \in X_0$.

Potrebuje si teda rozmyslieť, že pre $s \in S$ a pevné $x \in X_0 \setminus N$ operátor $\psi_x(s)$ zobrazuje prvky z H_x do H_x a prvky l^2 do l^2 . Fixujme $x \in X_0 \setminus N$ a voľme $z \in K_x = H_x \oplus l^2$. Píšme $z = z_1 \oplus z_2$, kde $z_1 \in H_x$ a $z_2 \in l^2$. Potom vďaka (6.2) dostávame

$$\psi_x(s) z_1 = \psi(s) P_x z = P_x \psi_x(s) z \in H_x,$$

takže $\psi_x(s) H_x \subseteq H_x$. Podobne

$$P_x \psi_x(s) z_2 = \psi_x(s) \underbrace{P_x z_2}_0 = 0,$$

odkiaľ máme druhú inklúziu $\psi_x(s) l^2 \subseteq l^2$.

□

Kapitola 7

Existencia hraničných reprezentácií pre separabilné operátorové systémy

Vráťme sa späť k hlavnej problematike tejto práce, tj. k problému (2.4) sformulovanému v sekcii 2.2. Existencia Šilovho ideálu a hraničných reprezentácií pre všeobecný operátorový systém zostáva stále otvoreným problémom. Pomocou nástrojov vybudovaných v predošlých kapitolách sme už schopní načrtnúť dôkaz pre separabilný operátorový systém S , ktorý publikoval William Arveson v roku 2007 v článku [4].

Ak chceme dokázať, že pre S platí výrok (2.4), podľa Vety 2.14 stačí vedieť, že S je prípustný podpriestor v C^* -algebre $C^*(S)$, čo je podľa Tvrdenia 2.12 práve vtedy, keď systém S má dostatočne mnoho hraničných reprezentácií.

Veta 7.1. *Každý separabilný operátorový systém $S \subseteq C^*(S) = \mathcal{A}$ má dostatočne mnoho hraničných reprezentácií.*

7.1 Čo budeme potrebovať

Definícia 7.2. Množina $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ sa nazýva *von Neumannova algebra*, ak je to C^* -algebra a platí $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$.

Tvrdenie 7.3. *Nech $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ je von Neumannova algebra a H je separabilný Hilbertov priestor. Potom existuje separabilná C^* -algebra $\mathcal{A}$ tak, že $\mathcal{A}$ je WOT-hustá v $\mathcal{M}$.*

Toto Tvrdenie s kompletným dôkazom je v [3, Proposition 1.2.3]. Nasledujúca veta je vzaná z [5, Theorem II.2, (iii) $\implies$ (iv)].

Veta 7.4. *Nech $\rho : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ je reprezentácia C^* -algebry $\mathcal{C}(X)$ na separabilnom Hilbertovom priestore H a nech $\rho(\mathcal{C}(X))''$ je maximálna abelovská v $\mathcal{B}(H)$. Potom existuje miera $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ tak, že*

$$\rho(\mathcal{C}(X))'' \cong L^\infty(X, \mu).$$

Zhrnieme niekoľko výsledkov, ktoré sa nám budú hodiť. Celá nasledujúca pasáž je podľa [3, sekcia 4.2].

Uvažujme merateľný priestor (X, μ) , $\mu(X) < \infty$, a nech K je separabilný Hilbertov priestor. Označme $L^2(X, \mu, K)$ množinu všetkých zobrazení $\xi : X \rightarrow K$ takých, že pre každé $u \in K$ je funkcia $x \in X \mapsto (\xi(x), u)_K$ borelovská a platí

$$\|\xi\|^2 = \int_X \|\xi(x)\|^2 d\mu(x) < \infty.$$

Ďalej označme

$$B(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}.$$

Pre pevné $f \in B(X)$ definujme operátor L_f na $L^2(X, \mu, K)$ vzťahom

$$(L_f \xi)(x) := f(x)\xi(x), \quad x \in X, \quad \xi \in L^2(X, \mu, K).$$

Potom L_f nazývame diagonálny operátor a množina $\mathcal{Z} := \{L_f : f \in B(X)\}$ tvorí komutatívnu C^* -algebru s jednotkou.

Zobrazenie $F : X \rightarrow \mathcal{B}(K)$ nazývame borelovské, ak je borelovská funkcia

$$x \in X \mapsto (F(x)u, v)_K, \quad u, v \in K.$$

Definujme

$$B(X, K) := \{F : X \rightarrow \mathcal{B}(K) \text{ borelovská, } \sup_{x \in X} \|F(x)\| < \infty\}, \quad (7.1)$$

potom $B(X, K)$ je C^* -algebra s jednotkou. Pre pevné $F \in B(X, K)$ definujme operátor L_F na $L^2(X, \mu, K)$ nasledovne:

$$(L_F \xi)(x) := F(x)\xi(x), \quad x \in X, \quad \xi \in L^2(X, \mu, K). \quad (7.2)$$

Potom $F \mapsto L_F$ je reprezentácia $B(X, K)$ na Hilbertov priestor $L^2(X, \mu, K)$. Naviac, pre každé $F \in B(X, K)$ a každé $T \in \mathcal{Z}$ platí, že $L_F T = T L_F$ a teda $\{L_F : F \in B(X, K)\} \subseteq \mathcal{Z}'$.

Veta 7.5 (Theorem 4.2.1). *Pre každé $T \in \mathcal{Z}'$ existuje $F \in B(X, K)$ tak, že $T = L_F$ a $\|F(x)\| \leq \|T\|$ pre každé $x \in X$.*

Dôsledok 7.6. *$F \mapsto L_F$ je $*$ -homomorfizmus $B(X, K)$ na $\mathcal{Z}'$.*

Dôsledok 7.7. *Nech $\mathcal{A}$ je separabilná C^* -subalgebra v $\mathcal{Z}'$. Potom existuje izometrický $*$ -homomorfizmus $\pi : \mathcal{A} \rightarrow B(X, K)$ tak, že*

$$L_{\pi(T)} = T, \quad T \in \mathcal{A}.$$

7.2 Postup dôkazu Vety 7.1

Potrebuje nájsť množinu hraničných reprezentácií $\{\sigma_x : x \in A\}$ spĺňajúcu pre každé $n \in \mathbb{N}$ rovnosť (2.5), tj.

$$\|(a_{ij})\|_{M_n(\mathcal{A})} = \sup_{x \in A} \|(\sigma_x(a_{ij}))\|_{\mathcal{B}(H^n)}, \quad \forall (a_{ij}) \in M_n(S).$$

Uvažujme systém S rovno ako podmnožinu $\mathcal{B}(H_0)$ pre separabilný Hilbertov priestor H_0 . Použitím Vety 3.21 pre zobrazenie $\varphi_0 = id_S$ získame UCP zobrazenie $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{B}(H)$, kde H je separabilný Hilbertov priestor, ktoré má vlastnosť jednoznačného rozšírenia a platí

$$P_{H_0}\varphi(s) \upharpoonright_{H_0} = id(s) = s, \quad \forall s \in S.$$

Potom φ je izomorfizmus S na $\varphi(S) \subseteq \mathcal{B}(H)$.

Označme $\mathcal{M}$ maximálnu abelovu von Neumannovu subalgebru komutantu $\varphi(S)'$. Podľa Tvrdenia 7.3 existuje separabilná C^* -algebra $\mathcal{A}$ obsahujúca jednotku $I \in \mathcal{B}(H)$ taká, že $\overline{\mathcal{A}}^{WOT} = \mathcal{M}$. Potom $\mathcal{A}$ oddeľuje body H , pretože obsahuje identický operátor a teda pre rôzne $\xi_1, \xi_2 \in H$ je zrejmé $I\xi_1 \neq I\xi_2$. Podľa vety o bikomutante dostávame rovnosť

$$\overline{\mathcal{A}}^{WOT} = \mathcal{A}''. \quad (7.3)$$

Pretože $\mathcal{M}$ je komutatívna von Neumannova algebra, je aj C^* -algebra $\mathcal{A}$ komutatívna a teda z Gelfandovej reprezentácie je izomorfná s $\mathcal{C}(X)$, kde X je vhodný kompaktný Hausdorffov priestor. Vďaka voľbe $\mathcal{M}$ a $\mathcal{A}$ a rovnosti (7.3) sú splnené predpoklady Vety 7.4 a teda existuje miera $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ tak, že $\mathcal{M} \cong L^\infty(X, \mu)$. Dá sa ukázať nasledujúce fakty*: Existuje hilbertovský zväzok $\{H_x : x \in X\}$ tak, že

$$H = \int_X^\oplus H_x d\mu(x)$$

a C^* -algebra $\mathcal{B} := \mathcal{C}^*(\phi(S) \cup \mathcal{A})$ je separabilná a hustá v $\mathcal{M}'$ vo WOT i SOT topológii.

Uvažujme prípad triviálneho zväzku, teda $H_x = K$ pre každé $x \in X$. Podľa Dôsledku 7.7 existuje izometrický *-izomorfizmus $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow BX, K$ tak, že pre každé $T \in \mathcal{B}$ je $T = L_{\pi(T)}$. Pre každé $x \in X$ definujeme

$$\begin{aligned} \pi_x : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{B}(K) \\ T &\mapsto \pi(T)(x). \end{aligned}$$

Potom π_x sú reprezentácie $\mathcal{B}$ na Hilbertovom priestore K - vďaka tomu, že π je *-homomorfizmus.

*Tieto výsledky vyžadujú znalosti z teórie multiplicity, čo v tejto práci nie je obsiahnuté. Pre vysvetlenie viď samotný článok [4] a jeho referencie.

Uvažujme už netriviálny zväzok $\{H_x : x \in X\}$, využijeme klasické postupy využívajúce Tvrdenie 5.26. Píšme $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, pripomeňme

$$X_n = \{x \in X : \dim H_x = n\}.$$

Nájďme zobrazenia $\pi^n : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}(X_n, \mathbb{C}^n)$ pre $n \in \mathbb{N}$, respektíve $\pi^\infty : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}(X_\infty, \ell^2)$. Pre pevné $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ vezmeme pre každé $x \in X_n$ reprezentáciu $\pi_x : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ (resp. do $\mathcal{B}(\ell^2)$) definovanú $\pi_x(T) := \pi_n(T)(x)$. Potom $\{\pi_x : x \in X\}$ je systém reprezentácií z Definície 5.27. K tomu potrebujeme ukázať, že funkcia

$$x \in X \mapsto (\pi_x(T)\xi, \eta)_{H_x} \in \mathbb{C} \quad (7.4)$$

je borelovská pre každé $T \in \mathcal{B}$ a každé $\xi, \eta \in \mathbb{C}^n$ (resp. ℓ^2). Ale pre pevné $n \in \mathbb{N}$ je funkcia

$$x \in X_n \mapsto (\pi_x(T)\xi, \eta)_{\mathbb{C}^n}, \quad \xi, \eta \in \mathbb{C}^n, \quad (7.5)$$

a funkcia

$$x \in X_\infty \mapsto (\pi_x(T)\xi, \eta)_{\ell^2}, \quad \xi, \eta \in \ell^2, \quad (7.6)$$

borelovská, pretože $\pi_x(T)$ je prvkom $\mathcal{B}(H, \mathbb{C}^n)$ (resp. $\mathcal{B}(H, \ell^2)$), čo podľa definície znamená presne borelovskosť funkcií (7.5), (7.6). Napokon, pretože zjednotenie $X = \bigcup_n X_n$ je spočítateľné, je borelovská i funkcia (7.4) a teda systém $\{\pi_x : x \in X\}$ je skutočne merateľný.

Ďalej, pretože $\mathcal{B}$ je SOT-hustá v $\mathcal{M}'$, Dôsledok 2 Vety 4.2.2 v [3] hovorí presne, že reprezentácia π_x je ireducibilná pre μ -skoro všetky $x \in X$. Pre $x \in X$ definujeme

$$\begin{aligned} \phi_x : S &\longrightarrow \mathcal{B}(H_x) \\ a &\mapsto \pi_x(\phi(a)), \end{aligned}$$

potom sa ukáže, že $\{\phi_x : x \in X\}$ tvorí opäť merateľný systém UCP zobrazení, pre ktorý platí

$$\phi(a) = \int_X^\oplus \phi_x(a) d\mu(x), \quad a \in S.$$

Odtiaľ dotávame rovnosť

$$\|a\| = \|\phi(a)\| = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X}^\dagger \|\phi_x(S)\|.$$

Podobne na úrovni matíc typu $n \times n$ pre $n = 2, 3, \dots$ dostaneme vďaka rozkladu $H^n = \int_X^\oplus H_x^n d\mu(x)$ rozklad zobrazenia $\phi_n : M_n(S) \longrightarrow \mathcal{B}(H^n)$:

$$\phi_n((a_{ij})) = (\phi(a_{ij})) = \int_X^\oplus (\phi_x(a_{ij})) d\mu(x), \quad (a_{ij}) \in M_n(S).$$

Takže pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí pre každú maticu $(a_{ij}) \in M_n(S)$ vzťah

$$\|(a_{ij})\| = \|(\phi(a_{ij}))\| = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} \|(\phi_x(a_{ij}))\|. \quad (7.7)$$

[†]Esenciálne supremum myslíme vzhľadom k miere μ .

Podľa Vety 6.4 existuje borelovská množina $N \subseteq X$, $\mu(N) = 0$ tak, že pre každé $x \in X \setminus N$ má ϕ_x vlastnosť jednoznačného rozšírenia. Potom pre každé $x \in X \setminus N$ vezmime $\sigma_x : \mathcal{C}^*(S) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ rozšírenie ϕ_x . Dostaneme množinu hraničných reprezentácií $\{\sigma_x : x \in X\}$ C^* -algebry $\mathcal{C}^*(S)$ vzhľadom k S . Ďalej, vezmime C spočítateľnú hustú podmnožinu v S . Potom vzťah (7.7) platí tým skôr pre matice z $M_n C$. Z definície esenciálneho suprema existuje pre každý prvok $a = (a_{ij}) \in M_n(C)$ (tých je spočítateľne veľa) množina $A_a \subseteq X$, $\mu(A_a) = 0$, že

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} \|(\phi_x(a_{ij}))\| = \sup_{x \in X \setminus A_a} \|(\phi_x(a_{ij}))\|.$$

Položme $A = \bigcup_{a \in M_n(C)} A_a$, potom vďaka spočítateľnosti tohto zjednotenia je $\mu(A) = 0$ a platí

$$\|(a_{ij})\| = \sup_{x \in X \setminus A} \|(\sigma_x(a_{ij}))\|, \quad (a_{ij}) \in M_n(C),$$

pretože $\sigma_x \upharpoonright_S = \phi_x$. Napokon z hustoty C v S táto rovnosť platí pre všetky matice z $M_n(S)$, čo sme potrebovali.

Literatúra

- [1] E. M. Alfsen: *Compact convex sets and boundary integrals*, Springer-Verlag New York (1971), *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Band 57. [24](#)
- [2] W. Arveson: *Subalgebras of C^* -algebras*, *Acta Math.*, 123:141–224 (1969). [2](#), [18](#), [19](#), [20](#), [22](#), [25](#), [28](#)
- [3] W. Arveson: *An invitation to C^* -algebras*, Springer-Verlag New York (1976). [6](#), [10](#), [16](#), [49](#), [73](#), [74](#), [76](#)
- [4] W. Arveson: The noncommutative Choquet boundary, *Journal Amer. Math. Soc.* (2008), 1065-1084. [2](#), [3](#), [29](#), [50](#), [73](#), [75](#)
- [5] K. R. Davidson: *C^* -algebras by example*, Fields Institute Monographs, Amer. Math. Soc. (1996). [73](#)
- [6] E. G. Effros and Z.-J. Ruan: *Operator Spaces*, London Math. Soc. Monographs, Clarendon Press Oxford (2000). [18](#), [32](#)
- [7] R. V. Kadison and J. R. Ringrose: *Fundamentals of the theory of operator algebras*, Academic Press, New York (1983). [6](#), [7](#), [9](#), [10](#), [39](#), [68](#)
- [8] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics 156, Springer-Verlag, New York (1995). [48](#), [50](#)
- [9] G. Leobacher: *Tensorprodukte von C^* -algebren und vollständig positive Operatoren* (1999). [13](#)
- [10] R. Meise and D. Vogt: *Introduction to Functional Analysis*, Clarendon, Oxford (1997). [46](#)
- [11] P. R. Phelps: *Lectures on Choquet's Theorem*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2001). [24](#)
- [12] W. Rudin: *Functional analysis*, second ed, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc., New York, (1991). [4](#)
- [13] W. F. Stinespring: Positive Functions on C^* -algebras, *Amer. Math. Soc.* (1955), 211-216. [16](#), [18](#)

-
- [14] M. Takesaki: *Theory of Operator Algebras I, II, III*, Springer-Verlag (2001).
[6](#), [68](#), [69](#)