Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Petr Petráček

Geometrické vlastnosti podprostorů spojitých funkcí

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce:	prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematická analýza

Praha 2011

Rád bych na tomto místě poděkoval v první řadě vedoucímu práce prof. Jaroslavu Lukešovi za cenné rady i otázky a za jeho trpělivý přístup. Rád bych také poděkoval své rodině za neutuchající podporu jak materiální, tak hlavně psychickou.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

V Praze dne .... Podpis autora

Název práce: Geometrické vlastnosti podprostorů spojitých funkcí
Autor: Bc. Petr Petráček
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.

Abstrakt: Tato práce se zabývá některými geometrickými vlastnostmi Müntzových prostorů jakožto podprostorů spojitých funkcí. První kapitola je věnována výčtu několika nejdůležitějších vět Müntzova typu. Jmenovitě se věnuje klasické Müntzově větě a Úplné Müntzově větě na prostoru spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$, je v ní zmíněno také rozšíření na obecný interval $[a, b]$ a analogie Úplné Müntzovy věty pro prostory $L^p([0, 1])$. Druhá kapitola je rozdělena do tří částí. V první části je nejprve uvedeno několik základních vět a pojmů teorie Choquetovy hranice, načež je s jejich využitím charakterizována Choquetova hranice Müntzových prostorů. Druhá část této kapitoly obsahuje výsledek o nereflexivitě Müntzových prostorů včetně jeho důsledku o nemožnosti zavedení ekvivalentní uniformně konvexní normy na těchto prostorech. Třetí část je věnována otázce Radon-Nikodýmovy vlastnosti Müntzových prostorů. Hlavním výsledkem této části je nalezení speciálního typu Müntzových prostorů, který nemá Radon-Nikodýmovu vlastnost. Závěrečná část obsahuje shrnutí některých dalších známých výsledků a otevřených problémů týkajících se Müntzových prostorů.

Klíčová slova: Müntzovy prostory, Choquetova hranice, Radon-Nikodýmova vlastnost, reflexivita

Title: Geometric properties of subspaces of continuous functions
Author: Bc. Petr Petráček
Department: Department of mathematical analysis
Supervisor: prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.

Abstract: In this thesis we study certain geometric properties of Müntz spaces as subspaces of continuous functions. In the first chapter we present some of the most important examples of the Müntz type theorems. Namely, we present the classic Müntz theorem and the Full Müntz theorem in the setting of the space of continuous functions on the interval $[0, 1]$. We also mention several extensions of these theorems to the case of continuous functions on the general interval $[a, b]$ as well as an analogy of the Full Müntz theorem for the $L^p([0, 1])$ spaces. The second chapter is divided into three sections. In the first section we present some definitions and well-known theorems of Choquet theory, which we use to characterize the Choquet boundary of Müntz spaces. In the second section we present the result concerning non-reflexivity of Müntz spaces as well as its corollary describing the non-existence of an equivalent uniformly convex norm on these spaces. In the third section, we concern ourselves with the question of Müntz spaces having the Radon-Nikodym property. As a main result of this part we show that a certain type of Müntz spaces doesn´t have the Radon-Nikodym property. The final chapter contains a summary of some known results as well as open problems related to the theory of Müntz spaces.

Keywords: Müntz spaces, Choquet boundary, Radon-Nikodym property, reflexivity

Obsah

Kapitola 1

Úmluva

V dalším textu budeme prostor spojitých funkcí na omezeném uzavřeném intervalu $[a,b]$ značit $C([a,b])$ a budeme na tomto prostoru uvažovat supremovou normu

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Prostor algebraických polynomů na $[a,b]$ budeme značit $P[a,b]$. Pro $A \subset C([a,b])$ bude $\overline{span} A$ značit uzavřený lineární obal prvků množiny A. Pro B Banachův prostor budeme B^* značit duální prostor k B, neboli prostor všech lineárních operátorů na B spojitých tamtéž vůči normě B. Pro $p \in [1,\infty)$ značíme $L^p([0,1])$ příslušný Lebesgueův prostor se standardní normou

$$||f||_{L^p([0,1])} = \left(\int\limits_{[0,1]} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \; p \in [1,\infty),$$
$$||f||_{L^\infty([0,1])} = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ skoro všude na } [0,1]\}.$$

Pro μ nezápornou Radonovu míru na intervalu $[0,1]$ značíme *supt* μ nejmenší uzavřenou množinu $A \subseteq [0,1]$, pro kterou platí $\mu([0,1] \setminus A) = 0$. Symbolem δ_x budeme značit Diracovu míru na intervalu $[0,1]$, tedy míru splňující pro každou $A \subseteq [0,1]$

$$\delta_x(A) = 1, \text{ pokud } x \in A,$$
$$\delta_x(A) = 0, \text{ pokud } x \notin A.$$

Kapitola 2

Müntzova věta a její zobecnění

2.1 Klasická Müntzova věta a její zobecnění na obecný interval

V této kapitole uvedeme důkaz Müntzovy (též Müntz-Szászovy) věty a některá její zobecnění a důsledky. Nejdříve však uvedeme několik známých vět a zadefinujeme několik pojmů.

Věta 2.1. *Weierstrassova věta*
Množina $P[a,b]$ je hustá v množině $C[a,b]$. Neboli pro každou $f \in C[a,b]$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $p_\varepsilon \in P[a,b]$ takový polynom, že $||f - p_\varepsilon||_\infty < \varepsilon$.

Uveďme nyní definici, která nám mimo jiné umožní Weierstrassovu větu formulovat ještě jinak.

Definice 2.2. Fundamentální posloupnost
Buď $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost v $C[a,b]$. Posloupnost $\{f_n\}$ nazveme *fundamentální posloupností* na intervalu $[a,b]$, pokud $\overline{span}\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} = C[a,b]$.

Můžeme tedy Weierstrassovu větu přeformulovat také takto: „Posloupnost $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ je na intervalu $[a,b]$ fundamentální.“ Nabízí se tak otázka, jestli fundamentálních posloupností mocnin x není více, a jestli je nelze nějakým způsobem charakterizovat. Na tuto otázku právě odpovídá Müntzova věta. Než ji však zformulujeme, připomeneme několik vět z funkcionální a komplexní analýzy, které využijeme při jejím důkazu.

Věta 2.3. *Hahn-Banachova věta*
Nechť f je spojitá lineární forma na podprostoru M reálného normovaného lineárního prostoru E. Potom existuje $F \in E^*$, pro kterou platí $F = f$ na M a $||F||_E = ||f||_M$.

Zvláště užitečný bude následující důsledek této věty.

Důsledek 2.4. *Nechť M je uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru E a $x \in E \setminus M$. Potom existuje $\phi \in E^*$ tak, že $\phi = 0$ na M a $\phi(x) \neq 0$.*

Také využijeme následující verzi Hahn-Banachovy věty.

Věta 2.5. *Algebraická verze Hahn-Banachovy věty*
Nechť p je konvexní funkcionál na reálném vektorovém prostoru W a M je lineární podprostor W a f je lineární forma na M. Potom existuje lineární forma F na W tak, že $F = f$ na M a $F \leq p$ na W. Je-li p dokonce pseudonorma, lze volit F tak, aby $|F| leqp$ na W.

Následující známou větu neuvádíme v plné obecnosti, ale v konkrétním tvaru, který použijeme.

Věta 2.6. *Rieszova věta o reprezentaci*
Buď $\phi \in (C([0,1]))^*$, pak existuje μ Borelova míra s omezenou totální variací na $[0,1]$ taková, že pro každou f spojitou funkci na $[0,1]$ platí

$$\phi(f) = \int\limits_{[0,1]} f(x) d\mu(x).$$

Nakonec uveďme několik tvrzení z komplexní analýzy. Následující tvrzení neuvedeme v plné obecnosti, ale ve tvaru, který vyhoví našim potřebám.

Věta 2.7. *Blaschkeho věta*
Buď f omezená analytická funkce na jednotkovém kruhu v komplexní rovině s nulovými body $\{\alpha_n\}$. Pak f není identicky nulová právě tehdy, když posloupnost nulových bodů splňuje podmínku

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) \text{ konverguje.}$$

Věta 2.8. *Residuová věta*
Buď ϕ kladně orientovaná Jordanova křivka a f buď funkce holomorfní všude na Int ϕ až na izolovanou množinu M. Pak

$$\int\limits_{\phi} f dz = 2\pi i \sum_{z \in Int\, \phi \cap M} res(f, z),$$

kde Int ϕ značí vnitřek křivky ϕ a $res(f,z)$ značí residuum funkce f v bodě z.

Nyní již můžeme přistoupit k formulaci Müntzovy věty.

Věta 2.9. *Müntzova (Müntz-Szászova) věta*
Posloupnost

$$x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_n}, \ldots$$

kde $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, *je fundamentální na* $[0,1]$ *právě tehdy, když* $\lambda_0 = 0$ *a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \text{ diverguje.}$$

Důkaz. (Tento důkaz je možno nalézt ve W.Rudin [1]. Původní důkaz je možno nalézt kupříkladu v A.Pinkus [2]). Předpokládejme, že platí
$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$. Pokud posloupnost $\{x^{\lambda_n}\}_{n=0}^{\infty}$ není fundamentální, pak není fundamentální ani posloupnost $\{x^{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Z Hahn-Banachovy věty (resp. jejího důsledku (2.4)) a Rieszovy věty o reprezentaci (2.6) pak existuje nenulová borelovská míra μ s omezenou totální variací, pro kterou platí

$$\int_{[0,1]} x^{\lambda_n} d\mu(x) = 0, \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Ukážeme nyní, že za předpokladu divergence sumy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ každá taková míra splňuje zároveň

$$\int_{[0,1]} x^n d\mu(x) = 0, \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

To zřejmě platí, pokud $\mu = c \cdot \delta_0$ pro nějakou nenulovou konstantu c.
V ostatních případech můžeme dokonce předpokládat, že míra μ není koncentrovaná v nule. Skutečně, pokud by totiž platilo

$$\mu(\{0\}) = c \neq 0,$$

stačí místo míry μ uvažovat míru ν definovanou následujícím způsobem

$$\nu := \mu - c\delta_0.$$

Z našich předpokladů vyplývá, že ν je netriviální. Stále přitom splňuje

$$\int_{[0,1]} x^{\lambda_n} d\nu(x) = \int_{[0,1]} x^{\lambda_n} d\mu(x) = 0, \ n \in \mathbb{N},$$

což jsme chtěli. Přitom pokud ν má vlastnost (2.2), pak má tuto vlastnost i μ. Budeme tedy v dalším předpokládat, že μ není koncentrovaná v nule. Položme

$$f(z) = \int\limits_{[0,1]} x^z d\mu(x), \; z \in \{z \in \mathbb{C} : Re\ z > 0\}. \tag{2.3}$$

Pro $x \in (0,1]$ a z splňující $Re\ z > 0$ platí $x^z = e^{z \ln x}$ a $|x^z| = x^{Re(z)} \leq 1$. Funkce f je tedy analytická a omezená na množině $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$. Značme dále tuto množinu I_+. Funkce f dále zřejmě splňuje

$$f(\lambda_n) = 0, \; n = 1, 2, \ldots$$

Položme nyní

$$g(z) = f\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \; z \in I_+.$$

Zobrazení

$$z \mapsto \frac{1+z}{1-z}, \; |z| < 1$$

zobrazuje jednotkový kruh v komplexní rovině na I_+. Funkce g je tedy omezená analytická funkce na jednotkovém kruhu splňující $g(\alpha_n) = 0$, kde

$$\alpha_n = \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}, \; n = 1, 2, \ldots$$

Použijeme-li nyní Větu (2.7), dostaneme, že g je netriviální právě tehdy, když

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) \text{ konverguje.} \tag{2.4}$$

Lze snadno ukázat, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|)$ konverguje právě, když suma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ diverguje. Platí-li tedy, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} =$ je divergentní, je $g \equiv 0$ a tedy $f \equiv 0$. Potom je ale

$$0 = f(n) = \int\limits_{[0,1]} x^n d\mu(x), \; n \in \mathbb{N},$$

a μ tedy splňuje vztah (2.2). Z důsledku Banachovy věty (2.4) tedy vyplývá, že funkce x^n leží v $\overline{span}\{x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots\}$ pro každé n přirozené. Zkombinujeme-li tento výsledek s Weierstrassovou větou dostáváme, že je-li suma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ divergentní, pak je posloupnost $\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots\}$ fundamentální.

Předpokládejme nyní, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ je konvergentní. Podaří-li se nám zkonstruovat netriviální nezápornou Borelovu míru s omezenou totální variací, která splňuje (2.1), jsme hotovi. Položme tedy

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z}. \tag{2.5}$$

Funkce f je meromorfní s póly v bodech -2 a $-2 - \lambda_n$ a nulovými body v λ_n. Funkce f je zároveň omezená na množině $\{z \in \mathbb{C} : Rez > -1\}$, neboť každý z členů v (2.5) je tam v absolutní hodnotě menší než 1. Budeme tuto množinu značit $I_{-1,+}$. Pro každé takové $z \in I_{-1,+}$ můžeme s využitím Cauchyovy formule psát

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega, \tag{2.6}$$

kde $\Gamma_R = \{\omega \in I_{-1,+} : |-1-\omega| = R\} \cup \{\omega = -1 + it : t \in [-R, R]\}$. Označme pro $R > 0$

$$I^1_{-1,+}(R) = \{\omega \in I_{-1,+} : |-1-\omega| = R\},$$
$$I^2_{-1,+}(R) = \{\omega = -1 + it : t \in [-R, R]\}.$$

Potom pro libobolné pevné $z \in I_{-1,+}$ platí

$$\lim_{R\to\infty} \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{I^1_{-1,+}(R)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega \right| \leq \lim_{R\to\infty} \frac{R}{2} \sup_{\omega \in I^1_{-1,+}(R)} \left| \frac{f(\omega)}{\omega - z} \right| = 0. \tag{2.7}$$

Neboť rovnost (2.6) můžeme pro $z \in I_{-1,+}$ a $R > (1 + |z|)$ napsat ve tvaru

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{I^1_{-1,+}(R)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{I^2_{-1,+}(R)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega,$$

dostaneme limitním přechodem pro $R \to \infty$ s využitím vztahu (2.7) rovnost

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(-1+is)}{1 + z - is} ds. \tag{2.8}$$

Tu můžeme přepsat jako

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 x^z \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(-1+is) e^{-is \ln x} ds \right) dx,$$

využijeme-li vztah

$$\frac{1}{1+z-is} = \int_0^1 x^{z-is} dx.$$

Položme nakonec

$$d\mu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(-1+is) e^{-is \ln x} ds, \ x \in (0,1].$$

Výraz $d\mu(x)$ je Fourierova transformace $f(-1+is)$ v bodě $\ln x$. Takto zadaný operátor je omezený a spojitý na $(0,1]$ díky členu $\frac{1}{(z+2)^2}$ v rovnosti (2.5), který zaručuje, že $f(-1+is)$ je funkce v $L^1([0,1])$. Tato míra má všechny vlastnosti, které jsme požadovali. Skutečně, je totiž

$$0 = f(\lambda_n) = \int_0^1 x^{\lambda_n} d\mu(x), \ n = 0,1,2,\ldots.$$

$\square$

V následujícím ukážeme, jak zobecnit charakterizaci fundamentálních posloupností v případě, že místo intervalu $[0,1]$ uvažujeme obecný interval $[a,b]$. Začneme jednoduchým pomocným tvrzením.

Lemma 2.10. *Buď I interval typu $[a,b] \subset (-\infty,\infty)$, přičemž $0 \in I$ a buď $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ posloupnost kladných reálných čísel takových, že množina*

$$A = span\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots\}$$

je hustá v prostoru $C(I)$. Potom množina

$$A_1 = span\{x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \ldots\}$$

je hustá v prostoru $C_0(I) = \{f \in C(I) : f(0) = 0\}$.

Důkaz. Zvolme pevně libovolnou funkci $f \in C_0(I)$. Víme, že existuje posloupnost $\{\psi_n\}$ funkcí z A, která konverguje k f stejnoměrně na I. Označme jako ϕ_n funkce z A_1 takové, že

$$\psi_n \equiv \alpha_n \cdot 1 + \phi_n, \ \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} ||f-\phi_n|| &\le ||f-\psi_n|| + |\alpha_n| = ||f-\psi_n|| + |(f-\psi_n)(0)| \\ &\le 2||f-\psi_n|| \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že posloupnost funkcí ϕ_n ležících v A_1 konverguje k f stejnoměrně na I, a neboť jsme f volili libovolně, je tvrzení dokázáno. $\square$

Právě dokázané tvrzení využijeme při důkazu následující věty, která charakterizuje, kdy je posloupnost polynomů s nezápornými celými exponenty fundamentální v prostoru $C([a,b])$.

Poznámka 2.11. Následující dvě věty lze nalézt v A. Pinkus [2], kde jsou ale shrnuty ve větu jedinou. My je zde pro větší přehlednost uvádíme odděleně.

Věta 2.12. *Müntzova věta na obecném intervalu* $[a,b]$
Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *je omezený uzavřený interval a* N *buď libovolná posloupnost navzájem různých nezáporných celých čísel. Označme*

$$\mathbb{M}_N = \overline{span}\{x^n : n \in N\}.$$

Potom

i) Je-li $a = 0$ *či* $b = 0$*, pak*

$$\mathbb{M}_N = C[a,b] \text{ právě tehdy, když } 0 \in N \text{ a } \sum_{n \in N \setminus \{0\}} \frac{1}{n} \text{ diverguje,}$$

ii) Je-li $[a,b] \subset (-\infty, 0)$ *nebo* $[a,b] \subset (0,\infty)$*, pak*

$$\mathbb{M}_N = C[a,b] \text{ právě tehdy, když } \sum_{n \in N \setminus \{0\}} \frac{1}{n} \text{ diverguje,}$$

iii) je-li $a < 0 < b$*, pak*

$$\mathbb{M}_N = C[a,b] \text{ právě tehdy, když } 0 \in N \text{ a } \sum_{\substack{n \in N \setminus \{0\} \\ n \text{ sudé}}} \frac{1}{n} \text{ diverguje,}$$

$$\text{a zároveň } \sum_{\substack{n \in N \\ n \text{ liché}}} \frac{1}{n} \text{ diverguje.}$$

Důkaz.

i) Důkaz je v tomto případě prakticky stejný jako důkaz Müntzovy věty na intervalu $[0,1]$, liší se pouze v několika bodech. Za prvé, tam kde jsme v důkazu Müntzovy věty konstruovali funkci f (viz 2.3), bychom nyní konstruovali funkci

$$f_b(z) = \int_{[0,b]} \left(\frac{x}{b}\right)^z d\mu(x), \ z \in \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}.$$

Tato funkce je opět holomorfní a omezená na svém definičním oboru a zbytek důkazu této implikace pak oproti důkazu Müntzovy věty na $[0,1]$ proběhne beze změny, pouze místo s funkcí f pracujeme s funkcí f_b.

Důkaz opačné implikace se shoduje s důkazem Müntzovy věty až do rovnosti (2.8). Tu můžeme v tomto případě přepsat jako

$$f(z) = \frac{1}{2\pi b} \int_0^b \left(\frac{x}{b}\right)^z \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(-1+is) e^{-is\ln\left(\frac{x}{b}\right)} ds\right) dx,$$

využijeme-li vztah

$$\frac{1}{1+z-is} = \frac{1}{b} \int_0^b \left(\frac{x}{b}\right)^{z-is} dx.$$

Nyní, analogicky jako v důkazu Müntzovy věty, definujeme míru μ takto:

$$d\mu(x) = \frac{1}{2\pi b} \int_{-\infty}^{\infty} f(-1+is) e^{-is\ln\left(\frac{x}{b}\right)} ds, \ x \in (0,b],$$

přičemž tato míra má opět přesně ty vlastnosti, které jsme požadovali.

ii) Předpokládejme, že interval je typu $[a,b] \subset (0,\infty)$, a že zmíněná řada diverguje. Pokud navíc platí $0 \in N$, potom z bodu i) dostáváme, že posloupnost $\{x^n\}_{n\in N}$ je fundamentální v prostoru $C([0,b])$, a tedy je zřejmě fundamentální i v prostoru $C([a,b])$. Pokud $0 \notin N$, pak z bodu i) a Lemmatu (2.10) vyplývá, že posloupnost $\{x^n\}_{n\in N}$ je fundamentální v prostoru $C_0([0,b])$. Pak je ale zřejmě fundamentální i v prostoru $C([a,b])$, neboť každou funkci z tohoto prostoru lze rozšířit na funkci z $C_0([0,b])$. Pokud je interval typu $[a,b] \subset (-\infty,0)$, postupujeme analogicky.

Důkaz opačné implikace lze nalézt v Clarskon, Erdös [3]. Jde o silně netriviální důkaz, uvést jej v plném rozsahu bohužel překračuje možnosti této práce.

iii) Předpokládejme nejprve, že jsou příslušné podmínky na N splněny. Označme dále $c := \max\{-a,b\}$. Z bodu i) plyne, že jak posloupnost

$$S := \{1, \{x^n\}_{n\in N\setminus\{0\},\, n \text{ sudé}}\},$$

tak posloupnost

$$L := \{1, \{x^n\}_{n\in N,\, n \text{ liché}}\},$$

je fundamentální v $C([0,c])$. Označme dále jako $\mathbb{L}$ množinu všech lichých spojitých funkcí na $[-c,c]$ a jako $\mathbb{S}$ množinu všech sudých spojitých funkcí na $[-c, c]$. Neboť každá spojitá funkce na $[-c, c]$ je konečnou lineární kombinací funkcí z $\mathbb{L}$, $\mathbb{S}$ a konstantní funkce, je posloupnost $\{1, \{x^n\}_{n \in N}\}$ fundamentální v prostoru $C([-c, c])$. Ten ale díky naší volbě c obsahuje i prostor $C([a, b])$ a posloupnost $\{1, \{x^n\}_{n \in N}\}$ je tak zřejmě fundamentální i v tomto prostoru.

Předpokládejme nyní, že posloupnost $\{x^n\}_{n \in N}$ je fundamentální v prostoru $C([a, b])$. Pak jistě $0 \in N$, a označíme-li $d := \min\{-a, b\}$, je zmíněná posloupnost fundamentální na $C([-d, d])$. Z toho už ale plyne, že posloupnosti S a L jsou každá fundamentální v prostoru $C([0, d])$, neboť každou spojitou funkci na intervalu $[0, d]$ můžeme spojitě rozšířit na $[-d, d]$ jako součet konstanty a liché, resp. sudé funkce. Bod i) nám pak zaručuje, že podmínky divergence příslušných řad v iii) jsou splněny.

$\square$

Věta 2.13. *Müntzova věta na obecném intervalu* $[a, b]$
Buď $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *omezený uzavřený interval. Buď* $g \in C(\mathbb{R})$*, která má holomorfní rozšíření na celé* $\mathbb{C}$*. Dále buď* Λ *podmnožina* $\mathbb{R}$*, která má konečný hromadný bod. Označme*

$$N_g = \{n : g^{(n)}(0) \neq 0\},$$

$$\mathbb{M}_{N_g} = \overline{span}\{x^n : n \in N_g\},$$

$$\mathbb{O}_\Lambda = \overline{span}\{g(\lambda x) : \lambda \in \Lambda\}.$$

Potom

$$\mathbb{O}_\Lambda = C([a, b]) \text{ právě tehdy, když } \mathbb{M}_{N_g} = C([a, b]).$$

Důkaz. Z Hahn-Banachovy věty (resp. důsledku (2.4)) a Rieszovy věty o reprezentaci (2.6) plyne, že množina $\mathbb{O}_\Lambda$ nesplývá s celým prostorem $C[a, b]$ právě tehdy, když existuje nenulová borelovská míra μ s omezenou totální variací na [a,b], která splňuje

$$\int_{[a,b]} g(\lambda x) d\mu(x) = 0, \ \lambda \in \Lambda.$$

Předpokládejme tedy, že taková míra existuje a zároveň $\mathbb{M}_{N_g}$ splývá s prostorem $C[a, b]$. Položme

$$h(z) = \int_{[a,b]} g(zx) d\mu(x). \tag{2.9}$$

Neboť g je holomorfní na celém $\mathbb{C}$, je taková i h. Navíc $h(\lambda) = 0$ pro všechna $\lambda \in \Lambda$. Z předpokladů víme, že Λ má konečný hromadný bod. Musí tedy nutně platit $h \equiv 0$. Můžeme tedy derivováním rovnosti (2.9) podle z ukázat, že platí

$$\int\limits_{[a,b]} x^n g^{(n)}(zx) d\mu(x) = 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

Položíme-li nyní $z = 0$ dostaneme

$$g^{(n)}(0) \int\limits_{[a,b]} x^n d\mu(x) = 0, \ n \in \mathbb{N},$$

a tedy platí

$$\int\limits_{[a,b]} x^n d\mu(x) = 0, \ n \in N_g.$$

Neboť ale $\mathbb{M}_{N_g}$ splývá s prostorem $C[a,b]$, musí být míra μ identicky nulová, což je spor.

Předpokládejme naopak, že $\mathbb{M}_{N_g}$ nesplývá s prostorem $C[a,b]$ a existuje tedy nenulová borelovská míra s omezenou totální variací, která splňuje

$$\int\limits_{[a,b]} x^n d\mu(x) = 0, \ n \in N_g.$$

Neboť g je holomorfní na celém $\mathbb{C}$, platí dále

$$g(x) = \sum_{n \in N_g} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Kombinací těchto dvou faktů dostáváme

$$\int\limits_{[a,b]} g(\lambda x) d\mu(x) = 0, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

a $\mathbb{M}_\Lambda$ tedy nemůže splývat s prostorem $C[a,b]$. $\square$

2.2 Úplná Müntzova věta a její analogie pro prostory $L^p([0,1])$

Vraťme se nyní ještě k případu, kdy naším uvažovaným intervalem byl interval $[0,1]$. Doposud jsme uvažovali pouze rostoucí posloupnosti exponentů λ_n. V této kapitole ukážeme, že této podmínky se lze zbavit. Nejprve však uveďme následující analogii Müntzovy věty pro prostory $L^p([0,1])$, kterou dokážeme pro případ $p = 2$.

Věta 2.14. *Úplná Müntzova věta na $L^p([0,1])$*
Buď $p \in [1, \infty)$ a $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ buď posloupnost navzájem různých reálných čísel větších než $-1/p$. Potom

$$span\{x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, \dots\}$$

je hustý v $L^p([0,1])$ právě tehdy, když

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n + \frac{1}{p}}{(\lambda_n + \frac{1}{p})^2 + 1} \text{ diverguje.}$$

Poznámka 2.15. V tomto znění lze větu i s důkazem nalézt v Borwein, Erdélyi [4]. V Erdélyi, Johnson [5] je dokázána verze této věty pro prostory $L^p([0,1])$, kde $p \in (0,1)$. V Borwein, Erdélyi [6] je uvedena verze této věty pro prostory $L^p([a,b])$ a $C([a,b])$, kde $[a,b] \subset (0,\infty)$ a dokonce pro libovolnou posloupnost navzájem různých reálných exponentů.

Zde dokážeme tuto větu pro konkrétní případ $p = 2$. Než však tak učiníme, uvedeme dvě pomocná tvrzení, z nichž jedno dokážeme a u druhého pouze odkážeme na příslušnou literaturu, v které je důkaz možno nalézt. Následující tvrzení včetně uvedeného důkazu lze nalézt v Ha Dzung [7].

Lemma 2.16. *Buď $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ posloupnost reálných čísel taková, že pro každé k přirozené platí $0 < a_k \neq 1$ a navíc platí $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \text{ diverguje právě tehdy, když } \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} |1 - a_k| = 0. \tag{2.10}$$

Důkaz. Neboť jsme předpokládali, že a_k jsou nezáporné a $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, platí následující rovnost

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln|1-a_k|}{a_k} = -1.$$

Existuje tedy N přirozené tak, že

$$-\frac{3}{2}a_k \leq \ln|1-a_k| \leq -\frac{1}{2}a_k, \ k > N.$$

Z toho vidíme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ diverguje právě tehdy, když } \sum_{k=1}^{\infty} \ln|1-a_k| \text{ diverguje,}$$

neboli

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ diverguje právě tehdy, když } \lim_{n\to\infty}\left(\ln \prod_{k=1}^{n} |1-a_k|\right) = \infty.$$

Z toho již s využitím spojitosti exponenciální funkce plyne námi požadované tvrzení (2.10). □

Jak jsme již předeslali, následující Lemma uvedeme bez důkazu. Ten lze nalézt v Ha Dzung [8].

Lemma 2.17. *Buď n libovolné přirozené a buďte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ navzájem různá kladná čísla. Označme dále $\Lambda_n = span\{x^{\lambda_1}, \dots, x^{\lambda_n}\}$. Potom pro všechna $\lambda \geq 0$ platí*

$$\inf_{\phi\in\Lambda_n} \left|\left|x^{\lambda} - \phi\right|\right|_{L^2([0,1])} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda+1}} \prod_{j=1}^{n} \frac{|\lambda_j - \lambda|}{\lambda_j + \lambda + 1}.$$

Nyní již přistoupíme k důkazu Úplné Müntzovy věty na $L^p([0,1])$ (2.14) pro $p = 2$. Pro přehlednost znovu zformulujeme tuto větu v příslušném tvaru.

Věta 2.18. *Úplná Müntzova věta na $L^2([0,1])$*
Buď $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost navzájem různých reálných čísel větších než $-1/2$. Potom

$$span\{x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, \dots\}$$

je hustý v $L^2([0,1])$ právě tehdy, když

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n + \frac{1}{2}}{(\lambda_n + \frac{1}{2})^2 + 1} \text{ diverguje.}$$

Důkaz. Budeme uvažovat následujícím způsobem: neboť

$$L^2([0,1]) = \overline{\{f \in C([0,1])\}}^{||\cdot||_{L^2([0,1])}},$$

a dle Weierstrassovy věty (2.1) jsou polynomy husté v $C([0,1])$ (a tedy také v $L^2([0,1])$), stačí nám ukázat, že divergence řady je ekvivalentní se splněním následujícího vztahu

$$x^m \in \overline{span\{x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, \dots\}}^{||\cdot||_{L^2([0,1])}},\ m \in \mathbb{N}, \tag{2.11}$$

přičemž nám tento vztah zřejmě stačí ověřit pro přirozené hodnoty $m \neq \lambda_i$, $i = 0, 1, \dots$. Mějme tedy takové m. Lemma 2.17 nám říká, že

$$\inf_{b_i\in\mathbb{C}} \left|\left| x^m - \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^{\lambda_i} \right|\right|_{L^2([0,1])} = \frac{1}{\sqrt{1+2m}} \prod_{i=0}^{n-1} \left| \frac{m-\lambda_i}{m+\lambda_i+1} \right|,$$

vztah (2.11) pro námi zvolené m tedy platí právě tehdy, když

$$\limsup_n \prod_{i=0}^{n-1} \left| \frac{m-\lambda_i}{m+\lambda_i+1} \right| = 0.$$

Poslední rovnost můžeme ekvivalentně zapsat také takto:

$$\limsup_n \prod_{\substack{i=0 \\ \lambda_i > m}}^{n-1} \left| \frac{m-\lambda_i}{m+\lambda_i+1} \right| \prod_{\substack{i=0 \\ -1/2 < \lambda_i \leq m}}^{n-1} \left| \frac{m-\lambda_i}{m+\lambda_i+1} \right| = 0. \tag{2.12}$$

Tato podmínka je splněna právě tehdy, když

$$\sum_{\substack{i=0 \\ \lambda_i > m}}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_i+1} \text{ diverguje, nebo } \sum_{\substack{i=0 \\ -1/2 < \lambda_i \leq m}}^{\infty} (2\lambda_i+1) \text{ diverguje.}$$

Skutečně, rovnost 2.12 platí právě tehdy, pokud platí alespoň jeden z výroků

$$\limsup_n \prod_{\substack{i=0 \\ \lambda_i > m}}^{n-1} \left| \frac{m-\lambda_i}{m+\lambda_i+1} \right| = 0, \tag{2.13}$$

nebo

$$\limsup_n \prod_{\substack{i=0 \\ -1/2 < \lambda_i \leq m}}^{n-1} \left| \frac{m-\lambda_i}{m+\lambda_i+1} \right| = 0. \tag{2.14}$$

Tyto výroky mohou platit pouze tehdy, pokud je alespoň jedna z posloupností $\{\lambda_i : \lambda_i > m\}$, $\{\lambda_i : -1/2 < \lambda_i \leq m\}$ nekonečná. Je-li nekonečná posloupnost $\{\lambda_i : \lambda_i > m\}$, potom má jistě alespoň jeden hromadný bod. Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že má právě jeden hromadný bod. Je-li tento hromadný bod konečný, pak jistě platí výrok 2.13 a stejně tak musí divergovat řada $\sum_{\substack{i=0 \\ \lambda_i > m}}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_i+1}$. Je-li hromadný bod této posloupnosti roven nekonečnu, pak z Lemmatu 2.10 vyplývá, že platnost výroku 2.13 je ekvivalentní s divergencí řady

$$\sum_{\substack{i=0 \\ \lambda_i > m}}^{\infty} \frac{1}{m+\lambda_i+1}.$$

Ta ale diverguje právě tehdy, když diverguje řada $\sum_{\substack{i=0 \\ \lambda_i > m}}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_i+1}$, což jsme chtěli.

Předpokládejme, že je nekonečná posloupnost $\{\lambda_i : -1/2 < \lambda_i \leq m\}$. Opět můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že má právě jeden hromadný bod. Leží-li tento hromadný bod v intervalu $(-1/2, m]$, pak platí výrok 2.14 a stejně tak jistě platí, že řada $\sum_{\substack{i=0 \\ -1/2<\lambda_i\leq m}}^{\infty} (2\lambda_i + 1)$ diverguje. Zbývá nám vyšetřit možnost, že hromadný bod této posloupnosti je roven $-1/2$. Pak ale z Lemmatu 2.10 vyplývá, že platnost výroku 2.14 je ekvivalentní s divergencí řady

$$\sum_{\substack{i=0 \\ -1/2<\lambda_i\leq m}}^{\infty} \frac{2\lambda_i + 1}{m + \lambda_i + 1}.$$

Tato řada ale diverguje právě tehdy, když diverguje řada $\sum_{\substack{i=0 \\ -1/2<\lambda_i\leq m}}^{\infty} (2\lambda_i + 1)$. Zopakujme nyní, pro větší přehlednost, k čemu jsme prozatím dospěli. Ukázali jsme, že platnost inkluze

$$x^m \in \overline{span\{x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, \dots\}}^{||\cdot||_{L^2([0,1])}},$$

pro libovolné přirozené m ležící mimo posloupnost $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ je ekvivalentní se splněním rovnosti

$$\limsup_n \prod_{i=0}^{n-1} \left| \frac{m - \lambda_i}{m + \lambda_i + 1} \right| = 0,$$

přičemž tato rovnost platí právě tehdy, pokud

$$\sum_{\substack{i=0 \\ \lambda_i>m}}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_i + 1} \text{ diverguje, nebo } \sum_{\substack{i=0 \\ -1/2<\lambda_i\leq m}}^{\infty} (2\lambda_i + 1) \text{ diverguje.}$$

To je ale ekvivalentní s divergencí řady

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\lambda_i + 1}{(2\lambda_i + 1)^2 + 1}.$$

Skutečně, stačí si všimnout, že platí následující nerovnosti

$$\sum_{\substack{i=0 \\ \lambda_i>m}}^{\infty} \frac{2\lambda_i + 1}{(2\lambda_i + 1)^2 + 1} \leq \sum_{\substack{i=0 \\ \lambda_i>m}}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_i + 1} \leq 2 \sum_{\substack{i=0 \\ \lambda_i>m}}^{\infty} \frac{2\lambda_i + 1}{(2\lambda_i + 1)^2 + 1},$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ -1/2<\lambda_i\leq m}}^{\infty} \frac{2\lambda_i + 1}{(2m + 1)^2 + 1} \leq \sum_{\substack{i=0 \\ -1/2<\lambda_i\leq m}}^{\infty} \frac{2\lambda_i + 1}{(2\lambda_i + 1)^2 + 1} \leq \sum_{\substack{i=0 \\ -1/2<\lambda_i\leq m}}^{\infty} (2\lambda_i + 1).$$

□

Věta 2.19. *Úplná Müntzova věta*
Nechť $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost navzájem různých kladných reálných čísel. Potom množina

$$span\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots\}$$

je hustá v prostoru $C([0,1])$ právě tehdy, když

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{{\lambda_i}^2 + 1} \text{ diverguje.}$$

Než přistoupíme k důkazu této věty, všimněme si, že stačí důkaz provést odděleně pro následující případy:

1.) Pro posloupnost $\{\lambda_i\}$ platí $\inf_i \lambda_i > 0$.

2.) Posloupnost $\{\lambda_i\}$ splňuje $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = 0$.

3.) Posloupnost $\{\lambda_i\}$ je tvaru $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$, kde $\lim_{i\to\infty} \alpha_i = 0$ a $\lim_{i\to\infty} \beta_i = \infty$.

Skutečně, kromě právě uvedených případů může ještě nastat situace, kdy posloupnost $\{\lambda_i\}$ obsahuje podposloupnost $\{\alpha_i\}$, pro kterou $\lim_{i\to\infty} \alpha_i = 0$ a zároveň obsahuje podposloupnost $\{\beta_i\}$, pro kterou $\lim_{i\to\infty} \beta_i = c$, pro nějaké $c > 0$. V tom případě ale námi zkoumaná řada jistě diverguje a dle bodu 2) je v $C([0,1])$ hustá množina $span\{1, x^{\beta_1}, x^{\beta_2}, \dots\}$, a tedy zřejmě i množina $span\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots\}$. Jiné případy již však nastat nemohou.

Přistupme nyní k důkazu Věty(2.19). Nejprve dokážeme její platnost za předpokladu bodu 1), tedy $\inf_i \lambda_i > 0$. V důkazu využijeme Úplnou Müntzovu větu na $L^2([0,1])$ (2.18).

Důkaz. (Věty(2.19) pro $\inf_i \lambda_i > 0$.) Předpokládejme nejprve, že dokonce platí $\lambda_i \geq 1$, $i \in \mathbb{N}$. Potom zřejmě pro všechna $x \in [0,1]$ a $n \in \mathbb{N}$ platí následující nerovnosti

$$\begin{aligned}
\left| x^m - \sum_{i=0}^{n} a_i x^{\lambda_i} \right| &= \left| \int_0^x \left(m t^{m-1} - \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda_i t^{\lambda_i - 1} \right) dt \right| \\
&\leq \int_0^1 \left| m t^{m-1} - \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda_i t^{\lambda_i - 1} \right| dt \\
&\leq \left(\int_0^1 \left| m t^{m-1} - \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda_i t^{\lambda_i - 1} \right|^2 dt \right)^{1/2} \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

(v poslední nerovnosti jsme použili Hölderovu nerovnost) a

$$\left(\int_0^1 \left|t^m - \sum_{i=0}^n a_i t^{\lambda_i}\right|^2 dt\right)^{1/2} \leq \left\|t^m - \sum_{i=0}^n a_i t^{\lambda_i}\right\|_\infty . \tag{2.16}$$

Díky dodatečnému předpokladu $\lambda_i \geq 1$, $i \in \mathbb{N}$, dále platí následující ekvivalence:

$$\sum_{i=0}^\infty \frac{\lambda_i}{{\lambda_i}^2 + 1} \text{ diverguje právě tehdy, když } \sum_{i=1}^\infty \frac{2(\lambda_i - 1) + 1}{(2(\lambda_i - 1) + 1)^2 + 1} \text{ diverguje} \tag{2.17}$$

a

$$\sum_{i=0}^\infty \frac{\lambda_j}{{\lambda_j}^2 + 1} \text{ diverguje právě tehdy, když } \sum_{i=1}^\infty \frac{2\lambda_i + 1}{(2\lambda_i + 1)^2 + 1} \text{ diverguje.} \tag{2.18}$$

Předpokládejme nyní, že $\sum\limits_{i=0}^\infty \frac{\lambda_i}{{\lambda_i}^2+1}$ diverguje. Ekvivalence (2.17) v kombinaci s Větou (2.18) říká, že $span\{x^{\lambda_0 - 1}, x^{\lambda_1 - 1}, \dots\}$ je hustá v $L^2([0,1])$, z čehož ale podle nerovnosti (2.15) a Weierstrassovy věty (2.1) plyne, že množina $span\{1, x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, \dots\}$ je hustá v $C([0,1])$. Je-li naopak $span\{1, x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, \dots\}$ hustá v $C([0,1])$, potom nerovnost (2.16) v kombinaci s Weierstrassovou větou (2.1) implikuje, že je tato hustá i v $(C([0,1]),\ ||\cdot||_{L^2([0,1])})$, a tedy i v $L^2([0,1])$. Z Věty (2.18) a ekvivalence (2.18) pak plyne, že $\sum\limits_{i=0}^\infty \frac{\lambda_i}{{\lambda_i}^2+1}$ diverguje.

Právě dokázaný výsledek nyní použijeme k důkazu tvrzení pro $0 < \inf\limits_i \lambda_i < 1$. Zvolme $0 < \delta \leq \inf\limits_i \lambda_i$ libovolné pevné a definujme zobrazení

$$T : x \mapsto x^\delta,\ x \in [0,1].$$

Toto zobrazení je spojité, prosté zobrazení intervalu $[0,1]$ na $[0,1]$, a je to tedy homeomorfismus. Definujme nyní zobrazení Φ následujícím způsobem:

$$\Phi : f \mapsto f \circ T,\ f \in C([0,1]).$$

Pak z vlastností T vyplývá, že Φ je isometrický isomorfismus $C([0,1])$ na $C([0,1])$. Vidíme tedy, že hustota množiny

$$span\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots\}$$

je ekvivalentní hustotě množiny

$$span\{\Phi(1), \Phi(x^{\lambda_1}), \Phi(x^{\lambda_2}), \dots\}.$$

Nyní si stačí všimnout, že $\Phi(1) \equiv 1$ a $\Phi(x^{\lambda_i}) \equiv x^{\frac{\lambda_i}{\delta}}$, $i \in \mathbb{N}$. Označíme-li

$$\lambda_i^* = \frac{\lambda_i}{\delta},\ i \in \mathbb{N},$$

pak $\inf_i \lambda_i^* \geq 1$ a k dokončení důkazu stačí využít výše dokázaný výsledek společně s následujícími nerovnostmi

$$\delta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^*}{(\lambda_i^*)^2 + 1} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + 1} \leq \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^*}{(\lambda_i^*)^2 + 1}.$$

□

Dále se budeme věnovat případu $\lim_i \lambda_i = 0$. Nejprve však dokážeme *Newmanovu nerovnost*, kterou budeme k důkazu potřebovat. K důkazu samotné Newmanovy nerovnosti však budeme potřebovat ještě následující větu, kterou uvedeme bez důkazu. Tuto věta byla poprvé publikována v Kolmogorov [9].

Věta 2.20. *Kolmogorovova nerovnost*
Pro libovolnou funkci $f \in C^2([0, \infty))$ platí následující nerovnost

$$||f'||_\infty^2 \leq 4||f''||_\infty ||f||_\infty, \tag{2.19}$$

kde $||\cdot||_\infty$ v tomto případě značí supremovou normu na intervalu $[0, \infty)$.

Věta 2.21. *Newmanova nerovnost*
Buď $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ posloupnost navzájem různých kladných reálných čísel. Označme

$$\Gamma_n = span\{1, x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_n}\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Potom pro všechna přirozená n platí nerovnost

$$||x \cdot \frac{d}{dx}\gamma(x)||_\infty \leq 11 \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) ||\gamma(x)||_\infty,\ \gamma \in \Gamma_n.$$

Důkaz. Zvolme pevně n přirozené. Nejprve ukážeme, že bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Není li tomu tak, definujme zobrazení

$$T : x \mapsto x^{1/\sum_{i=1}^{n} \lambda_i},\ x \in [0, 1].$$

Pak T je (podobně jako v předchozím důkazu) homeomorfismus $[0, 1]$ na $[0, 1]$. Definujme dále zobrazení

$$\Phi : f \mapsto f \circ T,\ f \in C([0, 1]).$$

Zobrazení Φ je isometrický isomorfismus $C([0,1])$ na $C([0,1])$ a navíc

$$\Phi(1) \equiv 1,$$
$$\Phi(x^{\lambda_j}) \equiv x^{\lambda_j / \sum_{i=1}^{n} \lambda_i},\ j = 1, \dots, n.$$

Označme dále

$$\lambda_j^* = \lambda_j / \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,\ j = 1, \dots, n.$$

Potom zřejmě $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* = 1$ a platí-li dokazovaná nerovnost pro posloupnost exponentů $\{\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*\}$, potom platí i pro posloupnost $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, což plyne z vlastností zobrazení Φ a následující rovnosti

$$||x \cdot \frac{d}{dx}\gamma(x)|| = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \cdot ||x \cdot \frac{d}{dx}\Phi(\gamma)(x)||,\ \gamma \in \Gamma_n.$$

V dalším tedy budeme uvažovat $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Definujeme-li zobrazení

$$\Psi : x \mapsto -\ln(x),\ x \in [0,1],$$

pak Ψ je homeomorfismus $[0,1]$ na $[0,\infty)$ a pro libovolné $\gamma(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x^{\lambda_i}$ prvek Γ_n platí

$$\left| x \cdot \frac{d}{dx}\gamma(x) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i x^{\lambda_i} \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i e^{-\lambda_i \Psi(x)} \right| = \left| \frac{d}{d\Psi(x)} \gamma(\Psi(x)) \right|.$$

Můžeme se tedy při dokazování Newmanovy nerovnosti soustředit na příslušný odhad supremové normy funkcí tvaru

$$q(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-\lambda_i t} \tag{2.20}$$

na intervalu $[0,\infty)$. Označme $\Xi = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$ a definujme

$$B(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{z - \lambda_k}{z + \lambda_k},\ z \in \Xi. \tag{2.21}$$

Dokážeme následující nerovnost

$$|B(z)| \geq 1/3,\ z \in \Xi. \tag{2.22}$$

Buď $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zobrazení

$$z \mapsto \frac{z - \lambda_i}{z + \lambda_i}$$

zobrazuje Ξ na kruh, jehož průměr je tvořen intervalem $[-1, (2-\lambda_i)/(2+\lambda_i)]$ a pro všechna $z \in \Xi$ tedy platí

$$\left| \frac{z - \lambda_i}{z + \lambda_i} \right| \geq \frac{2 - \lambda_i}{2 + \lambda_i} = \frac{1 - \lambda_i/2}{1 + \lambda_i/2}$$

a máme tedy odhad

$$|B(z)| \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - \lambda_i/2}{1 + \lambda_i/2},\ z \in \Xi. \tag{2.23}$$

Pro další odhad tohoto výrazu využijeme následující nerovnost: pro všechna x, y nezáporná platí

$$\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-y}{1+y} = \frac{1-(x+y)}{1+(x+y)} + \frac{2xy(x+y)}{(1+x)(1+y)(1+(x+y))} \geq \frac{1-(x+y)}{1+(x+y)}.$$

Opakovaným použitím této nerovnosti dostaneme

$$\prod_{n=1}^{n} \frac{1 - \lambda_i/2}{1 + \lambda_i/2} \geq \frac{1 - \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}{1 + \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i} = \frac{1 - 1/2}{1 + 1/2} = 1/3,$$

což v kombinaci s odhadem (2.23) dává požadovanou nerovnost (2.22). Dále položme

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Xi} \frac{e^{-zt}}{B(z)} dz,\ t \in [0, \infty),$$

z Residuové věty (2.8) vyplývá, že $T(t)$ je funkce tvaru (2.20), z čehož mimo jiné plyne, že

$$T''(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Xi} \frac{z^2 e^{-zt}}{B(z)} dz,\ t \in [0, \infty).$$

Parametrizujeme-li nyní množinu Ξ klasickým způsobem

$$\Xi = \{1 + e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi)\}$$

a využijeme-li nerovnost (2.22) s využitím Fubiniovy věty dostaneme

$$\int_0^\infty |T''(t)|dt \leq \left(\frac{3}{2\pi}\right) \int_0^\infty \int_0^{2\pi} 2(1+\cos(\theta))e^{-(1+\cos(\theta))t} d\theta dt$$
$$= \left(\frac{3}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} 2(1+\cos(\theta)) \frac{1}{(1+\cos(\theta))} d\theta = 6. \tag{2.24}$$

Nyní se budeme zabývat výrazy tvaru $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_k t} T''(t)$. Využijeme-li opět Fubiniovu větu, dostaneme

$$\int_0^\infty e^{-\lambda_k t} T''(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\Xi \frac{z^2}{B(z)(z+\lambda_k)} dz. \tag{2.25}$$

Integrovaná funkce na pravé straně této rovnosti má póly právě v bodech λ_i, které jsou obsaženy v $Int\ \Xi$ (připomeňme, že předpokládáme $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i = 1$). Můžeme tedy počítat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Xi \frac{z^2}{B(z)(z+\lambda_k)} dz = -res\left(\frac{z^2}{B(z)(z+\lambda_k)}, \infty\right) = res\left(\frac{1}{z^2} \frac{\frac{1}{z^2}}{B(\frac{1}{z})(\frac{1}{z}+\lambda_k)}, 0\right).$$

Hodnotu požadovaného residua na pravé straně rovnosti nám pomohou určit následující vztahy

$$\frac{1}{z^4\left(\lambda_k + \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z^3} \sum_{j=0}^\infty (-1)^j (\lambda_k z)^j = \frac{1}{z^3} - \frac{\lambda_k}{z^2} + \frac{{\lambda_k}^2}{z} - \cdots,$$
$$\frac{1}{B(\frac{1}{z})} = \prod_{i=1}^n \frac{1+\lambda_k z}{1-\lambda_k z} = \prod_{i=1}^n \left(1 + 2\sum_{j=1}^\infty (\lambda_i z)^j\right)$$
$$= 1 + 2\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i\right) z + 2\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i\right)^2 z^2 + \cdots$$
$$= 1 + 2z + 2z^2 + \cdots,$$

a tedy

$$\frac{1}{z^4 B(\frac{1}{z})(\lambda_k + \frac{1}{z})} = \frac{1}{z^3} + \frac{2-\lambda_k}{z^2} + \frac{{\lambda_k}^2 - 2\lambda_k + 2}{z} + \cdots.$$

Kombinací vztahu (2.25) a právě uvedeného tedy dostáváme

$$\int_0^\infty e^{-\lambda_k t} T''(t)dt = {\lambda_k}^2 - 2\lambda_k + 2. \tag{2.26}$$

Uvažujme nyní funkci q tvaru (2.20) a libovolné a prvkem $[0,\infty)$. Rovnost (2.26) nám pak zaručuje platnost následujícího vztahu

$$\begin{aligned}\int_0^\infty q(t+a)T''(t)dt &= \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n c_i e^{-\lambda_i a} e^{-\lambda_i t}\right) T''(t)dt \\ &= \sum_{i=1}^n c_i e^{-\lambda_i a} \int_0^\infty e^{-\lambda_i t} T''(t)dt \\ &= \sum_{i=1}^n c_i e^{-\lambda_i a} ({\lambda_i}^2 - 2\lambda_i + 2) \\ &= q''(a) - 2q'(a) + 2q(a).\end{aligned}$$

Platí tedy (pro všechna a prvkem $[0,\infty)$)

$$\begin{aligned}|q''(a) - 2q'(a) + 2q(a)| &\leq \int_0^\infty |q(t+a)T''(t)|dt \leq ||q||_\infty \int_0^\infty |T''(t)|dt \\ &\leq 6||q||_\infty,\end{aligned}$$

kde jsme v posledním kroku využili nerovnost (2.24). Ihned tedy plyne

$$||q''||_\infty \leq 2||q'||_\infty + 8||q||_\infty.$$

Zkombinujeme-li tuto nerovnost s Kolmogorovovou nerovností (2.19)

$$||f'||_\infty^2 \leq 4||f||_\infty ||f''||_\infty, \ f \in C^{(2)}([0,\infty)),$$

dostaneme vztah

$$\left(\frac{||q'||_\infty}{||q||_\infty}\right)^2 \leq 8\frac{||q'||_\infty}{||q||_\infty} + 32,$$

z kterého již triviálně plyne námi požadovaná nerovnost

$$\frac{||q'||_\infty}{||q||_\infty} \leq 11.$$

Z úvah na začátku důkazu a faktu, že funkce q byla volena jako libovolná funkce tvaru (2.20) vyplývá, že důkaz je dokončen. □

Poznámka 2.22. Větu v tomto znění včetně důkazu lze nalézt v Almira [10], původní článek viz Newman [11]. Kolmogorovova nerovnost (2.19) využitá na samém konci důkazu je optimální, konstanta 4 je nejmenší možná. Samotná Newmanova nerovnost optimální není, dodejme že existují verze této věty pro polynomy na obecném intervalu $[a, b] \subset (0, \infty)$. O tomto zobecnění se lze dočíst v článku [12], kde autoři jednak odkazují také na další podobné výsledky v prostorech $L^p([0, 1])$, jednak uvádějí doměnku o optimální konstantě Newmanovy nerovnosti pro prostor spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$, která je podle nich rovna 4.

Vraťme se nyní k důkazu Věty (2.19). Již jsme důkaz provedli při dodatečném předpokladu $\inf\limits_i \lambda_i > 0$, nyní provedeme důkaz pro případ $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = 0$.

Důkaz. (Věty (2.19) pro $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = 0$.)
Nechť $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = 0$. Potom je snadné ověřit, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{{\lambda_i}^2 + 1} \text{diverguje právě tehdy, když } \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \text{ diverguje.} \tag{2.27}$$

Předpokládejme tedy, že řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ diverguje. Chceme dokázat, že množina $span\{1, x^{\lambda_1}, \dots\}$ je hustá v prostoru $C([0, 1])$. Důkaz bude probíhat stejně jako důkaz analogické implikace v Müntzově větě (2.9) až do bodu (2.4). Podaří-li se nám ukázat, že za stávajících předpokladů tento bod splněn není, budeme schopni důkaz požadované implikace dokončit stejně jako ve Větě (2.9). Chceme tedy dokázat následující: za předpokladu $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = 0$ platí

$$\text{pokud } \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \text{ diverguje, pak } \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \left|\frac{\lambda_i - 1}{\lambda_i + 1}\right|\right) \text{ diverguje.} \tag{2.28}$$

Najděme za tímto účelem i_0 přirozené tak, že $\lambda_i < 1$ pro všechna $i \geq i_0$. Potom platí

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \lambda_i \leq \sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{2\lambda_i}{\lambda_i + 1} = \sum_{i=i_0}^{\infty} \left(1 - \left|\frac{\lambda_i - 1}{\lambda_i + 1}\right|\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \left|\frac{\lambda_i - 1}{\lambda_i + 1}\right|\right),$$

z čehož vyplývá, že výrok (2.28) platí.

Pro důkaz opačné implikace v (2.27) předpokládejme pro spor, že množina $span\{1, x^{\lambda_1}, \dots\}$ je hustá v prostoru $C([0, 1])$ a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ je konečná. Označme si

$f(x) = (1-x)^{1/2}$. Pak pro každé m přirozené existuje $p \in span\{1, x^{\lambda_1}, \dots\}$ tak, že $||p - f||_\infty \leq 1/m^2$. Zřejmě pak platí následující odhad

$$\begin{aligned} |p(1-1/m^2) - p(1)| &\geq |f(1-1/m^2) - 1/m^2 - (f(1) + 1/m^2)| \\ &\geq 1/m - 2/m^2, \end{aligned}$$

a z Věty o střední hodnotě tedy plyne existence $\xi \in (1 - 1/m^2, 1)$, pro které platí

$$|\xi \frac{d}{dx} p(\xi)| = \xi \frac{|p(1-1/m^2) - p(1)|}{1/m^2} \geq (1 - 1/m^2) \frac{1/m - 1/m^2}{1/m^2} \geq \frac{m-2}{2}.$$

Využijeme-li nyní Newmanovu nerovnost (2.21) dostaneme

$$\frac{m-1}{2} \leq ||x \frac{d}{dx} p(x)||_\infty \leq 11 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \right) ||p(x)||_\infty \leq 11 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \right) (1/m^2 + ||f||_\infty),$$

přičemž tato nerovnost platí pro každé m přirozené, což je zřejmě spor s naším předpokladem o konečnosti výrazu $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$. □

Důkaz. (Věty (2.19) pro $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty = \{\alpha_i\}_{i=1}^\infty \cup \{\beta_i\}_{i=1}^\infty$, kde $\lim_{i\to\infty} \alpha_i = 0$ a $\lim_{i\to\infty} \beta_i = \infty$.)
Důkaz této části tvrzení využívá teorii Čebyševových polynomů a s ní spojené výsledky teorie aproximací a pro jeho rozsáhlost ho zde neuvedeme. Náznak důkazu lze nalézt v Almira [13]. Dle předchozích úvah je tímto důkaz Věty (2.19) dokončen. □

Uveďme nakonec ještě dva známé výsledky rozšiřující právě uvedenou větu. Následující větu lze nalézt v Borwein [14].

Věta 2.23. *Müntzova věta pro kompaktní podmnožiny* $[0, 1]$ *kladné míry Buď* $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ *posloupnost navzájem různých kladných reálných čísel taková, že* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}$ *konverguje. Buď* $A \subseteq [0, 1]$ *kompaktní množina kladné Lebesgueovy míry. Potom* $\overline{span}\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots\} \subsetneq C([0, 1])$ *a pokud navíc platí*

$$\inf_i \{\lambda_i - \lambda_{i-1}\} > 0 \tag{2.29}$$

(tato podmínka je v literatuře označována jako gap condition), pak označíme-li

$$r_A = \sup\{x \in [0, 1] : \ A \cup (x, \infty) \text{ má kladnou Lebesgueovu míru}\},$$

potom každou funkci f z $\overline{span}\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots\} \subsetneq C([0,1])$ lze vyjádřit takto

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{\lambda_i}, \ x \in A \cap [0, r_A).$$

Pokud podmínka (2.29) neplatí, pak každou funkci z $\overline{span}\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots\}$ lze rozšířit na funkci analytickou na množině

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] : |z| < r_A\}.$$

Nejnovějším zobecněním (jedná se o výsledek publikovaný roku 2003) právě uvedené věty je věta následující, kterou lze nalézt v Erdélyi [15].

Věta 2.24. *Úplná Clarkson-Erdös-Schwartzova věta o Müntzových prostorech Buď $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnost navzájem různých kladných reálných čísel splňujících*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{{\lambda_i}^2 + 1} \text{ konverguje.}$$

Potom $\overline{span}\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots\} \subsetneq C([0,1])$ a každou funkci z této množiny lze charakterizovat jako zúžení funkce analytické na množině

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] : |z| \leq 1\}$$

na interval $(0,1)$.

Kapitola 3

Geometrické vlastnosti Müntzových prostorů

V předchozí kapitole jsme se zabývali prostory tvaru $span\{1, x^{\lambda_1}, \dots, \}$. Konkrétně jsme řešili, jak souvisí výběr posloupnosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ nezáporných čísel s hustotou takového prostoru v prostoru $C([0,1])$ se supremovou normou. V této kapitole se budeme zabývat případy, kdy takovýto prostor v $C([0,1])$ hustý není. Pro

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\},$$

nekonečnou posloupnost navzájem různých kladných reálných čísel takovou, že $span\{1, x^{\lambda_1}, \dots\}$ není hustá v $C([0,1])$, budeme značit

$$M_\Lambda = \overline{span}\{1, x^{\lambda_1}, \dots\}$$

a tento vlastní uzavřený podprostor $C([0,1])$ budeme nazývat *Müntzovým prostorem* (příslušným posloupnosti Λ).

Dále budeme značit $\mathcal{M}^1([0,1])$ množinu všech nezáporných Radonových měr na $[0,1]$ s variací rovnou jedné. Isomorfismem mezi dvěma Banachovými prostory X a Y rozumíme vždy spojité lineární zobrazení $T : X \mapsto Y$, které je prosté, na Y a inverzní zobrazení je rovněž spojité. Pro Banachův prostor X značíme B_X uzavřenou jednotkovou kouli, tedy

$$B_X = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}.$$

Symbolem S_X dále značíme jednotkovou sféru, neboli

$$S_X = \{x \in X : ||x|| = 1\}.$$

Jakožto c_0 zde standardně značíme prostor všech reálných posloupností $\{a_i\}_{i=1}^\infty$, pro které $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$. Na tomto prostoru uvažujeme normu

$$||\{a_i\}|| = \max_i |a_i|, \ \{a_i\} \in c_0.$$

3.1 Choquetova hranice Müntzových prostorů

Na začátek této části uveďme, že veškeré dále uvedené definice lze v literatuře najít v obecnějším tvaru, kde je interval $[0,1]$ nahrazen obecným neprázdným kompaktním metrickým prostorem K. Pro naše potřeby je omezení na případ $K = [0,1]$ plně dostačující. Začněme několika definicemi.

Definice 3.1. Funkční prostor $\mathcal{H}$
Množinu $\mathcal{H} \subset C([0,1])$ nazveme funkčním prostorem, splňuje-li následující vlastnosti

- $f + g \in \mathcal{H}$ pro všechny f a g prvky $\mathcal{H}$,
- $\alpha \cdot f \in \mathcal{H}$ pro libovolné $f \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$,
- $\mathcal{H}$ obsahuje konstantní funkce,
- pro každé $x, y \in [0,1]$ existuje funkce $f \in \mathcal{H}$ taková, že $f(x) \neq f(y)$ (funkce z $\mathcal{H}$ oddělují body).

Je ihned vidět, že libovolný Müntzův prostor M_Λ je funkčním prostorem.

Definice 3.2. Míry reprezentující bod x vůči $\mathcal{H}$
Pro libovolný bod $x \in [0,1]$ značíme

$$\mathcal{M}_x(\mathcal{H}) = \{\mu \in \mathcal{M}^1([0,1]) : f(x) = \int_{[0,1]} f d\mu,\ f \in \mathcal{H}\}$$

a nazýváme tuto množinu *množinou měr reprezentujících bod x vůči $\mathcal{H}$.*

Poznámka 3.3. Poznamenejme pro pořádek, že množina $\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ je vždy neprázdná, neboť obsahuje Diracovu míru δ_x.

Následující tři definice popisují vlastnosti funkčních prostorů, které budou centrem našeho zájmu.

Definice 3.4. Choquetova hranice funkčního prostoru $\mathcal{H}$
Buď $\mathcal{H} \subset C([0,1])$ funkční prostor. Pak značíme

$$Ch_{\mathcal{H}}([0,1]) = \{x \in [0,1] : \mathcal{M}_x(\mathcal{H}) = \{\delta_x\}\}$$

a nazýváme tuto množinu *Choquetovou hranicí funkčního prostoru $\mathcal{H}$.*

Definice 3.5. Množina $\mathcal{H}$-afinních funkcí
Buď $\mathcal{H} \subset C[0,1]$ funkční prostor. Pak značíme

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \{f \in C([0,1]) : f(x) = \int\limits_{[0,1]} f d\mu \text{ pro každé } x \in [0,1] \text{ a } \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})\}$$

a nazýváme tuto množinu *množinou $\mathcal{H}$-afinních funkcí.*

Definice 3.6. Simpliciální prostory
Funkční podprostor $\mathcal{H} \subset C[0,1]$ nazveme *simpliciálním*, pokud pro každé $x \in [0,1]$ platí

$$\mathcal{M}_x(\mathcal{H}) = \{\varepsilon_x\}.$$

Nyní se nabízejí následující otázky: Jak vypadá Choquetova hranice prostorů M_Λ? Jak popsat množiny $\mathcal{A}(M_\Lambda)$? A konečně, jsou Müntzovy prostory simpliciální? Než se na tyto otázky pokusíme odpovědět, uveďme ještě několik pomocných vět a definic.

Definice 3.7. $\mathcal{H}$-exponovaný bod, funkce exponující bod
Buď $\mathcal{H} \subset C([0,1])$ funkční prostor. Potom bod $x \in [0,1]$ nazýváme *$\mathcal{H}$-exponovaným*, pokud existuje funkce $h \in \mathcal{H}$, pro kterou platí $h(x) = 0$ a $h(y) > 0$ pro $y \in [0,1] \setminus \{x\}$. Funkci h nazveme *funkcí exponující bod x.*

Věta 3.8. *Buď $\mathcal{H} \subset C([0,1])$ funkční prostor a $x \in [0,1]$ $\mathcal{H}$-exponovaný. Pak x leží v Choquetově hranici $\mathcal{H}$.*

Důkaz. Vezměme tedy $x \in [0,1]$ $\mathcal{H}$-exponovaný a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ libovolnou míru. Neboť x je $\mathcal{H}$-exponovaný, existuje funkce $h \in \mathcal{H}$ exponující bod x, tedy speciálně platí

$$0 = h(x) = \int\limits_{[0,1]} h d\mu. \tag{3.1}$$

Z toho už ovšem plyne, že $supt\mu = \{x\}$. Skutečně, předpokládejme pro spor, že množina $supt\mu \setminus \{x\}$ je neprázdná. Pak

$$\int\limits_{[0,1]} h d\mu = \int\limits_{supt\mu} h d\mu = \int\limits_{supt\mu \setminus \{x\}} h d\mu + h(x)\mu(\{x\}) = \int\limits_{supt\mu \setminus \{x\}} h d\mu > 0,$$

neboť funkce h je ostře kladná na $[0,1] \setminus \{x\}$ a μ je netriviální nezáporná míra. To je ovšem spor s rovností (3.1). Na druhou stranu, neboť μ je netriviální nezáporná míra, jejíž variace je rovna jedné, musí platit $supt\mu = \{x\}$ a $\mu(\{x\}) = 1$, neboli $\mu \equiv \delta_x$. Neboť jsme brali $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ libovolnou, dostáváme

$$\mathcal{M}_x(\mathcal{H}) = \{\delta_x\},$$

což je přesně to, co jsme chtěli dokázat. □

Existuje ještě následující charakterizace Choquetovy hranice (viz Bauer [16]). Tu sice přímo nevyužijeme, pro úplnost ji však uveďme.

Lemma 3.9. *Buď $\mathcal{H} \subset C([0,1])$ funkční prostor. Pak pro libovolnou funkci f spojitou na $[0,1]$ a libovolné $x \in [0,1]$ platí*

$$[f_*(x), f^*(x)] = \{ \int_{[0,1]} f d\mu : \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})\},$$

kde

$$f^* = \inf\{h \in \mathcal{H} : h \geq f\},$$
$$f_* = \sup\{h \in \mathcal{H} : h \leq f\}.$$

Důkaz. Na úvod důkazu si všimněme, že výrazy f^* a f_* dávají vždy smysl, neboť f je jakožto spojitá funkce na kompaktu omezená a $\mathcal{H}$ obsahuje konstanty. Přistupme k samotnému důkazu. Buď x libovolný pevně zvolený bod z $[0,1]$ a buď f libovolná pevně zvolená spojitá funkce na $[0,1]$.
Vol $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ a $h \in \mathcal{H}$, $h \geq f$. Potom

$$\int_{[0,1]} f d\mu \leq \int_{[0,1]} h d\mu = h(x),$$

a tedy zřejmě platí nerovnost $\int_{[0,1]} f d\mu \leq f^*(x)$. Analogicky vidíme, že pro $g \in \mathcal{H}$, $g \leq f$ platí

$$g(x) = \int_{[0,1]} g d\mu \leq \int_{[0,1]} f d\mu,$$

a tedy zároveň platí $f_*(x) \leq \int_{[0,1]} f d\mu$. Tím jsme dokázali jednu inkluzi.

Pro důkaz opačné inkluze volme opět pevně x libovolný bod $[0,1]$ a dále buď $\alpha \in [f_*(x), f^*(x)]$. Chceme najít $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ takovou, že $\int_{[0,1]} f d\mu = \alpha$. Definujme za tímto účelem zobrazení

$$p : C([0,1]) \mapsto \mathbb{R}$$
$$p(g) = g^*(x).$$

Prakticky ihned je vidět, že $p(h+g) \leq p(h)+p(g)$ pro každou dvojici spojitých funkcí h, g, a stejně tak $p(\beta \cdot g) = \beta p(g)$ pro každé $\beta \geq 0$. Je tedy p konvexní funkcionál na $C([0,1])$. Z Algebraické verze Hahn-Banachovy věty (2.5) plyne existence lineárního funkcionálu Φ na $C([0,1])$, pro který platí $\Phi \leq p$ na $C([0,1])$ a $\Phi = p$ na T, lineárním podprostoru $C([0,1])$ generovaném funkcí f, tedy speciálně $\Phi(f) = p(f) = \alpha$. Funkcionál Φ je však dokonce spojitý. To plyne z toho, že je omezený. Omezenost shora máme zaručenu, omezenost zdola dostaneme z následujího odhadu, který ukazuje, že Φ je dokonce nezáporný. Pro $g \in C([0,1])$ nezápornou totiž máme

$$-\Phi(-g) \geq -p(-g) = g_*(x) \geq 0.$$

Podle Rieszovy věty o representaci (2.6) pak ale existuje míra μ taková, že

$$\Phi(g) = \int_{[0,1]} g d\mu, \;\; g \in C([0,1]).$$

Pokud se nám podaří ukázat, že $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$, jsme hotovi. Volme tedy libovolnou funkci $h \in \mathcal{H}$. Pak platí následující nerovnosti

$$\int_{[0,1]} h d\mu = \Phi(h) \leq p(h) = h^*(x) = h(x)$$
$$\int_{[0,1]} -h d\mu = \Phi(-h) \leq p(-h) = (-h)^*(x) = -h_*(x) = -h(x),$$

a tedy platí $\int_{[0,1]} h d\mu = h(x)$ pro všechny h funkce z $\mathcal{H}$. Z nezápornosti Φ ihned dostáváme nezápornost μ. Chybí nám již pouze ukázat, že variace μ je rovna jedné. Neboť konstantní funkce leží v $\mathcal{H}$, podle právě dokázaného je $\int_{[0,1]} 1 d\mu = 1$. Je tedy μ prvkem $\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ a $\int_{[0,1]} f d\mu = \Phi(f) = \alpha$, což je přesně to, co jsme chtěli. □

Pozorování 3.10. Z definice Choquetovy hranice a právě dokázaného Lemmatu (3.9) okamžitě vyplývá následující vztah

$x \in Ch_{\mathcal{H}}([0,1])$ právě tehdy, když $\{f_*(x) = f^*(x), \text{ pro všechny } f \in C([0,1])\}$,

a to pro libovolný funkční prostor $\mathcal{H}$.

Nyní již přejdeme ke slíbenému popisu Choquetovy hranice Müntzových prostorů. Následující věta je původním autorovým výsledkem. Připomeňme ještě, že Müntzův prostor M_Λ je vždy funkčním prostorem.

Věta 3.11. *Choquetova hranice prostorů M_Λ*
Buď Λ nekonečná posloupnost navzájem různých kladných čísel a M_Λ buď příslušný Müntzův prostor. Potom všechny body intervalu $[0,1]$ jsou M_Λ-exponované. Speciálně platí $Ch_{M_\Lambda}([0,1]) = [0,1]$.

Důkaz. Dokážeme-li první část tvrzení, totiž že každý bod intervalu $[0,1]$ je M_Λ-exponovaný, pak z Věty (3.8) již ihned vyplývá druhá část tvrzení o Choquetově hranici M_Λ. Vyberme λ_1, λ_2 dva různé prvky posloupnosti Λ. Nechť kupříkladu $\lambda_2 > \lambda_1$. Funkce x^{λ_1} zřejmě exponuje bod 0, podobně funkce $1 - x^{\lambda_1}$ exponuje bod 1. Buď nyní $t \in (0,1)$ libovolný pevný bod. Chceme najít funkci z prostoru M_Λ exponující bod t. Položme

$$\phi(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} t^{(\lambda_1 - \lambda_2)} x^{\lambda_2} + (1 - x^{\lambda_1}) - (t^{\lambda_1}(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1) + 1).$$

Pak ϕ je zřejmě prvkem M_Λ, $\phi(t) = 0$ a navíc má ϕ v bodě t ostré globální minimum na intervalu $[0,1]$. Je tedy ϕ námi hledaná funkce exponující bod t. □

Důsledek 3.12. *Simplicialita Müntzových prostorů, tvar $\mathcal{A}(M_\Lambda)$*
Předcházející věta, kromě toho, že popisuje tvar Choquetovy hranice Müntzových prostorů, zároveň odpovídá na další dvě otázky položené na začátku této části. Z definice simpliciality ihned plyne, že každý Müntzův prostor M_Λ je simpliciální. Přímo z definice tak zároveň dostáváme, že

$$\mathcal{A}(M_\Lambda) = C([0,1]).$$

Výsledky Věty (3.11) a výše uvedeného důsledku bohužel nenaplnily autorova očekávání. Motivací pro vznik této části totiž byly následující věty, které ze znalosti simpliciality funkčních prostorů, tvaru Choquetovy hranice a množiny M_Λ-afinních funkcí odvozují některé zajímavé vlastnosti těchto prostorů. Právě dokázané výsledky však řadí Müntzovy prostory do skupiny těch funkčních prostorů, pro které tyto věty nepřinášejí žádné nové informace.

Věta 3.13. *Choquetova věta*
Buď $\mathcal{H}$ funkční prostor na metrizovatelném kompaktu K a $x \in K$. Potom $Ch_{\mathcal{H}}(K)$ je G_δ množina a existuje borelovská míra $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$, pro kterou $\mu(K \setminus Ch_{\mathcal{H}}(K)) = 0$.

Tuto známou větu lze nalézt kupříkladu v [17]. Pro Müntzovy prostory však neříká nic zajímavého. Neboť $Ch_{\mathcal{M}_\Lambda}([0,1]) = [0,1]$, můžeme pro libovolné $x \in [0,1]$ za hledanou míru vzít Diracovu míru δ_x.

Věta 3.14. *Charakteristika simpliciálních prostorů*
Nechť $\mathcal{H}$ je funkční prostor na metrizovatelném kompaktu K. Potom $\mathcal{H}$ je simpliciální právě tehdy, když je splněna následující podmínka: Kdykoli F je uzavřená podmnožina Choquetovy hranice $Ch_{\mathcal{H}}(K)$ a f je spojitá na F, existuje $h \in \mathcal{A}(H)$ tak, že $h = f$ na F, $max\{h(x) : x \in K\} = max\{f(x) : x \in F\}$ a $min\{h(x) : x \in K\} = min\{f(x) : x \in F\}$.

Tuto charakteristiku lze nalézt v [18]. Pro Müntzovy prostory se však tvrzení této věty redukuje na známou Tietzeho větu.

3.2 Striktní a uniformní konvexita, reflexivita Müntzových prostorů

Pojmy konvexity a reflexivity patří k základním pojmům studia geometrických vlastností Banachových prostorů. Uveďme nejprve definice a několik známých vět jako motivaci.

Definice 3.15. Extremální body
Řekneme, že bod x konvexní podmnožiny C Banachova prostoru X je jejím *extremálním bodem*, pokud platí

$$\text{je-li } x = \frac{a+b}{2}, \text{ kde } a, b \in C, \text{ pak } a = b.$$

Značíme $x \in ext\ C$.

Definice 3.16. Striktně konvexní Banachův prostor
Banachův prostor X nazýváme *striktně konvexním*, pokud každý bod jednotkové sféry S_X je extremálním bodem B_X.

Poznámka 3.17. Poznamenejme, že každý extremální bod B_X již musí ležet na sféře. Zřejmě $0 \notin ext\ B_X$. Pro $x \in B_X$, $||x|| < 1$, $x \neq 0$, pak existuje $\delta > 0$, že prvky $(1+\delta)x$, $(1-\delta)x$ leží v B_X. Potom můžeme psát

$$x = \frac{(1+\delta)x + (1-\delta)x}{2},$$

a tedy $x \notin ext\ B_X$.

Geometrická představa je zde zřejmá: Banachův prostor X je striktně konvexní, pokud na sféře S_X neleží nezdegenerovaná úsečka. Následující pozorování zodpovídá otázku striktní konvexity Müntzových prostorů.

Pozorování 3.18. Müntzovy prostory nejsou striktně konvexní
Mějme M_Λ Müntzův prostor, a buď $\lambda \in \Lambda$. Pak funkce x^λ, $2x^\lambda - 1$, 1 leží v B_{M_Λ}, přičemž

$$x^\lambda = \frac{(2x^\lambda - 1) + 1}{2}.$$

Vidíme tedy, že prostory M_Λ nejsou striktně konvexní.

Následující Clarksonova věta (viz Lukeš [19]) však říká, že na M_Λ, jakožto separabilním Banachově prostoru, lze zavést ekvivalentní norma, ve které je již M_Λ striktně konvexní.

Věta 3.19. *Clarksonova věta*
Pro každý separabilní Banachův prostor $(X, ||\cdot||_1)$ *existuje ekvivalentní norma* $||\cdot||_2$ *taková,* $(X, ||\cdot||_2)$ *je striktně konvexní.*

Uveďme nyní druhý pojem a to sice pojem uniformní konvexity.

Definice 3.20. Uniformně konvexní Banachův prostor
Banachův prostor X nazveme *uniformně konvexním*, pokud pro každé $\varepsilon \in (0, 2]$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x, y \in S_X$, $||x - y|| > \varepsilon$ platí $||\frac{1}{2}(x + y)|| \leq 1 - \delta$.

Je ihned vidět, že každý uniformně konvexní Banachův prostor je i striktně konvexní. Z Clarksonovy věty víme, že pro každý Müntzův prostor M_Λ lze nalézt ekvivalentní normu tak, že M_Λ vybavený touto normou je striktně konvexní. Nabízí se otázka, je-li možné vybavit tento prostor ekvivalentní normou tak, aby byl dokonce uniformně konvexní. Jako motivace může sloužit kupříkladu následující věta (viz Lukeš [20]).

Věta 3.21. *Buď* C *uzavřená konvexní neprázdná podmnožina uniformně konvexního prostoru* X. *Pak pro každé* $x \in X$ *existuje právě jedno* $c_x \in C$ *tak, že*

$$||x - c_x|| = dist(x, C).$$

Označme dále $P_C(x) = c_x$. *Pak* P_C *je spojitý operátor na prostoru* X.

Bohužel, odpověď na tuto otázku je, jak ukážeme, záporná. Podstatná při tom bude znalost reflexivity Müntzových prostorů. Začněme definicí a uveďme dále několik vět, které vzápětí využijeme.

Definice 3.22. Reflexivní Banachův prostor
Banachův prostor X nazýváme *reflexivním*, pokud zobrazení

$$\varepsilon : x \to \varepsilon_x$$

z prostoru X do prostoru X^{**} takové, že

$$\varepsilon_x(\phi) = \phi(x),\ \phi \in X^*,$$

je prosté, na X^{**} a

$$||\varepsilon_x||_{X^{**}} = ||x||_X,\ x \in X.$$

Existuje mnoho charakteristik reflexivity Banachových prostorů. My dále použijeme následující slavnou charakteristiku, kterou uvedeme bez důkazu. Ten lze najít kupříkladu v James [21].

Věta 3.23. *Jamesova charakteristika reflexivity*
Banachův prostor B je reflexivní právě tehdy, když pro každé ϕ prvek B^* duálního prostoru k B existuje x_ϕ prvek S_B tak, že

$$||\phi||_{B^*} = \phi(x_\phi).$$

Následující větu lze nalézt kupříkladu v Lukeš [22].

Věta 3.24. *Reflexivita isomorfních Banachových prostorů*
Jsou-li X a Y isomorfní Banachovy prostory a X je reflexivní, pak i Y je reflexivní.

Následující věta (viz Lukeš [23]) popisuje souvislost mezi uniformní konvexitou a reflexivitou Banachových prostorů.

Věta 3.25. *Reflexivita uniformně konvexních prostorů*
Každý uniformně Banachův prostor X je reflexivní.

Důkaz. Využijeme výše uvedenou Jamesovu charakteristiku. Ukážeme-li, že pro každé $\phi \in X^*$ existuje $x_\phi \in S_X$, že $\phi(x_\phi) = ||\phi||_{X^*}$, jsme hotovi. Zřejmě stačí uvažovat $\phi \in S_{X^*}$. Mějme tedy takové ϕ. Z definice normy na prostoru X^* plyne, že existuje posloupnost $\{x_n\} \subset S_X$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = 1.$$

Ukážeme-li, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská, jsme hotovi, neboť sféra S_X je uzavřená podmnožina úplného prostoru a ϕ je spojitý. Volme tedy $\varepsilon > 0$. Z definice uniformní konvexity plyne, že k tomuto ε existuje $\delta > 0$ tak, že $||x - y|| < \varepsilon$, pokud $x, y \in S_X$ a $||\frac{1}{2}(x + y)|| \geq 1 - \delta$. Z limitního chování posloupnosti $\phi(x_n)$ vidíme, že pro toto δ existuje n_0 tak, že

$$2 - 2\delta \leq \phi(x_m) + \phi(x_k) = \phi(x_m + x_k) \leq ||\phi||_{X^*}||x_m + x_k|| \leq ||x_m + x_k||$$

pro všechna $m, k \geq n_0$. Je tedy pro všechna taková m, k splněna nerovnost $||x_m - x_k|| < \varepsilon$. Existuje tedy $x \in S_X$ takový, že

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0,$$

a tedy $\phi(x) = 1$. $\square$

Následující původní autorův výsledek je hlavním výsledkem celé kapitoly. Odpovídá na otázku reflexivity Müntzových prostorů.

Věta 3.26. *Reflexivita Müntzových prostorů*
Buď $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ nekonečná posloupnost navzájem různých kladných reálných čísel splňující

$$M_\Lambda \subsetneq C([0,1]) \tag{3.2}$$

(neboli M_Λ je Müntzův prostor), pak M_Λ není reflexivní.

Důkaz. Vztah (3.2) je dle Věty (2.19) ekvivalentní s platností vztahu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{{\lambda_i}^2 + 1} \text{ konverguje.} \tag{3.3}$$

Vidíme tedy, že musí platit alespoň jedna z následujících rovností

$$\inf_i \lambda_i = 0,$$
$$\sup_i \lambda_i = \infty.$$

Skutečně, předpokládejme, že ani jedna z těchto rovností neplatí. Pak pro každé i přirozené platí

$$0 < \frac{\inf\limits_i \lambda_i}{(\sup\limits_i \lambda_i)^2 + 1} \leq \frac{\lambda_i}{{\lambda_i}^2 + 1},$$

což je ovšem spor s platností vztahu (3.3).
Přepokládejme tedy nejprve, že $\inf\limits_i \lambda_i = 0$. Existuje tedy $\{\lambda_{i_k}\}$ podposloupnost vybraná z Λ taková, že

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_{i_k} = 0.$$

Chceme ukázat, že pak M_Λ není reflexivní. Uvažujme následující operátor

$$T_0(\phi) = \frac{\int\limits_0^1 \phi(t)dt - \phi(0)}{2}, \ \phi \in M_\Lambda.$$

Pak T_0 je zřejmě lineární. Navíc je i spojitý, neboť platí následující odhad

$$|T_0(\phi)| \leq \frac{\int\limits_0^1 |\phi(t)|dt + |\phi(0)|}{2} \leq \frac{||\phi|| + \int\limits_0^1 ||\phi||dt}{2} = ||\phi||, \ \phi \in M_\Lambda.$$

Z právě uvedeného odhadu mimo jiné vidíme, že norma operátoru T_0 je menší nebo rovna jedné. Ukážeme, že je rovna jedné. Platí totiž

$$T_0(2x^{\lambda_{i_k}}-1)=\frac{\int_0^1(2t^{\lambda_{i_k}}-1)dt+1}{2}=\int_0^1 t^{\lambda_{i_k}}dt=\frac{1}{\lambda_{i_k}+1}.$$

A tedy

$$\lim_{k\to\infty}T_0(2x^{\lambda_{i_k}}-1)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda_{i_k}+1}=1.$$

Norma operátoru T_0 je tedy skutečně rovna jedné, neboť funkce $2x^{\lambda_{i_k}}-1$ leží v S_{M_Λ} pro všechna k. Operátor T_0 však na S_{M_Λ} nenabývá své normy. Skutečně, předpokládejme, že existuje $\phi_{T_0}\in S_{M_\Lambda}$ taková, že

$$|T_0(\phi_{T_0})|=1.$$

Neboť operátor T_0 je lineární, můžeme předpokládat, že $T_0(\phi_{T_0})=1$ (jinak bychom místo ϕ_{T_0} uvažovali $-\phi_{T_0}$). Je tedy

$$T_0(\phi_{T_0})=\frac{\int_0^1\phi_{T_0}(t)dt-\phi_{T_0}(0)}{2}=1.$$

Musí tedy být $\phi_{T_0}(0)=-1$ a $\int_0^1\phi_{T_0}(t)dt=1$ (zde využíváme toho, že $\phi_{T_0}\in S_{M_\Lambda}$). To ale znamená, že

$$\int_0^1(1-\phi_{T_0}(t))dt=0. \tag{3.4}$$

Funkce $1-\phi_{T_0}(t)$ je nezáporná a spojitá na $[0,1]$. Z předchozí rovnosti (3.4) tedy plyne, že je tato funkce na $[0,1]$ identicky nulová. Zároveň je ale $\phi_{T_0}(0)=-1$, což je spor.

Věnujme se nyní případu $\sup_i\lambda_i=\infty$. Budeme postupovat analogicky, jako v předchozím. Z Λ vybereme podposloupnost $\{\lambda_{i_l}\}$ takovou, že

$$\lim_{l\to\infty}\lambda_{i_l}=\infty$$

a definujeme operátor

$$T_\infty(\phi)=\frac{\phi(1)-\int_0^1\phi(t)dt}{2},\ \phi\in M_\Lambda.$$

Pak T_∞ je zřejmě lineární a spojitý, což vidíme z odhadu

$$|T_\infty(\phi)| \leq \frac{|\phi(1)| + \int_0^1 |\phi(t)|dt}{2} \leq \frac{||\phi|| + \int_0^1 ||\phi||dt}{2} = ||\phi||,\ \phi \in M_\Lambda.$$

Norma tohoto operátoru je rovna jedné, neboť

$$T_\infty(2x^{\lambda_i} - 1) = \frac{1 - \int_0^1 (2t^{\lambda_i} - 1)dt}{2} = 1 - \int_0^1 t^{\lambda_i} dt = 1 - \frac{1}{\lambda_i + 1},$$

a tedy

$$\lim_{l\to\infty} T_\infty(2x^{\lambda_{i_l}} - 1) = \lim_{l\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{i_l} + 1}\right) = 1.$$

Ani operátor T_∞ však na S_{M_Λ} nenabývá své normy. Předpokládejme, že existuje $\phi_{T_\infty} \in S_{M_\Lambda}$ tak, že $T_\infty(\phi_{T_\infty}) = 1$. Pak musí být $\phi_{T_\infty}(1) = 1$ a zároveň $\int_0^1 \phi_{T_\infty}(t)dt = -1$. Platí tedy

$$\int_0^1 (\phi_{T_\infty}(t) + 1)dt = 0. \tag{3.5}$$

Funkce $\phi_{T_\infty}(t)+1$ je nezáporná spojitá funkce na $[0, 1]$. Z rovnosti (3.5) plyne, že je tato na $[0, 1]$ identicky nulová. To je ale spor s tím, že $\phi_T(1) = 1$. Ukázali jsme tedy, že pro každou Λ nekonečnou posloupnost splňující podmínku (3.2) vždy existuje spojitý lineární operátor na M_Λ, který na S_{M_Λ} nenabývá své normy.
Z Jamesovy charakteristiky (3.23) tedy plyne, že M_Λ není reflexivní. $\square$

Nyní již můžeme odpovědět na otázku, lze-li na Müntzových prostorech zavést ekvivalentní normu tak, aby tyto byly uniformně konvexní. To zformulujeme jako samostatný výsledek.

Věta 3.27. *Nechť je Λ nekonečná posloupnost navzájem různých nezáporných reálných čísel taková, že M_Λ je Müntzův prostor (tedy vlastní uzavřený podprostor $C([0, 1])$). Pak na M_Λ nelze zavést ekvivalentní norma taková, aby M_Λ vybavený touto normou byl uniformně konvexní.*

Důkaz. Tvrzení již snadno vyplyne z uvedených výsledků. Předpokládejme pro spor, že na M_Λ taková ekvivalentní norma zavést jde. Značme ji $|| \cdot ||_1$.

Podle Věty (3.25) je tedy $(M_\Lambda, ||\cdot||_1)$ reflexivní. Dále prostory $(M_\Lambda, ||\cdot||)$ a $(M_\Lambda, ||\cdot||_1)$ jsou isomorfní. Hledaným isomorfismem je přitom identické zobrazení, což je zřejmé z ekvivalence norem $||\cdot||$ a $||\cdot||_1$. Z Věty (3.24) pak plyne, že i $(M_\Lambda, ||\cdot||)$ je reflexivní. To je ale spor s Větou (3.26). $\square$

Poznámka 3.28. Banachovy prostory, na kterých lze zavést ekvivalentní uniformně konvexní normu, jsou také v literatuře nazývány *superreflexivní*. Předchozí věta tedy říká, že Müntzovy prostory nejsou superreflexivní.

3.3 Müntzovy prostory a Radon-Nikodýmova vlastnost

Následujících několik definic budeme potřebovat k zadefinování pojmu *Radon-Nikodýmovy vlastnosti*, o které budeme následně hovořit v souvislosti s Müntzovými prostory.

Definice 3.29. Vektorová míra, totální variace vektorové míry, míra konečné variace
Mějme $(\Omega,\ \mathcal{S})$ měřitelný prostor a X Banachův prostor. *Vektorovou mírou* na $\mathcal{S}$ nazýváme zobrazení $F : \mathcal{S} \mapsto X$ pro něž $F(\emptyset) = 0$ a

$$F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} F(A_i),$$

kdykoli množiny $A_i \in \mathcal{S}$ jsou po dvou disjunktní. Konvergenci sumy na pravé straně rovnosti chápeme jako bezpodmínečnou konvergenci v normě prostoru X.

Pro F vektorovou míru definujeme $|F|(A)$ *totální variaci* množiny $A \in \mathcal{S}$ jako

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{k} ||F(A_i)|| : A_1, \dots, A_k \text{ z } \mathcal{S} \text{ jsou po dvou disjunktní, } \bigcup_{i=1}^{k} A_i = A\right\}.$$

Platí-li $|F|(\Omega) < \infty$ řekneme, že F má *konečnou variaci.*

Poznámka 3.30. Poznamenejme, že $|F|$ je vždy nezáporná míra na $\mathcal{S}$.

Definice 3.31. Absolutní spojitost vektorové míry
Buď X Banachův prostor, $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s konečnou reálnou mírou a buď $F : \Omega \mapsto X$ vektorová míra. Řekneme, že F je *absolutně spojitá* vzhledem k μ, jestliže je nezáporná míra $|F|$ absolutně spojitá vzhledem k μ, tedy platí-li $|F|(E) = 0$ pro každou $E \in \mathcal{S}$ takovou, že $\mu(E) = 0$.

Definice 3.32. Bochnerův integrál, měřitelná funkce
Buď $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s reálnou mírou splňující $\mu(\Omega) = 1$. Buď X Banachův prostor a $f : \Omega \mapsto X$ jednoduchá funkce, tedy funkce tvaru

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i},$$

kde $E_i \in \mathcal{S}$ jsou po dvou disjunktní a $x_i \in X$. Pak *Bochnerův integrál* funkce f definujeme jako

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(E_i),$$

přičemž hodnota na pravé straně rovnosti nezávisí na vyjádření funkce f. Funkci $f : \Omega \mapsto X$ nazveme *měřitelnou*, existuje-li $\{f_n\}$ posloupnost jednoduchých funkcí taková, že

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n, \ \mu\text{-skoro všude.}$$

Měřitelnou funkci nazýváme *bochnerovsky integrovatelnou*, existuje-li posloupnost jednoduchých funkcí $\{f_n\}$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} ||f - f_n|| d\mu = 0.$$

Je-li f bochnerovsky integrovatelná, pak vždy existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n d\mu$ pro každou $E \in \mathcal{S}$, přičemž tato limita nezávisí na volbě posloupnosti $\{f_n\}$. Tuto limitu nazýváme *Bochnerovým integrálem funkce f přes E* a značíme $\int\limits_E f d\mu$.

Nyní již můžeme přistoupit k definici Radon-Nikodýmovy vlastnosti.

Definice 3.33. Radon-Nikodýmova vlastnost
Řekneme, že Banachův prostor X má *Radon-Nikodýmovu vlastnost (RNP)*, pokud platí: kdykoli je $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s konečnou mírou a $\nu : \mathcal{S} \mapsto X$ je vektorová míra konečné variace, která je absolutně spojitá vůči μ, pak existuje bochnerovsky integrovatelná funkce $g : \Omega \mapsto X$ taková, že platí

$$\nu(E) = \int_E g \, d\mu, \ E \in \mathcal{S}.$$

Otázkou je, mají-li Müntzovy prostory Radon-Nikodýmovu vlastnost. Autorovi není znám výsledek, který by na tuto otázku odpovídal. V této sekci ukážeme, že existuje konkrétní typ Müntzových prostorů, které RNP nemají. Jedná se o *kvasilakunární Müntzovy prostory*. Uveďme jejich definici.

Definice 3.34. Kvasilakunární posloupnost, kvasilakunární Muntzův prostor
Ostře rostoucí posloupnost kladných čísel $\Lambda = \{\lambda i\}_{i=1}^{n}$ nazýváme *kvasilakunární*, existuje-li $\{i_l\}_{l=1}^{\infty}$ rostoucí podposloupnost indexů a $q > 1$ tak, že

$$\inf_l \frac{\lambda_{i_{l+1}}}{\lambda_{i_l}} \geq q$$

a zároveň

$$\sup_l(\lambda_{i_{l+1}} - \lambda_{i_l}) < \infty.$$

Müntzův prostor M_Λ nazveme *kvasilakunárním*, je-li Λ kvasilakunární posloupnost.

Podstatnou vlastnost kvasilakunárních Müntzových prostorů, kterou dále využijeme, popisuje následující věta, kterou je možno nalézt v [24].

Věta 3.35. *Každý kvasilakunární Müntzův prostor je isomorfní prostoru c_0.*

Tento výsledek podstatně využijeme při důkazů toho, že kvasilakunární Müntzovy prostory nemají RNP. Budeme však ještě potřebovat následující věty.

Věta 3.36. *Jsou-li X a Y isomorfní Banachovy prostory a X má RNP, potom i Y má RNP.*

Důkaz. Buď $T : X \mapsto Y$ isomorfismus. Buď $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s konečnou mírou a $\nu : \mathcal{S} \mapsto Y$ buď vektorová míra konečné variace absolutně spojitá vzhledem k μ. Chceme najít bochnerovsky integrovatelnou funkci $g : \Omega \mapsto Y$ tak, aby platilo

$$\nu(E) = \int_E g \, d\mu, \; E \in \mathcal{S}. \tag{3.6}$$

Definujme $\overline{\nu} : \mathcal{S} \mapsto X$ následujícím způsobem

$$\overline{\nu}(E) = T^{-1}(\nu(E)), \; E \in \mathcal{S}.$$

Tvrdíme, že $\overline{\nu}$ je vektorová míra. Skutečně, platí

$$\overline{\nu}(\emptyset) = T^{-1}(\nu(\emptyset)) = T^{-1}(0) = 0,$$

a zároveň

$$\begin{aligned} \overline{\nu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= T^{-1}\left(\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) = T^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\nu(A_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} T^{-1}(\nu(A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty}\overline{\nu}(A_i), \end{aligned}$$

kdykoli $A_i \in \mathcal{S}$ jsou po dvou disjunktní (zde jsme využili spojitost a linearitu zobrazení T^{-1} a fakt, že ν je vektorová míra). Neboť dle předpokladů X má RNP, existuje bochnerovsky integrovatelná funkce $h : \Omega \mapsto X$ splňující

$$\overline{\nu}(E) = \int_E h \, d\mu, \; E \in \mathcal{S}.$$

Tvrdíme, že potom $T \circ h : \Omega \mapsto Y$ je hledaná bochnerovsky integrovatelná funkce splňující vztah (3.6). Ukažme nejprve, že je bochnerovsky integrovatelná. Pokud je h jednoduchá, neboli tvaru

$$h = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i},$$

kde $x_i \in X$ a $E_i \in \mathcal{S}$ jsou po dvou disjunktní, pak je $T \circ h$ tvaru

$$T \circ h = \sum_{i=1}^{n} T(x_i) \chi_{E_i},$$

neboli jednoduchá funkce na Ω s hodnotami v Y, která je dle definice bochnerovsky integrovatelná. Zároveň si povšimněme, že v tomto případě pro $E \in \mathcal{S}$ libovolnou platí

$$T\left(\int_\Omega h \; d\mu\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mu(E_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i)\mu(E_i) = \int_\Omega (T \circ h) \; d\mu. \tag{3.7}$$

Je-li h obecná bochnerovsky integrovatelná funkce, pak dle definice existuje posloupnost $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ jednoduchých funkcí tak, že

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega ||h - h_n|| \; d\mu = 0.$$

Z právě uvedeného víme, že $T \circ h_n : \Omega \mapsto \mathcal{S}$ jsou jednoduché. Navíc

$$\left| \int_\Omega ||T \circ h - T \circ h_n|| \; d\mu \right| \leq \left| \int_\Omega ||T|| \cdot ||h - h_n|| \; d\mu \right|, \; n \in \mathbb{N},$$

z čehož plyne, že

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega ||T \circ h - T \circ h_n|| \; d\mu = 0.$$

Dle definice je tedy $T \circ h$ bochnerovsky integrovatelná. Navíc i pro obecnou h a $E \in \mathcal{S}$ platí

$$T\left(\int_\Omega h \; d\mu\right) = \int_\Omega (T \circ h) \; d\mu. \tag{3.8}$$

To plyne z následujícího. Výraz

$$\left\| T\left(\int\limits_{\Omega} h \, d\mu\right) - \int\limits_{\Omega} (T \circ h) \, d\mu \right\|$$

můžeme pro libovolné n přirozené odhadnout shora výrazem (využíváme rovnost (3.7) pro jednoduché funkce h_n)

$$\left\| T\left(\int\limits_{\Omega} (h - h_n) \, d\mu\right) \right\| + \left\| \int\limits_{\Omega} (T \circ h - T \circ h_n) \, d\mu \right\|,$$

který můžeme opět odhadnout shora výrazem

$$2||T|| \left(\left| \int\limits_{\Omega} ||h - h_n|| \, d\mu \right| \right).$$

Ze všech právě uvedených výsledků a definice $\overline{\nu}$ tedy pro libovolnou množinu $E \in \mathcal{S}$ plyne

$$\nu(E) = T(\overline{\nu}(E)) = T\left(\int\limits_{E} h \, d\mu\right) = \int\limits_{E} (T \circ h) \, d\mu,$$

což je přesně to, co jsme chtěli dokázat. □

Definice 3.37. Silně exponovaný bod
Buď C neprázdná konvexní podmnožina Banachova prostoru X. Řekneme, že $z \in C$ je *silně exponovaným bodem* množiny C, existuje-li $\phi \in X^*$ tak, že $\phi(z) > \phi(x)$ pro všechny body $x \in C \setminus \{z\}$ a zároveň $||z_n - z|| \overset{n\to\infty}{\to} 0$, kdykoli $z_n \in C$ a $\lim\limits_{n\to\infty} (\phi(z_n) - \phi(z)) = 0$.

Pozorování 3.38. Každý silně exponovaný bod neprázdné konvexní množiny C je jejím extremálním bodem. Skutečně, nechť z silně exponovaný bod množiny C není extremální. Existují tedy $z_1, z_2 \in C$ dva různé body v C tak, že $z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$. Potom ale pro každé $\psi \in X^*$ platí $\psi(z) = \frac{1}{2}(\psi(z_1) + \psi(z_2))$. Zřejmě tedy pro žádné ψ nemůže platit $\phi(z) > \phi(x)$ pro všechny $x \in C \setminus \{z\}$ a z tedy nemůže být silně exponovaným bodem, což je hledaný spor.

Lemma 3.39. *Jednotková koule v prostoru c_0 nemá extremální body.*

Důkaz. Dle Poznámky (3.17) stačí ukázat, že žádný bod ze sféry jednotkové koule není extremální. Volme tedy $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolný bod na sféře. Pak zřejmě existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $|a_{n_0}| < 1/2$. Definujme $a' = \{a'_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $a'' = \{a''_n\}_{n=1}^{\infty}$ body c_0 takto

$$\begin{aligned} a'_n &= a''_n = a_n,\ n \neq n_0, \\ a'_{n_0} &= a_{n_0} + 1/4, \\ a''_{n_0} &= a_{n_0} - 1/4. \end{aligned}$$

Pak a', a'' jsou zřejmě prvky B_{c_0} a platí

$$a = \frac{a' + a''}{2},$$

čímž jsme ukázali, že a není extremálním bodem B_{c_0}. □

Důsledek 3.40. *O silně exponovaných bodech B_{c_0}*
Z Pozorování (3.38) a předchozího lemmatu ihned plyne, že množina B_{c_0} nemá žádné silně exponované body.

Poslední větou, kterou budeme potřebovat je následující charakteristika prostorů s RNP, za kterou vděčíme R. R. Phelpsovi (viz [25]).

Věta 3.41. *Charakteristika prostorů s RNP pomocí silně exponovaných bodů Banachův prostor X má RNP právě tehdy, když každá neprázdná uzavřená omezená konvexní podmnožina X má alespoň jeden silně exponovaný bod.*

Nyní již můžeme uvést finální větu této kapitoly. Zde uvedený důkaz je autorův původní. Autor si není vědom toho, že by tento, či obecnější výsledek byl jinde publikován.

Věta 3.42. *Kvasilakunární Müntzovy prostory nemají Radon-Nikodýmovu vlastnost.*

Důkaz. Dle Věty (3.35) je každý kvasilakunární Müntzův prostor isomorfní prostoru c_0, dle Věty (3.36) tedy má Radon-Nikodýmovu vlastnost právě, když ji má prostor c_0. Dle Věty (3.41) a Důsledku (3.40) však c_0 RNP nemá, neboť B_{c_0} jakožto neprázdná uzavřená omezená konvexní podmnožina c_0 nemá žádný silně exponovaný bod. □

Jak už jsme zmínili, je otázka, mají-li jiné než kvasilakunární Müntzovy prostory Radon-Nikodýmovu vlastnost. V důkazu právě uvedené věty bylo podstatné tvrzení Věty (3.35). Jedním z problémů, které v [24] autoři uvádějí je, zda je možné z posloupnosti Λ, která není kvasilakunární, vybrat podposloupnost Λ' tak, aby prostor $M_{\Lambda'}$ byl isomorfní prostoru c_0. Není tedy ihned vidět, lze-li i pro jiné než kvasilakunární Müntzovy prostory analogicky dokázat, že nemají RNP. Kromě charakteristiky uvedené ve Větě (3.41) však existuje mnoho charakteristik prostorů s Radon-Nikodýmovou vlastností, které by mohly pomoci zodpovědět tuto otázku. Výčet některých těchto charakteristik lze nalézt v Lukeš [26].

Je známým faktem (viz Phillips [27]), že reflexivní prostory mají Radon-Nikodýmovu vlastnost. To bylo jednou z motivací autora ke studiu reflexivity Müntzových prostorů. Ve světle toho, že kvasilakunární Müntzovy prostory nemají RNP, je vidět, že tyto speciální Müntzovy prostory reflexivní být nemohou. Dle Věty (3.26) však dokonce žádné Müntzovy prostory nejsou reflexivní.

Kapitola 4

Některé otevřené problémy a další možnosti studia Müntzových prostorů

V této kapitoly zmíníme některé známe výsledky a otázky týkající se Müntzových prostorů. Jednou z klasických otázek studia geometrie Banachových prostorů je otázka isomorfních prostorů. V předchozí kapitole jsme se zabývali isomorfismem kvasilakunárních Müntzových prostorů. Následující výsledek, který lze najít ve Werner [28] lze aplikovat dokonce na Müntzovy prostory M_Λ, kde $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ splňuje tzv. *gap condition*, neboli

$$\inf_i (\lambda_i - \lambda_{i-1}) > 0.$$

Věta 4.1. *Buď X uzavřený podprostor $C([0,1])$ takový, že každá funkce $f \in X$ je spojitě diferencovatelná na intervalu $[0,1)$. Potom je X isomorfní podprostoru prostoru c_0.*

To, že na zmíněný typ Müntzových prostorů lze vztáhnout výsledek této věty vyplývá z Věty (2.23).

Nemůžeme na tomto místě nezmínit publikaci „*Geometry of Müntz spaces and related questions*“, z které jsme již citovali (viz [24]). Tato rozsáhlá publikace se zabývá mnoha vlastnostmi Müntzových prostorů, včetně zmíněné otázky isomorfních prostorů, a to jak pro Müntzovy prostory jakožto podprostory $C([0,1])$, tak pro Müntzovy prostory jakožto podprostory $L^p([0,1])$. Není možné zde vyjmenovat všechny problémy kterými se toto dílo zabývá, zmíníme se však o následujícím. Autoři publikace věnují mnoho prostoru problematice bází Müntzových prostorů. Základním pojmem tohoto jejich výzkumu je pojem Schauderovy báze.

Definice 4.2. Schauderova báze
Buď X Banachův prostor. Posloupnost $e = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ nazveme *Schauderovou bází* X, jestliže každé $x \in X$ lze jednoznačně vyjádřit následujícím způsobem

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i,\ a_i \in \mathbb{R},$$

přičemž konvergenci výrazu na pravé straně chápeme jako konvergenci v prostoru X.

Dlouho bylo otevřeným problémem, má-li každý separabilní Banachův prostor Schauderovu bázi. V roce 1973 matematik Per Enflo dokázal (viz [29]), že odpověď na tuto otázku je záporná. Jedním z důsledků Věty (3.35) je, že kvasilakunární Müntzovy prostory mají Schauderovu bázi. Autoři ale vzápětí uvádějí, že jim není známo, existuje-li ne-kvasilakunární Müntzův prostor, který Schauderovu bázi nemá. Zmiňují přitom domněnku B. Shekhtmana, podle něhož by příkladem takového Müntzova prostoru mohl být prostor M_Λ pro $\Lambda = \{i^2\}_{i=1}^{\infty}$. Podařilo-li by se tuto domněnku ověřit, byl by znám další příklad separabilního Banachova prostoru bez Schauderovy báze.
Dalším objektem zájmu může být problematika topologického doplňku Müntzových prostorů. Uveďme pro pořádek definici topologického doplňku.

Definice 4.3. Topologický součet a doplňek normovaného lineárního prostoru
Řekneme, že algebraický prostor W je *algebraickým součtem* podprostorů A, B (značíme $W = A \oplus B$), jestliže

$$A \cap B = \{0\} \text{ a } W = \{a + b :\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Definujeme dále projekce P_A a P_B předpisem

$$P_A(w) = w_A,\ P_B(w) = w_B,$$

pokud $w = w_A + w_B$, $w_A \in A$, $w_B \in B$. Je-li $W = A \oplus B$, pak B nazýváme *algebraickým doplňkem* A ve W. Konečně, je-li E normovaný lineární prostor, řekneme že E je *topologickým součtem* prostorů M a N, pokud $E = M \oplus N$ a projekce P_M a P_N jsou spojité. Je-li E topologickým součtem podprostorů M a N, pak N nazýváme *topologickým doplňkem* M v prostoru E.

V roce 1982 dokázal Newman (viz [30]) existenci Müntzova prostoru, který nemá topologický doplněk v prostoru $C([0,1])$. Tamtéž zároveň zmiňuje, že existuje Müntzův prostor, který v $C([0,1])$ topologický doplněk má. Relativně novým výsledkem (viz Al Alam [31]) je existence Müntzova prostoru, který nemá topologický doplněk v $L^1([0,1])$. Otevřeným problémem zůstává, lze-li nějakým způsobem charakterizovat posloupnosti Λ, pro které Müntzův prostor M_Λ má topologický doplněk ať už v $C([0,1])$, nebo v $L_1([0,1])$.

Další otázkou je, kdy (pokud vůbec někdy) mají Müntzovy prostory Krejn--Milmanovu vlastnost. Ta je definována následovně.

Definice 4.4. Krejn-Milmanova vlastnost (KMP)
Banachův prostor X má *Krejn-Milmanovu vlastnost*, pokud každá jeho omezená uzavřená konvexní neprázdná podmnožina má alespoň jeden extremální bod.

Jedním z důsledků toho, že Banachův prostor X má KMP je fakt, že pro každou jeho omezenou uzavřenou neprázdnou konvexní množinu C platí

$$C = \overline{co}(ext\ C),$$

neboli analogie známé Krejn-Milmanovy věty z funkcionální analýzy. Tento důsledek dokázal poprvé Lindenstrauss v [32]. Krejn-Milmanova vlastnost také souvisí s výše zmíněnou Radon-Nikodýmovou vlastností. Banachův prostor s Radon-Nikodýmovou vlastností totiž má Krejn-Milmanovu vlastnost. To dokázal opět Lindenstrauss. Důkaz je reprodukován v Phelps [25]. Úplné vyřešení charakteristiky KMP pro Müntzovy prostory by tedy mohlo pomoci při řešení otázky RNP pro tento typ prostorů. Autor se otázkou KMP pro Müntzovy prostory zabýval, narazil ale na obtíže. Porovnáme-li totiž případ Müntzových prostorů se situací v $C([0,1])$, narazíme na podstatný rozdíl.
K důkazu toho, že extremálními body jednotkové koule v prostoru $C([0,1])$ jsou pouze konstantní funkce -1 a 1 se podstatným způsobem využívá toho, že pro každé $x \in [0,1]$ a každé $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ existuje $g \in C([0,1])$ tak, že

1.) $0 < g < \delta$, na množině $\{y \in [0,1] : |y - x| < \varepsilon\}$,

2.) $g = 0$, na množině $\{z \in [0,1] : |z - x| \geq \varepsilon\}$.

To však pro Müntzovy prostory neplatí. Dle Věty (2.24) můžeme každou funkci z Müntzova prostoru rozšířit na funkci analytickou na množině obsahující interval $(0,1)$. Je-li tedy funkce $f \in M_\Lambda$ nulová na množině $N \subseteq [0,1]$, jejíž nějaký hromadný bod leží v $(0,1)$, pak je tato funkce nulová na celém intervalu $[0,1]$, což plyne ze známé věty reálné analýzy. Díky této vlastnosti nelze k určení extremálních bodů jednotkové koule B_{M_Λ} použít stejné metody jako v prostoru $C([0,1])$. Jako záchytný bod při dalším studiu by však mohlo posloužit následující autorovo lemma spolu s dalšími poznámkami.

Lemma 4.5. *Buď M_Λ Müntzův prostor. Položme*

$$\mathcal{T} = \{f \in S_{M_\Lambda} : 0 \leq f \,, f \neq 1\} \cup \{f \in S_{M_\Lambda} : f \leq 0 \,, f \neq -1\}.$$

Pak

$$\mathcal{T} \cap ext\ B_{M_\Lambda} = \emptyset.$$

Důkaz. Buď $f \in \mathcal{T}$, $f \geq 0$. Pak

$$f = \frac{(2f-1)+1}{2},$$

tedy $f \notin ext\ B_{M_\Lambda}$, neboť funkce $2f-1$ leží v B_{M_Λ}.

Obdobně pro $g \in \mathcal{T}$, $g \leq 0$ platí

$$g = \frac{(2g+1)-1}{2},$$

a opět $g \notin ext\ B_{M_\Lambda}$, neboť funkce $2g+1$ leží v B_{M_Λ}. □

Na druhou stranu ale neplatí

$$B_{M_\Lambda} \setminus \mathcal{T} = ext\ B_{M_\Lambda}.$$

Vezměme $\lambda \in \Lambda$ libovolné pevné. Pak funkce $1 - \frac{3}{2}x^\lambda$, $1 - 2x^\lambda$ i $1 - x^\lambda$ leží na jednotkové sféře S_{M_Λ}, $1 - \frac{3}{2}x^\lambda \in B_{M_\Lambda} \setminus \mathcal{T}$ a platí

$$1 - \frac{3}{2}x^\lambda = \frac{(1-2x^\lambda)+(1-x^\lambda)}{2},$$

a tedy $1-\frac{3}{2}x^\lambda \notin ext\ B_{M_\Lambda}$. Všimněme si, že pro tuto funkci platí $f(0) = ||f||_{sup}$. Bylo by zajímavé zjistit, jestli funkce z množiny

$$\{f \in S_{M_\Lambda} : |f(0)| < 1 \ \& \ |f(1)| < 1\}$$

již musí být extremálními body B_{M_Λ}, či nikoli, případně závisí-li to na volbě Λ. Autorovi se přes netriviální úsilí nepodařilo ukázat o některé funkci z této množiny, že není extremálním bodem B_{M_Λ}.

Připomeňme na závěr opět, že studium Müntzových prostorů se obecně neomezuje pouze na případ podprostorů prostoru $C([0,1]$. V sekci 2.2 této práce jsme uvedli analogii Müntzovy věty pro prostory $L^p([0,1])$. Dalším zobecněním tohoto přístupu je pak studium Müntzových prostorů jakožto podprostorů $L^1_\mu([0,1])$, tedy prostoru funkcí integrovatelných v absolutní hodnotě vůči konečné nezáporné borelovské míře μ na intervalu $[0,1]$. Více o této nové problematice lze nalézt v článku [33].

Literatura

[1] Rudin, W. [1966] „Real and Complex Analysis“, McGraw-Hill, New York.

[2] Pinkus, A. [2005] „Density in Approximation Theory“, Surveys in Approximation Theory 1

[3] Clarkson, J. A. and Erdös, P. [1943] „Approximation by polynomials“, Duke Math. J. 10, p.5-11

[4] Borwein, P. and Erdélyi, T. [1995] „Polynomials and polynomial inequalities“, Springer-Verlag, New York, Inc., p.172,204-205

[5] Erdélyi, T. and Johnson, W. [2001] „The Full Müntz theorem in $L^p([0,1])$ for $0 < p < \infty$“, Journal d´Analyse Math., p.145-172

[6] Borwein, P. and Erdélyi, T. [1995] „Polynomials and polynomial inequalities“, Springer-Verlag, New York, Inc., p.184,186

[7] Ha, Dzung [2006] „Functional analysis Volume 1: A gentle introduction“, Matrix Editions, p.432

[8] Ha, Dzung [2006] „Functional analysis Volume 1: A gentle introduction“, Matrix Editions, p.429-430

[9] Kolmogorov, A. N. [1938] „Une généralisation de l´inégalité de M. J. Hadamard entre les bornes supérieures des derivées successives d´une fonction“, Comptes Rendus, T. 207, p.764-765

[10] Almira, J. M. [2007] „Müntz type theorems I“, Surveys in Approximation Theory 3, p.171-174

[11] Newman, D. J. [1976] „Derivative bounds for Müntz polynomials“, Journal of Approximation theory 85, p.360-362

[12] Borwein, P. and Erdélyi, T. [1996] „Newman´s inequality for Müntz polynomials on positive intervals“, Journal of Approximation theory 85, p.132-139

[13] Almira, J. M. [2007] „Müntz type theorems I“, Surveys in Approximation Theory 3, p.175-177

[14] Borwein, P. and Erdélyi, T. [1995] „Polynomials and polynomial inequalities“, Springer-Verlag, New York, Inc., p.303

[15] Erdélyi, T. [2003] „The full Clarkson-Erdös-Schwartz theorem on the closure of non-dense Müntz spaces“, Studia Math. 155, p.145-152

[16] Bauer, H. [1978] „Approximation and abstract boundaries“, Amer. Math. monthly 85, p.638

[17] Lukeš, J., Malý, J., Netuka, I., Spurný, J [2010] „Integral representation theory, Applications to Convexity, Banach spaces and Potential theory“, Walter de Gruyter GmbH, Germany, p.68-69

[18] Lukeš, J., Malý, J., Netuka, I., Spurný, J [2010] „Integral representation theory, Applications to Convexity, Banach spaces and Potential theory“, Walter de Gruyter GmbH, Germany, p.180

[19] Lukeš, J. [2003] „Zápisky z funkcionální analýzy“, Karolinum Praha, Univerzita Karlova, p.173

[20] Lukeš, J. [2003] „Zápisky z funkcionální analýzy“, Karolinum Praha, Univerzita Karlova, p.169

[21] James, A. R. [1964] „Characterizations of reflexivity“, Studia Math. 23, p.205-216

[22] Lukeš, J. [2003] „Zápisky z funkcionální analýzy“, Karolinum Praha, Univerzita Karlova, p.202

[23] Lukeš, J. [2003] „Zápisky z funkcionální analýzy“, Karolinum Praha, Univerzita Karlova, p.170

[24] Gurariy, V., Lusky, W. [2005] „Geometry of Müntz spaces and related questions“, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, p.128-132

[25] Phelps, R. R. [1974] „Dentability and extreme points in Banach spaces“, J. Functional Analysis 16, p.78-90

[26] Lukeš, J. [2003] „Zápisky z funkcionální analýzy“, Karolinum Praha, Univerzita Karlova, p.178

[27] Phillips, R. S. [1940] „On linear transformations“, Trans. Amer. Math. Soc. 48, p.516-541

[28] Werner, D. „A remark about Müntz spaces“,
viz http://page.mi.fu-berlin.de/werner99/preprints/muentz.pdf

[29] Enflo, P. [1973] „A counterexample to the aproximation problem in Banach spaces“, Acta Mathematica 130, p.309-317

[30] Newman, D. J. [1984] „A Müntz space having no complement“, Journal of Approximation theory 40, p.351-354

[31] Al Alam, A. [2008] „A Müntz space having no complement in L^1“, Proc. Amer. Math. Soc. 136, p.193-201

[32] Lindenstrauss, J. [1966] „On extreme points in l_1“, Israel J. Math. 9, p.263-269

[33] Chalendar, I., Fricain, F., Timotin, D., [2010] „Embedding theorems for Müntz spaces“, viz http://arxiv.org/abs/1001.3013v1