

POSUDEK VEDOUCÍHO DIPLOMOVÉ PRÁCE

AUTOR: Rastislav Olhava

TITUL: Optimal pairs of function spaces for weighted Hardy operators

VEDOUcí PRÁCE: Luboš Pick

Sobolevovy (případně Poincaréovy) nerovnosti představují důležitou avšak poměrně obtížnou úlohu obsahující gradient skalární funkce několika proměnných. V průběhu posledních asi patnácti let došlo k vybudování teorie takzvaných redukčních vět, pomocí kterých je možné ekvivalentně převést Sobolevovo vnoření na nerovnost obsahující jednorozměrný integrální operátor. Tímto se původní úloha výrazně zjednoduší. Tyto metody byly uplatněny v několika konkrétních situacích; například pro eukleidovská Sobolevova vnoření na oblastech s iregulární hranicí nebo pro vnoření nad prostory se součinovou pravděpodobnostní mírou; mezi nejdůležitější příklady takových měr patří Gaussova míra na $\mathbb{R}^n$. V těchto případech má příslušný integrální operátor tvar po řadě

$$g \mapsto \int_t^1 g(s) s^\alpha \frac{ds}{s}, \quad \alpha > 0, \quad \text{nebo} \quad g \mapsto \int_t^1 g(s) |\log s|^{-\frac{1}{2}} \frac{ds}{s},$$

kde g je měřitelná funkce na $(0, 1)$ a $t \in (0, 1)$. Úkolem diplomanta bylo vybudovat příslušnou jednorozměrnou teorii pro operátor $g \mapsto \int_t^1 g(s) \varphi(s) \frac{ds}{s}$, kde φ je obecná rostoucí omezená funkce. Je totiž velmi pravděpodobné, že výše uvedenou metodu bude možné uplatnit i k jiným typům vnoření, a to jakmile bude pro ně znám příslušný isoperimetrický profil.

Diplomová práce má tři kapitoly. První kapitola má kompilační charakter a obsahuje základní informace z teorie Banachových prostorů funkcí a prostorů s normami invariantními vůči nerostoucímu přerovnání a základy teorie interpolací. V této kapitole nejsou uvedeny důkazy tvrzení s výjimkou Věty 1.22, jejíž tvrzení je sice též známo (je považováno za jakýsi folklor), přesný důkaz je však velice obtížné nalézt v literatuře. Druhá a třetí kapitola pak již obsahují vlastní výsledky diplomanta a jsou věnovány studiu po řadě Hardyova operátoru a supremálních operátorů. Hlavním výsledkem kapitoly 2 je konstrukce optimálního páru prostorů funkcí pro Hardyův operátor (Věta 2.10). Hlavním výsledkem kapitoly 3 je Věta 3.7, ve které diplomant našel postačující podmínku (B2) pro omezenost supremálního operátoru na prostorech funkcí s normou invariantní vůči nerostoucímu přerovnání. Metody použité v důkazech v kapitolách 2 a 3 jsou většinou analogiemi známých metod užitých v dřívějších pracích pro konkrétní funkci φ . V těch se ovšem nevyskytovala podmínka B2, protože ta byla zatím vždy automaticky splněna. Hlavní výsledky práce jsou v této obecnosti nové a mohly by být i užitečné. Zatím nejsou dost silné pro případnou publikaci, představují ale slibný základ pro další výzkum. Práce je sepsána poměrně pečlivě, vyskytuje se v ní poměrně málo nepřesností a nejsou příliš významné. Ke slabinám práce patří poněkud nedostatečný komentář o motivaci tohoto výzkumu a o souvislostech mezi látkou uvedenou v jednotlivých kapitolách.

Autor prokázal svou schopnost pochopit zadaný problém, zorientovat se v literatuře a samostatně vědecky pracovat. Jeho matematický projev je na solidní úrovni, umí své myšlenky přehledně a čtivě sepsat.

Domnívám se, že diplomová práce pana Olhavy splňuje požadavky kladené na diplomovou práci, a proto navrhuji, aby byla přijata k obhajobě.

V Praze 28. srpna 2011

Luboš Pick