Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

František Konopecký

Diferencovatelnost inverzního zobrazení

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D.

Studijní program: matematika

Studijní obor: matematická analýza

Praha 2011

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval především a hlavně *Stanislavu Henclovi*, vedoucímu své diplomové práce, který mě zasytil nejen matematickými poznatky a oporou při vypracovávání, ale i přátelským přístupem a důvěrou, jakou bych od jiných nedostal. Dále děkuji *Adamovi Rubalovi* a *Miroslavu Majerčíkovi* za vytvoření ideálních podmínek k vypracování práce, mamince *Zdeňce Konopecké* za nevídanou trpělivost během časů sepisování, bratrovi a tatínkovi *Ondřeji a Jaroslavu Přikrylovi* za posilování mé ne vždy pevné vůle. Nakonec chci poděkovat babičce a dědečkovi *Ludmile a Františku Konopeckým*, jejichž empatické vlny mi na dálku dodávaly potřebnou sílu.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... podpis

Název práce: Diferencovatelnost inverzního zobrazení

Autor: František Konopecký

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D., KMA MFF UK

Abstrakt: V práci dokazujeme výsledek, že pokud pro $k \in \mathbb{N}$ a $p \geq 1$ bilipschitzovské zobrazení f náleží do $W^{k+1,p}_{\text{loc}} \cap W^{k,\infty}_{\text{loc}}$, tak náleží do $W^{k+1,p}_{\text{loc}}$ i jeho inverze f^{-1}. Obdobné tvrzení dokazujeme i pro prostory BV_{loc}. K tomuto účelu je v práci vybudováno nové uspořádání n-tých parciálních derivací do zobecněné Jakobiho matice, díky níž můžeme vhodně derivovat matice. Zobecněná Jakobiho matice je navržena tak, aby bylo zachováno řetízkové pravidlo a bylo možné derivovat i součin matic.

Klíčová slova: Sobolevovy prostory, prostory BV, bilipschitzovské zobrazení.

Title: Differentiability of inverse mapping

Author: František Konopecký

Department: Department of mathematical analysis

Supervisor: doc. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D., KMA MFF UK

Abstract: Primary objective of the thesis is proof of the statement that if for $k \in \mathbb{N}$ a $p \geq 1$ a bilipschitz mapping f belongs to $W^{k+1,p}_{\text{loc}} \cap W^{k,\infty}_{\text{loc}}$ then also its inverse f^{-1} belongs to $W^{k+1,p}_{\text{loc}}$. We prove a similar statement also for spaces BV_{loc} . For this purpose we construct a new ordering of n-th partial derivatives to generalized Jacobian matrix. Thanks to this matrix we are able to differentiate matrices in an applicable way. Generalized Jacobian matrix is projected so that there still holds the Chain rule and, in some way, also rules for matrices product differentiation.

Keywords: Sobolev spaces, spaces of bounded variation, bilipschitz mapping.

Obsah

Úvod

Tato práce pojednává o vlastnostech bilipschitzovských zobrazení, specielně o jejich náležitosti do Sobolevových a BV prostorů. Cílem práce je důkaz následujících dvou vět. První je o Sobolevových prostorech.

Věta. *Nechť $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené, $k \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že $f : \Omega \xrightarrow{\text{na}} \Omega'$ je bilipschitzovské zobrazení takové, že $f \in W^{k+1,p}_{\text{loc}}\big(\Omega, \mathbb{R}^n\big) \cap W^{k,\infty}_{\text{loc}}\big(\Omega, \mathbb{R}^n\big)$. Potom i $f^{-1} \in W^{k+1,p}_{\text{loc}}\big(\Omega', \mathbb{R}^n\big)$.*

Druhá je analogií předchozí, ale pro BV prostory.

Věta. *Nechť $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené, $k \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že $f : \Omega \xrightarrow{\text{na}} \Omega'$ je bilipschitzovské zobrazení takové, že $D^k f \in BV_{\text{loc}}\big(\Omega, \mathbb{R}^{n^{k+1}}\big)$ a že $f \in W^{k,\infty}_{\text{loc}}\big(\Omega, \mathbb{R}^n\big)$. Potom i $D^k f^{-1} \in BV_{\text{loc}}\big(\Omega', \mathbb{R}^{n^{k+1}}\big)$.*

K důkazu obou vět používáme známá tvrzení, která jsou uvedena v první kapitole. Důkaz je založen především na vyšetření absolutní spojitosti na skoro všech úsečkách (u první věty) a na vyšetření konečné variace na skoro všech úsečkách (u druhé věty). K tomu je nutné několikanásobně zderivovat identitu

$$f \circ f^{-1}(x) = \text{id}(x).$$

Už od druhé derivace ale není zřejmé, jak bude zderivovaná $f \circ f^{-1}$ vypadat. Potřebovali bychom, aby platilo

$$\begin{aligned}
D\big(f \circ f^{-1}\big)(x) &= \Big((Df) \circ f^{-1}(x)\Big) \cdot Df^{-1}(x) \\
D\big((Df) \circ f^{-1}\big)(x) &= \Big((D^2 f) \circ f^{-1}(x)\Big) \cdot Df^{-1}(x) \\
&\vdots \\
D\big((D^{k-1} f) \circ f^{-1}\big)(x) &= \Big((D^k f) \circ f^{-1}(x)\Big) \cdot Df^{-1}(x).
\end{aligned}$$

Za tímto účelem je v druhé kapitole definována nová derivace $\widetilde{D}^k$, která n^k parciálních derivací řádu k uspořádává do matice $n^k \times n$ tak, abychom dosáhli předchozích vztahů při zachování klasického maticového násobení. Nové maticové uspořádání derivace tak vyhovuje řetízkovému pravidlu.

Kromě předchozích vztahů bylo také potřeba upravit (zderivovat) výraz

$$D\Big((Df) \circ f^{-1}(x) \cdot Df^{-1}(x)\Big).$$

To je součin maticových funkcí. Nová derivace $\widetilde{D}$ řeší i tento problém.

Pro matice funkcí $A(x)$ a $B(x)$ o rozměrech $r \times s$ a $s \times t$ v práci dokazujeme identitu

$$\widetilde{D}\big(AB\big) = \Theta\big(A, t\big) \cdot \widetilde{D}B + \Psi\big(B^T, r\big) \cdot \widetilde{D}A,$$

přičemž maticové funkce Θ a Ψ jen vhodně přeuspořádávají matice a zvětšují jejich rozměr.

Funkce $\Theta\big(A, t\big)$ zobrazuje matici A o rozměrech $r \times s$ na matici o rozměrech $rt \times st$, přičemž funkce Θ nahradí každý prvek a_{ij} v původní matici A blokem $a_{ij} \cdot E_t$. Funkce $\Psi\big(B^T, r\big)$ zobrazuje matici B^T o rozměrech $t \times s$ na matici o rozměrech $tr \times sr$, přičemž matice $\Psi\big(B^T, r\big)$ vznikne tak, že v matici E_r nahradíme všechny jedničky na diagonále maticemi B^T.

Nenulové členy matic $\Theta\big(A, t\big)$ a A jsou tím pádem totožné a totéž platí pro $\Psi\big(B^T, r\big)$ a B. Předchozí vlastnosti nové derivace umožňují dvojnásobnou derivací identity $f \circ f^{-1}(x) = \mathrm{id}(x)$ odvodit rovnost

$$\widetilde{D}^2 f^{-1}(x) = \; - \, \Theta\Big(\widetilde{D} f^{-1}(x), n\Big) \cdot \Psi\Big(\big(\widetilde{D} f^{-1}(x)\big)^T, n\Big) \cdot \widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(x)\big) \cdot \widetilde{D} f^{-1}(x),$$

která je klíčovou rovností v obou hlavních důkazech. Pro účely práce tuto nerovnost ještě $(k-2)$-krát derivujeme. Díky ní umíme odhadovat výrazy

$$\big\|\widetilde{D}^k f^{-1}(a) - \widetilde{D}^k f^{-1}(b)\big\|$$

pomocí výrazu

$$\big\|(\widetilde{D}^k f) \circ f^{-1}(a) - (\widetilde{D}^k f) \circ f^{-1}(b)\big\|.$$

Absolutní spojitost (resp. konečná variace) funkce $(\widetilde{D}^k f) \circ f^{-1}$ na úsečce se tak přenese i na funkci $\widetilde{D}^k f^{-1}$.

Ve druhé kapitole se dále za předchozími účely nachází lemmata ukazující odhady norem derivovaných matic. Ve třetí kapitole dokazujeme velmi specifická lemmata, která byla vyčleněna z důkazů hlavních vět. Práci uzavírají zmíněné dvě věty.

Z hlediska originality je část první kapitoly (definice, úmluvy a známá tvrzení) převzatá z obecně známých faktů nebo odborných publikací. Důkazy hlavních vět jsou inspirovány studijním textem [1] a případy $k = 1$ jsou vedeny přímo podle tohoto studijního textu. Zbytek práce (důkazy lemmat v první kapitole, kapitola druhá a třetí kapitola bez případů $k = 1$) je plně původní a vznikl přímo za účelem této práce.

Seznam zkratek a značení

Číselné množiny a prostory:

$\mathbb{N}, \mathbb{R};\ \mathbb{N}_0$	přirozená a reálná čísla; přirozená čísla s nulou
$\mathbb{R}^n$	euklidovský n-dimenzionální prostor nad tělesem reálných čísel
(a,b), $\langle a,b\rangle$	otevřený a uzavřený interval s krajními body $a, b \in \mathbb{R}$
$\{\dots\}$	množina zadaná výčtem prvků
$Q(c,r)$	otevřená krychle se středem v $c \in \mathbb{R}^n$ a poloměrem r: $(c_1 - r, c_1 + r) \times \dots \times (c_n - r, c_n + r)$
$Q_i(c,r)$	projekce krychle $Q(c,r)$ na nadrovinu kolmou na osu $\mathbf{x}_i$: $\pi_i\big(Q(c,r)\big)$
BV	prostor funkcí konečné variace (viz *Definice 1.6*)
$W^{k,p}$	Sobolevův prostor (viz *Definice 1.9*)
$\inf\limits_{x\in M}$, $\sup\limits_{x\in M}$	infimum/supremum přes množinu M
$\mathcal{L}_n$	Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^n$

Derivace: Nechť $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení.

$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i$	klasická parciální derivace funkce f_i podle j-té složky
Df	Jakobiho matice zobrazení f
$D^k f$	soubor k-tých parciálních derivací zobrazení f
D^α	distribuční parciální derivace z *Poznámky 1.8*
D_i	distribuční parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x_i}$
$\widetilde{D}^k f$	nová derivace uvedená v *Definici 2.3*
$D_a f$, $\widetilde{D}_a f$	hodnoty $Df(a)$ a $\widetilde{D}f(a)$

Značení spojené s maticemi: Nechť A je matice funkcí $a_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o rozměrech $r \times s$, zobrazení $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ a $x \in \mathbb{R}^n$.

E, E_n	jednotková matice, jednotková matice o rozměrech $n \times n$
$\|A(x)\|$	maximová norma matice $A(x)$
$\|A\|$	maximová norma matice $A(x)$ v bodě x uvedeném v kontextu okolního textu
$\|f(y)\|$	maximová norma vektoru $f(y)$, kde $y \in \mathbb{R}^m$
$\Psi(A,m)$	maticová funkce Ψ uvedená v *Definici 2.5*
$\Theta(A,m)$	maticová funkce Θ uvedená v *Definici 2.7*
$A \circ f$	složené zobrazení $A(f)$

Další značení:

$\pi_i(A)$	projekce množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ na nadrovinu kolmou k ose $\mathbf{x}_i$
$\pi_i^{-1}(y)$	přímka $\{y + t\mathbf{e}_i\}$ pro $t \in \mathbb{R}$ a $y \in Q^i(c,r)$
$\overset{\text{L2.20}}{=}$, $\overset{\text{T2.21}}{\leq}$	rovnost je podle Lemmatu 2.20, nerovnost podle Tvrzení 2.21
$C, \widetilde{C}, \widehat{C}, K, \widetilde{K}, \widehat{K}$	různé konstanty plynoucí z kontextu okolního textu
$C_{2.20}$	konstanta odhadu z Lemmatu 2.20
$C_i, C_m, C_{m=1}$	konstanta v případech $m = i$, m, $m = 1$

1. Použitá matematika

1.1. Definice, úmluvy a známá tvrzení

Kanonickou bázi $\mathbb{R}^n$ značíme $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Osy souřadnic označujeme $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Pro $x \in \mathbb{R}^n$ značí $x_1, \ldots, x_n$ souřadnice na osách, tedy $x = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$. Euklidovská vzdálenost bodů $x, y \in \mathbb{R}^n$ je značena $|x - y|$ a normu matice A píšeme jako $\|A\|$. V celé práci používáme maximovou normu.

Definice 1.1. (Maximová norma) *Nechť A je matice $r \times s$ nad tělesem reálných čísel, prvky matice nechť jsou a_{ij}, $i \leq r$, $j \leq s$.* Maximovou normu *matice A značíme $\|A\|$, tedy*

$$\|A\| = \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Jednotkovou matici značíme E, jednotkovou matici o rozměrech $n \times n$ značíme E_n.

Definice 1.2. (Jakobiho matice) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení. Při značení $f = (f_1, \ldots, f_m)$ nazýváme*

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m & \frac{\partial}{\partial x_2} f_m & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m \end{pmatrix}$$

Jakobiho maticí *zobrazení f. Pro $a \in \Omega$, kde existují všechny předchozí parciální derivace, značíme $D_a f = Df(a)$ hodnoty Jakobiho matice v bodě a.*

Následují dvě formulace řetízkového pravidla: základní a obecné. Lze je nalézt například v [3], sekce 2.9.

Tvrzení 1.3. (Řetízkové pravidlo – základní) *Nechť $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ jsou otevřené, nechť dále $f : \Omega' \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \to \Omega'$ jsou zobrazení a $j \in \{1, \ldots, k\}$. Předpokládejme, že v bodě $a \in \Omega$ existují parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x_j} g_i$ funkce g pro $i \in \{1, \ldots, n\}$ a že v bodě $g(a)$ existuje totální diferenciál funkce f. Potom v bodě a existuje i parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ g)$ a platí*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ g)(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\big(g(a)\big) \frac{\partial}{\partial x_j} g_i(a) \right).$$

Tvrzení 1.4. (Řetízkové pravidlo – obecné) *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ jsou zobrazení. Nechť v bodě $a \in \mathbb{R}^k$ existují všechny parciální derivace funkce g a nechť mají v bodě $g(a)$ všechny souřadnicové funkce $f_1, \ldots, f_m$ totální diferenciál. Potom existuje i $D_a(f \circ g)$ a platí*

$$D_a(f \circ g) = D_{g(a)}(f) \cdot D_a(g).$$

Definice 1.5. (Lischitzovské a bilipschitzovské zobrazení) *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Říkáme, že zobrazení* $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *je* Lipschitzovské, *pokud existuje konstanta* $K > 0$ *taková, že pro každou dvojici* $x, y \in \Omega$ *platí*

$$|F(x) - F(y)| \leq K|x - y|.$$

Zobrazení F *nazýváme* bilipschitzovské, *pokud* F *je bijekce a* F *i* F^{-1} *jsou Lipschitzovská zobrazení.*

V celé práci značí Ω, Ω' otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^n$.

Lebesgueova míra množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ je značena $\mathcal{L}_n(A)$. Lebesgueovy prostory na prostoru M značíme $L^p(M)$. Prostory nekonečně diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem definované na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ značíme $C_0^\infty(\Omega)$.

Definice 1.6. (Prostory BV) *Nechť je* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *otevřená a* $m \in \mathbb{N}$. *Funkce* $h \in L^1(\Omega)$ *patří do prostoru funkcí s konečnou variací (bounded variation), neboli* $h \in BV$, *pokud jsou parciální derivace (ve smyslu distribucí) Radonovými mírami s konečnou totální variací na* Ω*: existují Radonovy (znaménkové) míry* $\mu_1, \dots, \mu_n$ *definované na* Ω *takové, že pro* $i = 1, \dots, n$ *platí, že* $|\mu_i|(\Omega) < \infty$ *a že*

$$\int_\Omega h D_i \varphi \, \mathrm{d}x = - \int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}\mu_i$$

pro všechny funkce $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Říkáme, že funkce $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *náleží do prostoru* $BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *pokud náleží do* $BV(\Omega)$ *každá ze souřadnicových funkcí* f_i, *kde* $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Nakonec $f \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, *pokud pro každou otevřenou omezenou* $\Omega' \subset \Omega$ *platí* $f \in BV(\Omega', \mathbb{R}^m)$.

Definice 1.7. (Multiindex) *Říkáme, že uspořádaná* n*-tice*

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

je n*-dimenzionální multiindex, pokud* $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ *pro* $1 \leq i \leq n$. *Dále značíme* $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Poznámka 1.8. V následující definici značí

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Kdekoli jinde v celé práci značí $D^k f$ pro $k \in \mathbb{N}$ soubor všech k-tých parciálních derivací funkce (nebo zobrazení) f.

Slovním spojením „skoro všude na Ω existuje $D^k f$“ budeme mít všude v práci na mysli, že parciální derivace funkce f do řádu k existují skoro všude v Ω.

Slovním spojením „skoro všude na Ω existuje $D^k f$ jako totální diferenciál“ budeme mít všude v práci na mysli, že totální diferenciál souřadnicových funkcí funkce $D^{k-1} f$ existuje skoro všude v Ω.

Definice 1.9. (Sobolevovy prostory) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $k \geq 1$ a $p \geq 1$.* Sobolevův prostor $W^{k,p}(\Omega)$ *definujeme jako množinu všech funkcí $f \in L^p(\Omega)$ takových, že pro každý multiindex α s vlastností $|\alpha| \leq k$ náleží distribuční parciální derivace $D^\alpha f$ do $L^p(\Omega)$, neboli*

$$W^{k,p} = \big\{ f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ pro všechna } |\alpha| \leq k \big\}.$$

Říkáme, že zobrazení $f = (f_1, \dots, f_m)$ patří do $W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, pokud každá souřadnicová funkce $f_i \in W^{k,p}(\Omega)$ pro $1 \leq i \leq m$.

Nakonec $f \in W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, pokud pro každou otevřenou omezenou $\Omega' \subset \Omega$ platí $f \in W^{k,p}(\Omega', \mathbb{R}^m)$.

Tvrzení 1.10. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení, $k \in \mathbb{N}$ a $p \geq 1$ nebo $p = \infty$. Pokud $f \in W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, tak i $f \in W^{k-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.*

Poznámka 1.11. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení, $k \in \mathbb{N}$ a $p \geq 1$ nebo $p = \infty$. Potom $f \in W^{k,p}\big(\Omega, \mathbb{R}^m\big)$ právě když $f \in L^p\big(\Omega, \mathbb{R}^m\big)$ a $D^{k-1} f \in W^{1,p}\big(\Omega, \mathbb{R}^{m \cdot n^{k-1}}\big)$. Podobně $f \in W^{k,p}_{\mathrm{loc}}\big(\Omega, \mathbb{R}^m\big)$ právě když $f \in L^p_{\mathrm{loc}}\big(\Omega, \mathbb{R}^m\big)$ a $D^{k-1} f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}\big(\Omega, \mathbb{R}^{m \cdot n^{k-1}}\big)$.

Poznámka 1.12. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení. Pokud $Df \in BV\big(\Omega, \mathbb{R}^{m \cdot n}\big)$ a $f \in L^1\big(\Omega, \mathbb{R}^m\big)$, tak i $f \in W^{1,1}\big(\Omega, \mathbb{R}^m\big)$. Podobně pokud $Df \in BV_{\mathrm{loc}}\big(\Omega, \mathbb{R}^{m \cdot n}\big)$ a $f \in L^1_{\mathrm{loc}}\big(\Omega, \mathbb{R}^m\big)$, tak i $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}\big(\Omega, \mathbb{R}^m\big)$.

Definice 1.13. (Reprezentant funkce) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Funkce $h : \Omega \to \mathbb{R}^m$ se nazývá* reprezentant funkce *$g : \Omega \to \mathbb{R}^m$, pokud $h = g$ $\mathcal{L}_n$-skoro všude v Ω.*

Tvrzení 1.14. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení a platí $f \in W^{1,\infty}$. Potom existuje reprezentant f, který je Lipschitzovský v Ω.*

Tvrzení 1.15. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení Lipschitzovské v Ω. Potom existuje totální diferenciál funkce f skoro všude v Ω.*

Definice 1.16. (Konečná variace) *Nechť (a, b) je interval a A nějaká jeho podmnožina. Pro funkci $f : A \to \mathbb{R}^m$ definujeme*

$$V\big(f, A\big) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \big| f(a_i) - f(b_i) \big| : \begin{array}{l} (a_i, b_i) \text{ jsou po dvou disjunktní intervaly v } (a, b), \\ a_i, b_i \in A \end{array} \right\}.$$

Říkáme, že funkce f má konečnou (omezenou) variaci *na A, pokud $V(f, A) < \infty$.*

Definice 1.17. (Absolutní spojitost) *Nechť $A \subset (a, b)$ a $f : A \to \mathbb{R}$ je funkce. Říkáme, že f je* absolutně spojitá *na A, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že kdykoli vezmeme množinu po dvou disjunktních intervalů $\big\{(a_i, b_i)\big\}_{i=1}^{k}$ takových, že*

$$\bigcup_{i=1}^{k} (a_i, b_i) \subset (a, b), \qquad \sum_{i=1}^{k} |b_i - a_i| < \delta$$

a pro $i \in \{1, \dots, k\}$ je $a_i, b_i \in A$, tak platí

$$\sum_{i=1}^{k} \big|f(b_i) - f(a_i)\big| < \varepsilon.$$

Dále říkáme, že zobrazení $g = (g_1, \dots, g_m) : A \to \mathbb{R}^m$ je absolutně spojité, pokud jsou na A absolutně spojité souřadnicové funkce g_j pro $j \le m$.

Je dobře známo (viz například [2], oddíl 3.11), že zobrazení $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ je v prostoru $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ (resp. $BV_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$) právě když existuje reprezentant, který je absolutně spojitá funkce (resp. funkce s konečnou variací) na skoro všech přímkách rovnoběžných se soustavou souřadnic a její parciální derivace náleží do L^p (resp. integrál z variací je konečný).

Přesněji, nechť $i \in \{1, \dots, n\}$ a nechť π_i je projekce na nadrovinu kolmou k ose x_i. Předpokládejme, že

$$Q(c, r) := (c_1 - r, c_1 + r) \times \cdots \times (c_n - r, c_n + r) \subset \Omega$$

pro nějaké $c \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, a položme $Q^i(c, r) = \pi_i\big(Q(c, r)\big)$.

Věta 1.18. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Potom $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ právě když jsou splněny následující podmínky. Pro každou krychli $Q(c, r) \subset \Omega$ a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ existuje reprezentant $\tilde{u}$ funkce u takový, že funkce $\tilde{u}_{i,y}(t) := \tilde{u}(y + t\mathbf{e}_i)$ je absolutně spojitá na $(c_i - r, c_i + r)$ pro $\mathcal{L}_{n-1}$-skoro všechna $y \in Q^i(c, r)$ a navíc platí*

$$\int_{Q(c,r)} \|D\tilde{u}(y)\|^p dy < \infty. \tag{1.1}$$

Věta 1.19. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Potom $u \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ právě když jsou splněny následující podmínky. Pro každou krychli $Q(c, r) \subset \Omega$ a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ existuje reprezentant $\tilde{u}$ funkce u takový, že funkce $\tilde{u}_{i,y}(t) := \tilde{u}(y + t\mathbf{e}_i)$ má konečnou variaci na $(c_i - r, c_i + r)$ pro $\mathcal{L}_{n-1}$-skoro všechna $y \in Q^i(c, r)$ a navíc platí*

$$\int_{Q^i(c,r)} V\Big(\tilde{u}_{i,y}, (c_i - r, c_i + r)\Big) dy < \infty. \tag{1.2}$$

Následují další známá tvrzení, která lze nalézt například v [2] ve Větě 3.16 a Důsledku 3.19.

Věta 1.20. *Nechť $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené a nechť $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Předpokládejme, že $F : \Omega \to \Omega'$ je bilipschitzovské zobrazení a $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Potom*

$$u \circ F^{-1} \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega', \mathbb{R}^m).$$

a

$$D\big(u \circ F^{-1}\big)(y) = Du\big(F^{-1}(y)\big) \cdot DF^{-1}(y) \qquad \text{pro skoro všechna } y \in \Omega'.$$

Věta 1.21. *Nechť $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené a nechť $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Předpokládejme, že $F : \Omega \to \Omega'$ je Lipschitzovský homeomorfismus a že $u \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Potom $u \circ F^{-1} \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega', \mathbb{R}^m)$.*

1.2. Funkce AC nebo BV skoro všude

Lemma 1.22. *Nechť $A \subset (a, b)$, $\mathcal{L}_1(A) = |b - a|$. Nechť je dáno zobrazení $f : A \to \mathbb{R}^m$. Předpokládejme, že f je absolutně spojitá na A. Potom existuje rozšíření $\tilde{f} : (a, b) \to \mathbb{R}^m$ takové, že $\tilde{f} = f$ na A a $\tilde{f}$ je absolutně spojitá na (a, b).*

Důkaz. Lemma stačí ukázat pro $m = 1$, zobecnění je snadné. Nejdříve si zadefinujme funkci $\tilde{f}$. Zvolme $y \in (a, b)$. Pro každé

$$n \geq n_0 = \left\lceil \log_3\left(\max\left\{\tfrac{1}{b-y}, \tfrac{1}{y-a}\right\}\right) \right\rceil$$

nalezněme interval $\langle c_n, d_n \rangle \subset (a, b)$ takový, že

$$\begin{gathered} |d_n - c_n| < 3^{-n}, \qquad |d_n - y| > 3^{-n-1}, \qquad |c_n - y| > 3^{-n-1}, \\ y \in (c_n, d_n) \qquad \text{a} \qquad c_n, d_n \in A. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Díky volbě dostatečně velkého n_0 předchozí intervaly existují. Označme I_n interval

$$I_n = \left\langle \inf_{x \in A \cap (c_n, d_n)} \{f(x)\}, \sup_{x \in A \cap (c_n, d_n)} \{f(x)\} \right\rangle.$$

Z podmínek (1.3) plyne $(c_n, d_n) \supset (c_{n+1}, d_{n+1})$, díky čemuž $I_n \supset I_{n+1}$ pro každé $n \geq n_0$. Z absolutní spojitosti f na A dostáváme, že $\mathcal{L}_1(I_n) \to 0$ pro $n \to \infty$. Tudíž je $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ je uzavřený neprázdný interval délky nula a můžeme definovat

$$\tilde{f}(y) = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Z této konstrukce rovnou plyne i spojitost $\tilde{f}$ na (a, b) a rovnost $\tilde{f} = f$ na A.

Předpokládejme pro spor, že $\tilde{f}$ není absolutně spojitá na (a, b). Existuje tak $\varepsilon > 0$, že pro libovolné $\delta > 0$ existuje množina po dvou disjunktních intervalů $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{k}$ taková, že

$$(a_i, b_i) \subset (a, b), \qquad \sum_{i=1}^{k} |b_i - a_i| < \delta, \qquad a_i, b_i \in (a, b)$$

a

$$\sum_{i=1}^{k} \left|\tilde{f}(b_i) - \tilde{f}(a_i)\right| \geq \varepsilon.$$

Ze spojitosti funkce $\tilde{f}$ umíme najít uvnitř každého intervalu (a_i, b_i) interval (a'_i, b'_i) takový, že
$$\left|\tilde{f}(b_i) - \tilde{f}(a_i)\right| < 2 \cdot \left|\tilde{f}(b'_i) - \tilde{f}(a'_i)\right|$$
a
$$a'_i, b'_i \in A.$$
To znamená, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje množina po dvou disjunktních intervalů $\left\{(a'_i, b'_i)\right\}_{i=1}^{k}$ taková, že
$$(a'_i, b'_i) \subset (a,b), \qquad \sum_{i=1}^{k} |b'_i - a'_i| < \delta$$
a
$$\sum_{i=1}^{k}\left|f(b'_i) - f(a'_i)\right| = \sum_{i=1}^{k}\left|\tilde{f}(b'_i) - \tilde{f}(a'_i)\right| > \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{k}\left|\tilde{f}(b_i) - \tilde{f}(a_i)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2},$$
funkce f tedy není absolutně spojitá na A, spor. □

Poznámka 1.23. Následující lemma je velmi podobné předchozímu lemmatu, v důkazu postupujeme analogicky, proto ho povedeme zrychleně a důkladně provedeme pouze rozdílné části.

Lemma 1.24. *Nechť $A \subset (a,b)$, $\mathcal{L}_1(A) = |b-a|$. Nechť je dáno zobrazení $f : A \to \mathbb{R}^m$. Předpokládejme, že f má konečnou variaci na A. Potom existuje rozšíření $\tilde{f} : (a,b) \to \mathbb{R}^m$ takové, že $\tilde{f} = f$ na A a že má $\tilde{f}$ konečnou variaci na (a,b).*

Důkaz. Opět se omezíme na $m = 1$ a funkci $\tilde{f}$ definujeme pro $x \in (a,b)$ jako
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{y \to x_+ \\ y \in A}} f(y) & \text{pro } x \in (a,b) \backslash A, \\ f(x) & \text{pro } x \in A. \end{cases}$$
Nejdříve ukážeme, že je funkce dobře definována. Zvolme $x \in (a,b)\backslash A$. Zvolme posloupnost $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ takovou, že $c_i \in A$, $c_i > c_{i+1} > x$ a $\lim\limits_{i\to\infty} c_i = x$. Protože je variace $V(f, A)$ konečná, tak platí
$$\lim_{i\to\infty} V\big(f, (x, c_i) \cap A\big) = 0. \tag{1.4}$$
Z toho plyne, že je pro posloupnost $\left\{f(c_i)\right\}_{i=1}^{\infty}$ splněna Bolzano-Cauchyho podmínka, limita $\lim\limits_{i\to\infty} f(c_i)$ tedy konverguje a její hodnotu označme ω. Díky (1.4) pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pokud $x - c_i < \delta$, tak $|f(y) - \omega| < \varepsilon$ pro všechna $y \in (x, c_i) \cap A$. Limita $\lim\limits_{\substack{y \to x_+ \\ y \in A}} f(y)$ existuje pro každé zvolené x, funkce $\tilde{f}$ je tedy dobře definována.

Pro spor předpokládejme, že $\tilde{f}$ nemá na (a,b) konečnou variaci, tedy že pro každé $K \in \mathbb{R}$ existuje množina po dvou disjunktních intervalů $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^k \subset (a,b)$ taková, že

$$\sum_{i=1}^k \left|\tilde{f}(b_i) - \tilde{f}(a_i)\right| > K \qquad \text{a} \qquad a_i, b_i \in (a,b).$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je vždy $b_i \leq a_{i+1}$ (intervaly jsou seřazené). Pokud nyní $a_i \in A$, tak označíme $a_i' = a_i$. Podobně pokud $b_i \in A$, tak $b_i' = b_i$. V případě, že $a_i \notin A$, tak ze spojitosti funkce f zprava v bodě a_i (spojitost zprava v a_i plyne z definice funkce $\tilde{f}$ limitou zprava) existuje $a_i' \in A$ takové, že $a_i < a_i' < b_i$ a že

$$2 \cdot \left|\tilde{f}(b_i) - \tilde{f}(a_i')\right| > \left|\tilde{f}(b_i) - \tilde{f}(a_i)\right|.$$

V případě, že $b_i \notin A$, tak ze spojitosti funkce $\tilde{f}$ zprava v bodě b_i plyne, že existuje $b_i' \in A$ takové, že $b_i < b_i' < a_{i+1}'$ a že

$$2 \cdot \left|\tilde{f}(b_i') - \tilde{f}(a_i')\right| > \left|\tilde{f}(b_i) - \tilde{f}(a_i')\right|.$$

Platí tak, že $\{(a_i',b_i')\}_{i=1}^k$ jsou po dvou disjunktní intervaly, pro které navíc

$$a_i', b_i' \in A \qquad \text{a} \qquad 4 \cdot \left|\tilde{f}(b_i') - \tilde{f}(a_i')\right| > \left|\tilde{f}(b_i) - \tilde{f}(a_i)\right|.$$

Tím pádem pro ně platí

$$\sum_{i=1}^k \left|f(b_i') - f(a_i')\right| = \sum_{i=1}^k \left|\tilde{f}(b_i') - \tilde{f}(a_i')\right| > \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^k \left|\tilde{f}(b_i) - \tilde{f}(a_i)\right| > \frac{K}{4}$$

a to je spor s tím, že f má konečnou variaci na A. $\square$

2. Nové nástroje

V této části definujeme zobecněnou derivaci $\widetilde{D}$ a odvodíme pro ni důležité vztahy.

Nejdříve zafixujeme některé objekty, které budeme používat. Matice A, B nechť mají rozměry $r \times s$ a $s \times t$ a jejími prvky nechť jsou funkce $a_{ij}, b_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pod $A(x)$ budeme rozumět matici s hodnotami $a_{ij}(x)$, kde $x := (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Norma vektoru i matice $\|\cdot\|$ je všude maximová.

2.1. Definice a příklady použití nových pojmů

Nyní definice nových nástrojů. Všechny nástroje, které zde definujeme, poté umožní několikanásobně derivovat maticové funkce a složená zobrazení.

Následující funkce budou sloužit k obecnému popisu prvků matice (resp. jejich indexů).

Definice 2.1. *Nechť $a, b \in \mathbb{N}$. Modulátory* **modd** *a* **divv** *definujeme:*

$$\begin{aligned} a \operatorname{modd} b \; &:= (a-1 \mod b) + 1 && \text{(tj. zbytek po dělení braný z množiny } \{1,\ldots,b\}\text{)},\\ a \operatorname{divv} b \; &:= \left\lfloor \tfrac{a-1}{b} \right\rfloor + 1 && \text{(tj. posunuté celočíselné dělení).} \end{aligned}$$

Příklad 2.2. Ukázka vybraných hodnot:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} 1 \operatorname{modd} 3 &=& 1 & 1 \operatorname{divv} 3 &=& 1\\ 2 \operatorname{modd} 3 &=& 2 & 2 \operatorname{divv} 3 &=& 1\\ 3 \operatorname{modd} 3 &=& 3 & 3 \operatorname{divv} 3 &=& 1\\ 4 \operatorname{modd} 3 &=& 1 & 4 \operatorname{divv} 3 &=& 2\\ 5 \operatorname{modd} 3 &=& 2 & 5 \operatorname{divv} 3 &=& 2\\ & \vdots & & & \vdots & \end{array}$$

Nyní definujeme novou zvláštní derivaci. Jejím cílem je reprezentovat derivaci matice jako matici tak, abychom mohli derivovat i součin matic či používat řetízkové pravidlo.

Definice 2.3. *Derivací $\widetilde{D}A(x)$ budeme rozumět Jakobiho matici $D\tilde{a}$ zobrazení $\tilde{a} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{r \cdot s}$, kde*

$$\tilde{a}(x) = \big(\tilde{a}_1(x), \ldots, \tilde{a}_{r\cdot s}(x)\big),$$

a

$$\tilde{a}_i(x) = a_{(i \operatorname{divv} s)(i \operatorname{modd} s)}(x).$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\widetilde{D}^k A = \widetilde{D}(\widetilde{D}^{k-1} A) \qquad \text{a} \qquad \widetilde{D}^0 A = A.$$

Hodnotu matice funkcí $\widetilde{D}A$ v bodě $y \in \mathbb{R}^n$ značíme $\widetilde{D}_y A$ nebo $\widetilde{D}A(y)$. Dále říkáme, že $\widetilde{D}A$ má v bodě $y \in \mathbb{R}^n$ smysl, nebo že $\widetilde{D}_y A$ existuje, pokud existují všechny potřebné parciální derivace v $D_y\tilde{a}$.

Následují příklady pro nahlédnutí definovaných pojmů.

Příklad 2.4. Předpokládejme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ a $n = 3$.

Výrazy $\tilde{a}$ a $\widetilde{D}A$ mají pak podobu

$$\begin{aligned}
\tilde{a} &= (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4, \tilde{a}_5, \tilde{a}_6) \\
&= (a_{(1 \text{ divv } 2)(1 \text{ modd } 2)}, a_{(2 \text{ divv } 2)(2 \text{ modd } 2)}, \dots, a_{(6 \text{ divv } 2)(6 \text{ modd } 2)}) \\
&= (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32})
\end{aligned}$$

a

$$\widetilde{D}A = \begin{pmatrix}
\frac{\partial}{\partial x_1} a_{11} & \frac{\partial}{\partial x_2} a_{11} & \frac{\partial}{\partial x_3} a_{11} \\
\frac{\partial}{\partial x_1} a_{12} & \frac{\partial}{\partial x_2} a_{12} & \frac{\partial}{\partial x_3} a_{12} \\
\frac{\partial}{\partial x_1} a_{21} & \frac{\partial}{\partial x_2} a_{21} & \frac{\partial}{\partial x_3} a_{21} \\
\frac{\partial}{\partial x_1} a_{22} & \frac{\partial}{\partial x_2} a_{22} & \frac{\partial}{\partial x_3} a_{22} \\
\frac{\partial}{\partial x_1} a_{31} & \frac{\partial}{\partial x_2} a_{31} & \frac{\partial}{\partial x_3} a_{31} \\
\frac{\partial}{\partial x_1} a_{32} & \frac{\partial}{\partial x_2} a_{32} & \frac{\partial}{\partial x_3} a_{32}
\end{pmatrix}.$$

V následujícím zavedeme funkce Ψ a Θ, které zobrazují matice na rozšířené matice. Budou sloužit k vyjádření derivace součinu matic.

Definice 2.5. *Pro $p \in \mathbb{N}$ označme $\Psi(A, p)$ matici*

$$\begin{pmatrix} A & & & 0 \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A \end{pmatrix},$$

kde p udává počet bloků A.

Příklad 2.6. Uvažujme opět

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Pak je

$$\Psi(A, 2) = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\
a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\
0 & 0 & a_{21} & a_{22} \\
0 & 0 & a_{31} & a_{32}
\end{pmatrix}$$

Definice 2.7. *Buď $\Theta(A, p)$ matice, která vznikne z A, když každý její prvek a_{ij} nahradíme buňkou*

$$a_{ij} \cdot E_p = \begin{pmatrix}
a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\
0 & a_{ij} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a_{ij}
\end{pmatrix}.$$

Matice $\Theta(A, p)$ má rozměr $rp \times sp$.

Příklad 2.8. Nechť

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\Theta(C, 3) = \begin{pmatrix} 1 \cdot E_3 & 2 \cdot E_3 \\ 3 \cdot E_3 & 4 \cdot E_3 \\ 5 \cdot E_3 & 6 \cdot E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.2. Základní identity s funkcemi Θ a Ψ

Lemma 2.9. *Nechť A, B jsou matice $r \times s$ a $s \times t$, $m, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ a E_k je jednotková matice o velikosti $k \times k$. Potom platí*

$$\begin{array}{lrcl}
a) & \Theta(AB, m) & = & \Theta(A, m) \cdot \Theta(B, m), \\
b) & \Psi(AB, m) & = & \Psi(A, m) \cdot \Psi(B, m), \\
c) & \Theta(E_{m_1}, m_2) & = & E_{m_1 m_2}, \\
d) & \Psi(E_{m_1}, m_2) & = & E_{m_1 m_2}, \\
e) & \Theta\big(\Theta(A, m_1), m_2\big) & = & \Theta(A, m_1 m_2), \\
f) & \Psi\big(\Psi(A, m_1), m_2\big) & = & \Psi(A, m_1 m_2).
\end{array}$$

Důkaz. Ad a). Nejdříve ověříme rozměry: $\Theta(AB, m)$ má rozměr $rm \times tm$, $\Theta(A, m)$ je $rm \times sm$, $\Theta(B, m)$ je $sm \times tm$, takže dvě poslední můžeme vynásobit a navíc je jejich výsledný rozměr též $rm \times tm$. Nyní samotná rovnost:

$$\begin{aligned}
\Theta(AB, m) &= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{s} \big(a_{1i}b_{i1}\big) \cdot E_m & \dots & \sum\limits_{i=1}^{s} \big(a_{1i}b_{it}\big) \cdot E_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{s} \big(a_{ri}b_{i1}\big) \cdot E_m & \dots & \sum\limits_{i=1}^{s} \big(a_{ri}b_{it}\big) \cdot E_m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{s} \Big(a_{1i}b_{i1} \cdot E_m \cdot E_m\Big) & \dots & \sum\limits_{i=1}^{s} \Big(a_{1i}b_{it} \cdot E_m \cdot E_m\Big) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{s} \Big(a_{ri}b_{i1} \cdot E_m \cdot E_m\Big) & \dots & \sum\limits_{i=1}^{s} \Big(a_{ri}b_{it} \cdot E_m \cdot E_m\Big) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}E_m & \dots & a_{1s}E_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}E_m & \dots & a_{rs}E_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}E_m & \dots & b_{1t}E_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1}E_m & \dots & b_{st}E_m \end{pmatrix} \\
&= \Theta(A, m) \cdot \Theta(B, m).
\end{aligned}$$

Ad b). Pro rozměry platí totéž co v části a). Rovnost nahlédneme následovně.

$$\begin{aligned}
\Psi(AB, m) &= \begin{pmatrix} AB & & \\ & \ddots & \\ & & AB \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & & \\ & \ddots & \\ & & B \end{pmatrix} \\
&= \Psi(A, m) \cdot \Psi(B, m).
\end{aligned}$$

Ad c), d). $\Theta(E_{m_1}, m_2)$ je matice, která má pouze na diagonále přesně m_2 matic E_{m_1}, je tedy totožná s maticí $\Psi(E_{m_1}, m_2)$. Matice $\Psi(E_{m_1}, m_2)$ má pouze na diagonále jedničky, všude jinde nuly. Jedniček je $m_1 \cdot m_2$, proto je identická matici $E_{m_1 m_2}$.

Ad e). Z části c) pro každý prvek a_{ij} matice A dostáváme

$$\begin{aligned}
\Theta\big(\Theta(a_{ij}, m_1), m_2\big) &= a_{ij} \cdot \Theta\big(\Theta(1, m_1), m_2\big) = a_{ij} \cdot \Theta(E_{m_1}, m_2) \\
&= a_{ij} \cdot E_{m_1 m_2} = a_{ij} \cdot \Theta(1, m_1 m_2) = \Theta(a_{ij}, m_1 m_2).
\end{aligned}$$

Nahrazení prvku a_{ij} nejprve $a_{ij} \cdot E_{m_1}$ a pak nahrazení všech a_{ij} v $a_{ij} \cdot E_{m_1}$ maticemi $a_{ij} \cdot E_{m_2}$ je tedy stejné, jako jednorázové nahrazení prvotního a_{ij} rovnou maticí $a_{ij} \cdot E_{m_1 m_2}$.

Ad f). V $\Psi\big(\Psi(A, m_1), m_2\big)$ nejprve vezmeme matici, která bude mít na diagonále m_1 matic A a každou tuto A ještě nahradíme m_2 novými maticemi A. Vznikne nám tak matice s $m_1 m_2$ maticemi A na diagonále, což je matice $\Psi(A, m_1 m_2)$. $\square$

Poznámka 2.10. Pro matice $A_1, \ldots, A_k$ o rozměrech $p_1 \times p_2, \ldots, p_k \times p_{k+1}$ platí

$$\begin{aligned}(A_1 \cdots A_k)^T &= A_k^T \cdots A_1^T,\\ A_k^T (A_1 \cdots A_{k-1})^T &= (A_1 \cdots A_k)^T.\end{aligned}$$

Z předchozího Lemmatu díky tomu pro $m \in \mathbb{N}$ plyne

$$\Psi\big(A_k^T, m\big) \cdot \Psi\big((A_1 \cdots A_{k-1})^T, m\big) = \Psi\big((A_1 \cdots A_k)^T, m\big)$$

a

$$\Theta\big(A_k^T, m\big) \cdot \Theta\big((A_1 \cdots A_{k-1})^T, m\big) = \Theta\big((A_1 \cdots A_k)^T, m\big).$$

Poznámka 2.11. Z *Lemmatu 2.9*, vztahů a), b), c), d), navíc plyne, jak vypadá inverze k $\Theta(A, m)$ a $\Psi(A, m)$, $m \in \mathbb{N}$ (za předpokladu, že existuje A^{-1}):

$$\Theta(A, m) \cdot \Theta(A^{-1}, m) = \Psi(A, m) \cdot \Psi(A^{-1}, m) = E.$$

2.3. Důležité vlastnosti nové derivace $\widetilde{D}$

V této sekci uvádíme nejdůležitější vlastnosti nové derivace $\widetilde{D}$, které budeme využívat v dalším textu.

Poznámka 2.12. Pro zobrazení $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ platí $Df = \widetilde{D}f$, jelikož z definice $\widetilde{D}$ máme

$$f = (f_1, \ldots, f_n) = (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n) = \tilde{f}$$

a $\widetilde{D}f = D\tilde{f} = Df$ je tím pádem klasická *Jakobiho matice* zobrazení f.

Lemma 2.13. *(O derivaci součinu matic) Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená. Nechť A, B jsou matice $r \times s, s \times t$ funkcí $a_{im}, b_{mj} : \Omega \to \mathbb{R}$, kde $i \in \{1, \ldots, r\}$, $m \in \{1, \ldots, s\}$, $j \in \{1, \ldots, t\}$. Potom v každém $x \in \Omega$, kde existují všechny parciální derivace*

$$\frac{\partial}{\partial x_k} a_{im}(x) \quad \text{pro } 1 \le k \le n, 1 \le i \le r, 1 \le m \le s$$

a

$$\frac{\partial}{\partial x_k} b_{mj}(x) \quad \text{pro } 1 \le k \le n, 1 \le m \le s, 1 \le j \le t,$$

platí

$$\begin{aligned}\widetilde{D}\big(AB\big) &= \Theta\big(A, t\big) \cdot \widetilde{D}B + \Psi\big(B^T, r\big) \cdot \widetilde{D}A\\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot E_t & \ldots & a_{1s} \cdot E_t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} \cdot E_t & \ldots & a_{rs} \cdot E_t \end{pmatrix} \cdot \widetilde{D}B + \begin{pmatrix} B^T & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B^T \end{pmatrix} \cdot \widetilde{D}A.\end{aligned}$$

Důkaz. Označme $C = AB$, řádkové vektory matice C nechť jsou $c_1, \dots, c_r$, řádkové vektory matice A ať jsou $a_1, \dots, a_r$ a prvky matice C označme standartně c_{ij}. Matici $\widetilde{D}C$ lze zapsat

$$\widetilde{D}C = \begin{pmatrix} Dc_1 \\ Dc_2 \\ \vdots \\ Dc_r \end{pmatrix}.$$

Zvolme si z matice $\widetilde{D}C$ konkrétní blok Dc_R (tedy R-tý blok pro zvolené fixní $R \in \{1, \dots, r\}$). Ten má tvar

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} c_{R1} & \frac{\partial}{\partial x_2} c_{R1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} c_{R1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} c_{R2} & \frac{\partial}{\partial x_2} c_{R2} & & \frac{\partial}{\partial x_n} c_{R2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} c_{Rt} & \frac{\partial}{\partial x_2} c_{Rt} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} c_{Rt} \end{pmatrix},$$

přičemž pro $j \in \{1, \dots, t\}$ a $k \in \{1, \dots, n\}$ je

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} c_{Rj} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{m=1}^{s} a_{Rm} b_{mj} \\ &= \sum_{m=1}^{s} \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} a_{Rm} \Big) b_{mj} + \sum_{m=1}^{s} a_{Rm} \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} b_{mj} \Big). \end{aligned}$$

Matice Dc_R jde tak napsat jako součet matic

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{m=1}^{s} \big(\frac{\partial}{\partial x_1} a_{Rm} \big) b_{m1} & \dots & \sum\limits_{m=1}^{s} \big(\frac{\partial}{\partial x_n} a_{Rm} \big) b_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{m=1}^{s} \big(\frac{\partial}{\partial x_1} a_{Rm} \big) b_{mt} & \dots & \sum\limits_{m=1}^{s} \big(\frac{\partial}{\partial x_n} a_{Rm} \big) b_{mt} \end{pmatrix}$$

$$+$$

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{m=1}^{s} a_{Rm} \big(\frac{\partial}{\partial x_1} b_{m1} \big) & \dots & \sum\limits_{m=1}^{s} a_{Rm} \big(\frac{\partial}{\partial x_n} b_{m1} \big) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{m=1}^{s} a_{Rm} \big(\frac{\partial}{\partial x_1} b_{mt} \big) & \dots & \sum\limits_{m=1}^{s} a_{Rm} \big(\frac{\partial}{\partial x_n} b_{mt} \big) \end{pmatrix}.$$

První z nich vyjádříme součinem matic

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{s1} \\ b_{12} & b_{22} & & b_{s2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{1t} & b_{2t} & \dots & b_{st} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} a_{R1} & \frac{\partial}{\partial x_2} a_{R1} & \dots & a_{R1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} a_{R2} & \frac{\partial}{\partial x_2} a_{R2} & & a_{R2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} a_{Rs} & \frac{\partial}{\partial x_2} a_{Rs} & \dots & a_{Rs} \end{pmatrix} = B^T \cdot Da_R,$$

což je R-tý blok matice

$$\begin{pmatrix} B^T \cdot Da_1 \\ B^T \cdot Da_2 \\ \vdots \\ B^T \cdot Da_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^T & & & 0 \\ & B^T & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & B^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Da_1 \\ Da_2 \\ \vdots \\ Da_r \end{pmatrix} = \Psi\big(B^T, r\big) \cdot \widetilde{D}A.$$

Nyní k druhé matici. Číslo $\sum\limits_{m=1}^{s} a_{Rm}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\, b_{mj}\Big)$ vznikne skalárním součinem vektorů

$$(\overbrace{0,\dots,0}^{j-1\text{ nul}}, a_{R1}, \overbrace{0,\dots,0}^{t-1\text{ nul}}, a_{R2}, \overbrace{0,\dots,0}^{t-1\text{ nul}}, a_{R3}, 0,\dots,\dots,0, a_{Rs}, \overbrace{0,\dots 0}^{t-j\text{ nul}})$$

a

$$\tfrac{\partial}{\partial x_k}\,\tilde{b} = (\tfrac{\partial}{\partial x_k}\, b_{11}, \tfrac{\partial}{\partial x_k}\, b_{12}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_k}\, b_{1t}, \tfrac{\partial}{\partial x_k}\, b_{21}, \dots,\dots, \tfrac{\partial}{\partial x_k}\, b_{st}).$$

První z předchozích vektorů je j-tým řádkem $\Theta(a_R, t)$ a druhý vektor je k-tým sloupcem $\widetilde{D}B$. Druhou matici si proto vyjádříme následovně:

$$\begin{array}{ccc} \Theta(a_R, t) & & \widetilde{D}B \\ \begin{pmatrix} a_{R1} & 0 & \dots & 0 & \dots\dots & A_{Rs} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{R1} & & 0 & \dots\dots & 0 & A_{Rs} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \dots\dots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{R1} & \dots\dots & 0 & 0 & \dots & a_{Rs} \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} Db_1 \\ Db_2 \\ \vdots \\ Db_t \end{pmatrix} \end{array},$$

což je R-tý blok matice

$$\begin{pmatrix} \Theta(a_1, t) \\ \Theta(a_2, t) \\ \vdots \\ \Theta(a_R, t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Db_1 \\ Db_2 \\ \vdots \\ Db_t \end{pmatrix} = \Theta(A, t) \cdot \widetilde{D}B.$$

Dokázali jsme identitu pro každý R-tý blok $\widetilde{D}C$, platí tedy i pro celou $\widetilde{D}C$. □

Lemma 2.14. *(Zobecněná Jakobiho matice vyhovuje řetízkovému pravidlu) Nechť A je matice funkcí $a_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o rozměrech $r \times s$ a nechť funkce $b : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Předpokládejme, že pro $y \in \mathbb{R}^m$ má $\widetilde{D}_y b$ smysl (v bodě $y \in \mathbb{R}^m$ existují všechny parciální derivace funkce b) a že má každá funkce a_{ij} v bodě $b(y)$ totální diferenciál. Potom má smysl i $\widetilde{D}_y\big(A \circ b\big)$ a platí*

$$\widetilde{D}_y\big(A \circ b\big) = \widetilde{D}_{b(y)} A \cdot \widetilde{D}_y b.$$

Důkaz. Všechny následující rovnosti uvažujeme pro bod y, kde jsou splněny potřebné předpoklady. Prvek matice $\widetilde{D}(A \circ b)$ se souřadnicemi i, j, kde $i \in \{1, \dots, r \cdot s\}$ a $j \in \{1, \dots, m\}$, má podle řetízkového pravidla (*Tvrzení 1.3*) tvar:

$$\begin{aligned}
\text{prvek}_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{(i \text{ divv } s)(i \text{ modd } s)} \circ b \right) \\
&\overset{\text{T1.3}}{=} \sum_{p=1}^{n} \left(\left(\left(\tfrac{\partial}{\partial x_p} a_{(i \text{ divv } s)(i \text{ modd } s)} \right) \circ b \right) \cdot \tfrac{\partial}{\partial x_j} b_p \right).
\end{aligned}$$

Nyní dopočítáme tentýž prvek na druhé straně požadované rovnosti. i-tý řádek matice $(\widetilde{D}A) \circ b$ a j-tý sloupec matice $\widetilde{D}b$ jsou

$$\begin{aligned}
i\text{-tý ř.:}\ & \left(\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1} a_{(i \text{ divv } s)(i \text{ modd } s)} \right) \circ b, \quad \dots, \quad \left(\tfrac{\partial}{\partial x_n} a_{(i \text{ divv } s)(i \text{ modd } s)} \right) \circ b \right), \\
j\text{-tý sl.:}\ & \left(\tfrac{\partial}{\partial x_j} b_1, \qquad \dots, \qquad \tfrac{\partial}{\partial x_j} b_n \right).
\end{aligned}$$

Po jejich vynásobení dostaneme přesně prvek_{ij} z matice $\widetilde{D}(A \circ b)$. □

Lemma 2.15. *Nechť $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené, $p \geq 1$ a nechť A je matice funkcí $a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$. Předpokládejme, že $f : \Omega' \to \Omega$ je bilipschitzovské zobrazení a že všechna $a_{ij} \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$. Potom*

$$\widetilde{D}\big(A \circ f\big)(y) = \widetilde{D}A\big(f(y)\big) \cdot \widetilde{D}f(y) \qquad \textit{pro skoro všechna } y \in \Omega. \tag{2.1}$$

Důkaz. Toto Lemma je jen dodatkem k *Větě 1.20*, přičemž místo zobrazení u je v ní maticová funkce A a místo derivace D nová derivace $\widetilde{D}$. Označme $\tilde{a}$ jako v *Definici 2.3*. Potom je $\tilde{a} \in W^{1,p}$ a podle *Věty 1.20* pro skoro všechna $y \in \Omega$ platí

$$D\big(\tilde{a} \circ f\big)(y) = D\tilde{a}\big(f(y)\big) \cdot Df(y).$$

Z definice nové derivace máme

$$\begin{aligned}
D\big(\tilde{a} \circ f\big)(y) = \widetilde{D}\big(\tilde{a} \circ f\big)(y) = \widetilde{D}\big(A \circ f\big)(y), \\
D\tilde{a}\big(f(y)\big) = \widetilde{D}\tilde{a}\big(f(y)\big) = \widetilde{D}A\big(f(y)\big)
\end{aligned}$$

a

$$Df(y) = \widetilde{D}f(y),$$

takže platí i (2.1). □

Lemma 2.16. *Buďte $A_1, \dots, A_k$ matice funkcí $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o rozměrech $p_1 \times p_2, p_2 \times p_3, \dots, p_k \times p_{k+1}$, kde $k \geq 2$. Nechť $y \in \mathbb{R}^n$. Předpokládejme, že $\widetilde{D}A_i$ mají v y pro $i \in \{1, \dots, k\}$*

smysl (tj. v y existují všechny parciální derivace). Potom má smysl i $\widetilde{D}(A_1 \cdots A_k)$ a v y platí

$$\widetilde{D}(A_1 \cdots A_k) = \sum_{i=1}^{k} \Big(\Psi\big((A_{i+1} \cdots A_k)^T, p_1\big) \cdot \Theta\big(A_1 \cdots A_{i-1}, p_{i+1}\big) \cdot \widetilde{D}A_i \Big),$$

přičemž pro $i = 1$ pokládáme $A_1 \cdots A_{i-1} = E_{p_1}$ a pro $i = k$ pokládáme $A_{i+1} \cdots A_k = E_{p_{k+1}}$.

Důkaz. Všechny matice uvažujeme pro bod y. Postupujme indukcí. Pro $k = 2$ je

$$\begin{aligned}
L &= \widetilde{D}(A_1 A_2) \\
P &= \sum_{i=1}^{2} \Big(\Psi\big((A_{i+1} \cdots A_2)^T, p_1\big) \cdot \Theta\big(A_1 \cdots A_{i-1}, p_{i+1}\big) \cdot \widetilde{D}A_i \Big) \\
&= \Psi\big(A_2^T, p_1\big) \cdot \Theta\big(E_{p_1}, p_2\big) \cdot \widetilde{D}A_1 + \Psi\big(E_{p_3}, p_1\big) \cdot \Theta\big(A_2, p_3\big) \cdot \widetilde{D}A_2. \\
&= \Psi\big(A_2^T, p_1\big) \cdot E_{p_1 p_2} \cdot \widetilde{D}A_1 + E_{p_1 p_3} \cdot \Theta\big(A_2, p_3\big) \cdot \widetilde{D}A_2 \\
&= \Theta\big(A_2, p_3\big) \cdot \widetilde{D}A_2 + \Psi\big(A_2^T, p_1\big) \cdot \widetilde{D}A_1.
\end{aligned}$$

Rovnost $L = P$ platí podle již dokázaného *Lemmatu 2.13*. V prvním indukčním kroku tedy rovnost platí, předpokládejme, že platí pro nějaké $k_0 \geq 2$ a dokazujme ji pro $k = k_0 + 1$. Potom

$$\begin{aligned}
&\widetilde{D}\big(A_1 \cdots A_{k_0} A_{k_0+1}\big) \\
&\overset{\text{T2.13}}{=} \Theta\big(A_1 \cdots A_{k_0}, p_{k_0+2}\big) \cdot \widetilde{D}A_{k_0+1} \\
&\quad + \Psi\big(A_{k_0+1}^T, p_1\big) \cdot \widetilde{D}\big(A_1 \cdots A_{k_0}\big) \\
&= E_{p_1 p_{k_0+1}} \cdot \Theta\big(A_1 \cdots A_{k_0}, p_{k_0+2}\big) \cdot \widetilde{D}A_{k_0+1} \\
&\quad + \Psi\big(A_{k_0+1}^T, p_1\big) \cdot \sum_{i=1}^{k_0} \Big(\Psi\big((A_{i+1} \cdots A_{k_0})^T, p_1\big) \cdot \Theta\big(A_1 \cdots A_{i-1}, p_{i+1}\big) \cdot \widetilde{D}A_i \Big) \\
&\overset{\substack{\text{L2.9,} \\ \text{P2.10}}}{=} \Psi\big(E_{p_{k_0+1}}, p_1\big) \cdot \Theta\big(A_1 \cdots A_{k_0}, p_{k_0+2}\big) \cdot \widetilde{D}A_{k_0+1} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k_0} \Big(\Psi\big((A_{i+1} \cdots A_{k_0+1})^T, p_1\big) \cdot \Theta\big(A_1 \cdots A_{i-1}, p_{i+1}\big) \cdot \widetilde{D}A_i \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{k_0+1} \Big(\Psi\big((A_{i+1} \cdots A_{k_0+1})^T, p_1\big) \cdot \Theta\big(A_1 \cdots A_{i-1}, p_{i+1}\big) \cdot \widetilde{D}A_i \Big).
\end{aligned}$$

□

2.4. Vztahy s maximovou normou

Lemma 2.17. *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a matice A, B mají rozměry $r \times s$, $s \times t$. Potom platí*

$$\big\|\Theta(A,m)\big\| = \big\|A\big\| = \big\|\Psi(A,m)\big\| \qquad \text{a} \qquad \big\|AB\big\| \leq s \cdot \big\|A\big\| \cdot \big\|B\big\|.$$

Důkaz. Nenulové prvky matic A, $\Theta(A,m)$ a $\Psi(A,m)$ jsou totožné, proto mají i totožný největší prvek (v absolutní hodnotě), první rovnost je tedy zřejmá.

Označme $a_{\max}$, $b_{\max}$ maximální prvky matic A a B. Prvky matice AB (vyjádřené ve formě sumy) se pak dají odhadnout

$$\left|\sum_{k=1}^{s}\Big(a_{ik}b_{kj}\Big)\right| \leq s \cdot \big|a_{\max}b_{\max}\big| \leq s \cdot \big|a_{\max}\big| \cdot \big|b_{\max}\big| = s \cdot \big\|A\big\| \cdot \big\|B\big\|.$$

Každý prvek matice AB (tedy i ten maximální) je menší nebo roven výrazu $s \cdot \big\|A\big\| \cdot \big\|B\big\|$.
□

Poznámka 2.18. Nerovnost $\big\|A + A'\big\| \leq \big\|A\big\| + \big\|A'\big\|$ je trojúhelníková nerovnost pro normy.

2.5. Tvrzení o normě, funkcích a derivaci

Lemma 2.19. *Buď A matice funkcí $a_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $m, l \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Předpokládejme, že v x existují všechny l-té parciální derivace, tedy že má $D^l A(x)$ smysl. Potom v maximové normě $\| \cdot \|$ v bodě x platí*

$$\big\|\widetilde{D}^l\big(\Psi(A,m)\big)\big\| = \big\|\widetilde{D}^l\big(\Theta(A,m)\big)\big\| = \big\|\widetilde{D}^l A\big\|.$$

Důkaz. Nejdříve ukážeme případ $l = 1$. Řekněme, že rozměry matice A jsou $r \times s$. Pak možné nenulové členy matic

$$\widetilde{D}\big(\Psi(A,m)\big), \qquad \widetilde{D}\big(\Theta(A,m)\big), \qquad \widetilde{D}A$$

jsou právě

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\, a_{ij} \quad \text{ze všech kombinací} \quad \begin{cases} k & \in \{1,\dots,n\}, \\ i & \in \{1,\dots,r\}, \\ j & \in \{1,\dots,s\}. \end{cases}$$

Tím pádem jsou jejich maximové normy v bodě x, kde parciální derivace existují, shodné.

Shodné nenulové členy mají pro každé $l \geq 2$ i matice

$$\widetilde{D}^l\big(\Psi(A,m)\big), \qquad \widetilde{D}^l\big(\Theta(A,m)\big), \qquad \widetilde{D}^l A,$$

dokazovaná rovnost tak pro jejich normy platí ze stejného důvodu jako v případě $l = 1$.

□

Lemma 2.20. *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a nechť matice $A_1, \ldots, A_k$ jsou matice funkcí $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s rozměry $p_1 \times p_2, \ldots, p_k \times p_{k+1}$. Předpokládejme, že existuje neprázdná množina $M \subset \mathbb{R}^n$ taková, že pro každé $x \in M$ mají derivace $\widetilde{D}A_1(x), \ldots, \widetilde{D}A_k(x)$ smysl. Pak existuje konstanta $C > 0$ taková, že v každém $x \in M$ platí*

$$\left\|\widetilde{D}(A_1 \cdots A_k)\right\| \leq C \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\left\|\widetilde{D}A_i\right\| \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \|A_j\| \right).$$

Důkaz. Využijeme vzorec pro derivaci k matic.

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{D}(A_1 \cdots A_k)\right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{k} \left(\Psi\big((A_{i+1} \cdots A_k)^T, p_1\big) \cdot \Theta(A_1 \cdots A_{i-1}, p_{i+1}) \cdot \widetilde{D}A_i \right) \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \left\| \Psi\big((A_{i+1} \cdots A_k)^T, p_1\big) \cdot \Theta(A_1 \cdots A_{i-1}, p_{i+1}) \cdot \widetilde{D}A_i \right\|
\end{aligned}$$

Pro zafixované i je

$$\begin{aligned}
&\left\| \Psi\big((A_{i+1} \cdots A_k)^T, p_1\big) \cdot \Theta(A_1 \cdots A_{i-1}, p_{i+1}) \cdot \widetilde{D}A_i \right\| \leq \\
&\quad \leq p_1 p_{i+1} \cdot p_i p_{i+1} \cdot \left\| \Psi\big((A_{i+1} \cdots A_k)^T, p_1\big) \right\| \cdot \left\| \Theta(A_1 \cdots A_{i-1}, p_{i+1}) \right\| \cdot \left\| \widetilde{D}A_i \right\| \\
&\quad = p_1 p_{i+1} \cdot p_i p_{i+1} \cdot \left\| A_{i+1} \cdots A_k \right\| \cdot \left\| A_1 \cdots A_{i-1} \right\| \cdot \left\| \widetilde{D}A_i \right\| \\
&\quad \leq p_1 p_{i+1} \cdot \big(p_2 \cdots p_{k+1}\big) \cdot \Big(\|A_{i+1}\| \cdots \|A_k\| \Big) \cdot \Big(\|A_1\| \cdots \|A_{i-1}\| \Big) \cdot \left\| \widetilde{D}A_i \right\| \\
&\quad = C_i \cdot \left\| \widetilde{D}A_i \right\| \cdot \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{k} \|A_j\|.
\end{aligned}$$

Odtud už závěr

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{D}(A_1 \cdots A_k)\right\| &\leq \sum_{i=1}^{k} \left(C_i \cdot \left\|\widetilde{D}A_i\right\| \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \|A_j\| \right) \\
&\leq \max_i C_i \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\left\|\widetilde{D}A_i\right\| \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \|A_j\| \right) \\
&= C \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\left\|\widetilde{D}A_i\right\| \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \|A_j\| \right).
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 2.21. *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $l \in \mathbb{N}_0$. Nechť dále $A_1, \dots, A_k$ jsou matice funkcí $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o rozměrech $p_1 \times p_2, \dots, p_k \times p_{k+1}$. Nechť na nějaké neprázdné množině $M \subset \mathbb{R}^n$ existují všechny derivace $\widetilde{D}^l A_1, \dots, \widetilde{D}^l A_k$. Pak existuje konstanta $C > 0$ taková, že v každém $x \in M$ platí*

$$\big\|\widetilde{D}^l(A_1 \cdots A_k)\big\| \le C \cdot \sum_{\sum \alpha_i = l} \prod_{j=1}^{k} \big\|\widetilde{D}^{\alpha_j} A_j\big\|,$$

přičemž v sumě sčítáme přes všechny kombinace nezáporných celých čísel $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, jejichž součet je l (tedy přes všechny multiindexy $|\alpha| = l$).

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí. Pro $l = 0$ platí nerovnost triviálně díky $\|AB\| \le s \cdot \|A\| \cdot \|B\|$. Případ $l = 1$ plyne z předchozího lemmatu.

Předpokládejme, že Lemma platí pro $l = 0, \dots, l_0$ pro různá $k, p_i \in \mathbb{N}$. Dokážeme ho pro $l = l_0 + 1$. Platí

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{D}^{l_0+1}(A_1 \cdots A_k)\right\| &= \left\|\widetilde{D}^{l_0}\big(\widetilde{D}(A_1 \cdots A_k)\big)\right\| \\
&\overset{\text{L2.16}}{=} \left\|\widetilde{D}^{l_0}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\Psi\big((A_{i+1} \cdots A_k)^T, p_1\big) \cdot \Theta(A_1 \cdots A_{i-1}, p_{i+1}) \cdot \widetilde{D}A_i\right)\right)\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{k} \widetilde{D}^{l_0}\left(\Psi\big((A_{i+1} \cdots A_k)^T, p_1\big) \cdot \Theta(A_1 \cdots A_{i-1}, p_{i+1}) \cdot \widetilde{D}A_i\right)\right\| \\
&\le \sum_{i=1}^{k}\left\|\widetilde{D}^{l_0}\left(\Psi\big((A_{i+1} \cdots A_k)^T, p_1\big) \cdot \Theta(A_1 \cdots A_{i-1}, p_{i+1}) \cdot \widetilde{D}A_i\right)\right\|.
\end{aligned}$$

Zafixujme $i \in \{1, \dots, k\}$ a pro přehlednější zápis označme

$$\begin{aligned}
B_1 &= \Psi\big((A_{i+1} \cdots A_k)^T, p_1\big), \\
B_2 &= \Theta(A_1 \cdots A_{i-1}, p_{i+1}), \\
B_3 &= \widetilde{D}A_i, \\
B_4 &= A_{i+1} \cdots A_k, \\
B_5 &= A_1 \cdots A_{i-1}.
\end{aligned}$$

Z indukčního předpokladu dostáváme, že existuje konstanta C_i taková, že

$$\big\|\widetilde{D}^{l_0}(B_1 B_2 B_3)\big\| \le C_i \cdot \sum_{\sum_{i'=1}^{3} \beta_{i'} = l_0} \prod_{j=1}^{3} \big\|\widetilde{D}^{\beta_j} B_j\big\|.$$

Teď použijeme

$$\begin{aligned}
\big\|\widetilde{D}^{\beta_1} B_1\big\| &= \big\|\widetilde{D}^{\beta_1} \Psi\big(B_4^T, p_1\big)\big\| = \big\|\widetilde{D}^{\beta_1} B_4\big\|, \\
\big\|\widetilde{D}^{\beta_2} B_2\big\| &= \big\|\widetilde{D}^{\beta_2} \Theta(B_5, p_{i+1})\big\| = \big\|\widetilde{D}^{\beta_2} B_5\big\|.
\end{aligned}$$

Za β_4 resp. β_5 bereme následujícím zápise hodnoty β_1 resp. β_2. Dostaneme tak

$$
\begin{aligned}
\left\|\widetilde{D}^{l_0}(B_1 B_2 B_3)\right\| &\leq C_i \cdot \sum_{\sum_{i'=1}^{3} \beta_{i'} = l_0} \prod_{j=3}^{5} \left\|\widetilde{D}^{\beta_j} B_j\right\| \\
&= C_i \cdot \sum_{\sum_{i'=1}^{3} \beta_{i'} = l_0} \Big(\left\|\widetilde{D}^{\beta_3}(\widetilde{D} A_i)\right\| \cdot \left\|\widetilde{D}^{\beta_1}(A_{i+1} \cdots A_k)\right\| \cdot \left\|\widetilde{D}^{\beta_2}(A_1 \cdots A_{i-1})\right\| \Big).
\end{aligned}
$$

Opět dvakrát použijeme indukční předpoklad, tentokrát s $l = \beta_1$ a $l = \beta_2$. První nerovnost platí za podmínky $i \neq k$, druhá nerovnost za podmínky $i \neq 1$:

$$
\begin{aligned}
\left\|\widetilde{D}^{\beta_1}(A_{i+1} \cdots A_k)\right\| &\leq C^1_{i,\beta_1} \cdot \sum_{\sum_{i<m\leq k} \alpha_m = \beta_1} \prod_{j=i+1}^{k} \left\|\widetilde{D}^{\alpha_j} A_j\right\|, \\
\left\|\widetilde{D}^{\beta_2}(A_1 \cdots A_{i-1})\right\| &\leq C^2_{i,\beta_2} \cdot \sum_{\sum_{1\leq m< i} \alpha_m = \beta_2} \prod_{j=1}^{i-1} \left\|\widetilde{D}^{\alpha_j} A_j\right\|.
\end{aligned}
$$

Konstanty C_i, C^1_{i,β_1}, C^2_{i,β_2} jsou závislé na i, l, β a rozměrech matic. Jsou ale nezávislé na hodnotách uvnitř matic, což je to, co potřebujeme.

Pro $(i \neq 1)$ a $(i \neq k)$ přepíšeme součin sum

$$
\begin{aligned}
&\left\|\widetilde{D}^{\beta_1}(A_{i+1} \cdots A_k)\right\| \cdot \left\|\widetilde{D}^{\beta_2}(A_1 \cdots A_{i-1})\right\| \leq \\
&\qquad \leq C^1_{i,\beta_1} C^2_{i,\beta_2} \cdot \Bigg(\sum_{\sum_{i<m\leq k} \alpha_m = \beta_1} \prod_{j=i+1}^{k} \left\|\widetilde{D}^{\alpha_j} A_j\right\| \Bigg) \cdot \Bigg(\sum_{\sum_{1\leq m<i} \alpha_m = \beta_2} \prod_{j=1}^{i-1} \left\|\widetilde{D}^{\alpha_j} A_j\right\| \Bigg) \\
&\qquad = C^1_{i,\beta_1} C^2_{i,\beta_2} \cdot \sum_{\substack{\sum_{m>i} \alpha_m = \beta_1 \\ \sum_{m<i} \alpha_m = \beta_2}} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} \left\|\widetilde{D}^{\alpha_j} A_j\right\|.
\end{aligned}
$$

V případech $i = 1$ a $i = k$ platí nerovnost

$$\left\|\widetilde{D}^{\beta_1}(A_{i+1}\cdots A_k)\right\| \cdot \left\|\widetilde{D}^{\beta_2}(A_1\cdots A_{i-1})\right\| \leq C^1_{i,\beta_1} C^2_{i,\beta_2} \cdot \sum_{\substack{\sum\limits_{m>i} \alpha_m = \beta_1 \\ \sum\limits_{m<i} \alpha_m = \beta_2}} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} \left\|\widetilde{D}^{\alpha_j} A_j\right\|$$

také, musíme ji ale oddiskutovat jinak. Možnosti jsou:

- $(\beta_2 = 0)$ & $(i = 1)$:
  Použijeme $C^2_{1,0} = 1$ a $\left\|\widetilde{D}^0(A_1\cdots A_{i-1})\right\| = \|E_{p_1}\| = 1$.
- $(\beta_2 > 0)$ & $(i = 1)$:
  Použijeme $C^2_{1,\beta_2} = 0$ a $\left\|\widetilde{D}(A_1\cdots A_{i-1})\right\| = \|\widetilde{D}(E_{p_1})\| = 0$.
- $(\beta_1 = 0)$ & $(i = k)$:
  Použijeme $C^1_{k,0} = 1$ a $\left\|\widetilde{D}^0(A_{i+1}\cdots A_k)\right\| = \|E_{p_{k+1}}\| = 1$.
- $(\beta_1 > 0)$ & $(i = k)$:
  Použijeme $C^1_{k,\beta_1} = 0$ a $\left\|\widetilde{D}(A_{i+1}\cdots A_k)\right\| = \|\widetilde{D}(E_{p_{k+1}})\| = 0$.

Teď spojíme odhady dohromady a dokončíme důkaz:

$$\begin{aligned}
&\left\|\widetilde{D}^{l_0+1}(A_1\cdots A_k)\right\| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \left\|\widetilde{D}^{l_0}\Big(\Psi\big((A_{i+1}\cdots A_k)^T, p_1\big) \cdot \Theta(A_1\cdots A_{i-1}, p_{i+1}) \cdot \widetilde{D}A_i\Big)\right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \left(C_i \cdot \sum_{\sum\limits_{i'=1}^{3} \beta_{i'} = l_0} \Big(\left\|\widetilde{D}^{\beta_3}(\widetilde{D}A_i)\right\| \cdot \left\|\widetilde{D}^{\beta_1}(A_{i+1}\cdots A_k)\right\| \cdot \left\|\widetilde{D}^{\beta_2}(A_1\cdots A_{i-1})\right\| \Big)\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \left(C_i \cdot \sum_{\sum\limits_{i'=1}^{3} \beta_{i'} = l_0} \Big(\left\|\widetilde{D}^{\beta_3+1}A_i\right\| \cdot C^1_{i,\beta_1} C^2_{i,\beta_2} \cdot \sum_{\substack{\sum\limits_{m>i} \alpha_m = \beta_1 \\ \sum\limits_{m<i} \alpha_m = \beta_2}} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} \left\|\widetilde{D}^{\alpha_j} A_j\right\| \Big)\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \left(\underbrace{C_i \cdot \max_{i,\beta_1,\beta_2} \{C^1_{i,\beta_1} C^2_{i,\beta_2}\}}_{C'_i} \cdot \sum_{\sum \beta_{i'} = l_0} \Big(\sum_{\substack{\sum\limits_{m>i} \alpha_m = \beta_1 \\ \sum\limits_{m<i} \alpha_m = \beta_2 \\ \alpha_i = \beta_3+1}} \prod_{j=1}^{k} \left\|\widetilde{D}^{\alpha_j} A_j\right\| \Big)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(C'_i \cdot \sum_{\substack{\sum \alpha_m = l_0+1 \\ \alpha_i \geq 1}} \prod_{j=1}^{k} \left\|\widetilde{D}^{\alpha_j} A_j\right\| \right) \\
&\leq \underbrace{k \cdot \max_i (C'_i)}_{C} \cdot \sum_{\sum \alpha_m = l_0+1} \prod_{j=1}^{k} \left\|\widetilde{D}^{\alpha_j} A_j\right\|.
\end{aligned}$$

Konstanta C se plně odvíjí od l, C_i, C^1_{i,β_1}, C^2_{i,β_2} a rozměrů matic, je tedy nezávislá na hodnotách uvnitř matic. $\square$

Lemma 2.22. *Nechť jsou dána $r, s, m, n, k \in \mathbb{N}$. Nechť je $A : r \times s$ matice funkcí $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a nechť $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Označme množinu $M \subset \mathbb{R}^m$ takových x, že pro $i \leq k$ existují všechny derivace $\widetilde{D}^i f(x)$ a že derivace $\widetilde{D}^i A\big(f(x)\big)$ existují ve smyslu totálního diferenciálu. Pak existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro všechna $x \in M$ platí*

$$\big\|\widetilde{D}^k\big(A(f(x))\big)\big\| \leq C \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \Big\|\widetilde{D}^i f(x)\Big\|\right)^k \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} \Big\|\widetilde{D}^i A(f(x))\Big\|\right).$$

Předpoklad existence $\widetilde{D}^k A\big(f(x)\big)$ ve smyslu totálního diferenciálu může být nahrazen předpokladem, že v x platí rovnost

$$\widetilde{D}\Big(\widetilde{D}^{k-1} A\big(f(x)\big)\Big) = \widetilde{D}^k A\big(f(x)\big) \cdot \widetilde{D} f(x).$$

Důkaz. Opět postupujme indukcí. V případě $k = 1$ podle *Lemmatu 2.14* máme

$$\begin{aligned}
\big\|\widetilde{D}^1\big(A(f(x))\big)\big\| &= \big\|\widetilde{D}A(f(x)) \cdot \widetilde{D}f(x)\big\| \\
&\leq n \cdot \big\|\widetilde{D}f(x)\big\| \cdot \big\|\widetilde{D}A(f(x))\big\| \\
&\leq n \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{1} \Big\|\widetilde{D}^i f(x)\Big\|\right)^1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{1} \Big\|\widetilde{D}^i A(f(x))\Big\|\right).
\end{aligned}$$

Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna $k = 1, \ldots, k_0$. V dalších úpravách nejprve použijeme nerovnost z *Lemmatu 2.21*, druhá nerovnost bude doplnění na součin, ve kterém velké množství členů přebývá (oproti předchozímu řádku). Platí

$$\begin{aligned}
\Big\|\widetilde{D}^{k_0+1}\big(A(f(x))\big)\Big\| &= \Big\|\widetilde{D}^{k_0}\Big(\underbrace{\widetilde{D}A(f(x))}_{A_1} \cdot \underbrace{\widetilde{D}f(x)}_{A_2}\Big)\Big\| \\
&\overset{\text{L2.21}}{\leq} C_{2.21} \cdot \sum_{\alpha_1+\alpha_2=k_0} \prod_{j=1}^{2} \big\|\widetilde{D}^{\alpha_j} A_j\big\| \\
&= C_{2.21} \cdot \sum_{i=0}^{k_0} \left(\Big\|\widetilde{D}^i\big(\widetilde{D}A(f(x))\big)\Big\| \cdot \Big\|\widetilde{D}^{k_0-i}\big(\widetilde{D}f(x)\big)\Big\|\right) \\
&\leq C_{2.21} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k_0+1} \Big\|\widetilde{D}^i f(x)\Big\|\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k_0} \Big\|\widetilde{D}^i\big(\widetilde{D}A(f(x))\big)\Big\|\right) \\
&\leq C_{2.21} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{k_0+1} \Big\|\widetilde{D}^i f(x)\Big\|\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k_0} \Big\|\widetilde{D}^i\big(\widetilde{D}A(f(x))\big)\Big\|\right).
\end{aligned}$$

Na členy v poslední sumě použijeme indukční předpoklad s $k = i = 1, \dots, k_0$.

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{D}^i\big(\widetilde{D}A(f(x))\big)\right\| &\le C_i \cdot \left(1+\sum_{j=1}^{i}\left\|\widetilde{D}^j f(x)\right\|\right)^{i} \cdot \left(\sum_{j=1}^{i}\left\|\widetilde{D}^j\big(\widetilde{D}A\big)(f(x))\right\|\right)\\ &\le C_i \cdot \left(1+\sum_{j=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^j f(x)\right\|\right)^{k_0} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^j A(f(x))\right\|\right).\end{aligned}$$

V případě $i = 0$ platí pro $C_0 = 1$ poslední nerovnost triviálně. Spojíme dosavadní výpočty a dostaneme

$$\begin{aligned}&\left\|\widetilde{D}^{k_0+1}\big(A(f(x))\big)\right\| \le\\ &\le C_{2.21} \cdot \left(1+\sum_{i=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^i f(x)\right\|\right) \cdot \sum_{i=0}^{k_0}\left\|\widetilde{D}^i\big(\widetilde{D}A(f(x))\big)\right\|\\ &\le C_{2.21} \cdot \left(1+\sum_{i=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^i f(x)\right\|\right) \cdot \sum_{i=0}^{k_0}\left(C_i \cdot \left(1+\sum_{j=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^j f(x)\right\|\right)^{k_0} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^j A(f(x))\right\|\right)\right)\\ &= C_{2.21} \cdot \left(1+\sum_{i=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^i f(x)\right\|\right)^{k_0+1} \cdot \sum_{i=0}^{k_0}\left(C_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^j A(f(x))\right\|\right)\right)\\ &\le \underbrace{C_{2.21}(k_0+1)\max_i C_i}_{C} \cdot \left(1+\sum_{i=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^i f(x)\right\|\right)^{k_0+1} \cdot \sum_{j=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^j A(f(x))\right\|.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.23. *Buďte $r, s, n, m, k \in \mathbb{R}$. Nechť A je matice funkcí $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o rozměrech $r \times s$ a f je zobrazení $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Nechť v bodech $a, b \in \mathbb{R}^m$ existují derivace*

$$\widetilde{D}^i f \qquad \text{pro } i \in \{1, \dots, k\}$$

a nechť v bodech a, b pro $i \in \{1, \dots, k\}$ derivace

$$\widetilde{D}^i A \circ f$$

existují ve smyslu totálního diferenciálu. Potom existuje $C > 0$ nezávislé na volbě a, b takové, že platí

$$\begin{aligned}&\left\|\widetilde{D}^k(A\circ f)(a) - \widetilde{D}^k(A\circ f)(b)\right\| \le\\ &\le C \cdot \left(1+\sum_{i=1}^{k}\left\|\widetilde{D}^i f(a)\right\|\right)^{k} \cdot \left(1+\sum_{i=1}^{k}\left\|\widetilde{D}^i f(b)\right\|\right)^{k} \cdot \left(1+\sum_{i=1}^{k}\left\|\widetilde{D}^i A\big(f(a)\big)\right\|\right)\\ &\quad \cdot \left(\sum_{i=1}^{k}\left\|\widetilde{D}^i f(a) - \widetilde{D}^i f(b)\right\| + \sum_{i=1}^{k}\left\|\widetilde{D}^i A\big(f(a)\big) - \widetilde{D}^i A\big(f(b)\big)\right\|\right).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Důkaz. Důkaz budeme provádět indukcí.

Případ $k = 1$.

První odhad je pomocí trojúhelníkové nerovnosti.

$$
\begin{aligned}
&\left\|\widetilde{D}^1(A\circ f)(a) - \widetilde{D}^1(A\circ f)(b)\right\| \overset{\text{L2.14}}{=} \\
&\overset{\text{L2.14}}{=} \left\|\widetilde{D}A\circ f(a)\widetilde{D}f(a) - \widetilde{D}A\circ f(b)\widetilde{D}f(b)\right\| \\
&= \left\|\widetilde{D}A\circ f(a)\widetilde{D}f(a) - \widetilde{D}A\circ f(a)\widetilde{D}f(b) + \widetilde{D}A\circ f(a)\widetilde{D}f(b) - \widetilde{D}A\circ f(b)\widetilde{D}f(b)\right\| \\
&\leq \left\|\widetilde{D}A\circ f(a)\widetilde{D}f(a) - \widetilde{D}A\circ f(a)\widetilde{D}f(b)\right\| + \left\|\widetilde{D}A\circ f(a)\widetilde{D}f(b) - \widetilde{D}A\circ f(b)\widetilde{D}f(b)\right\| \\
&= \left\|\widetilde{D}A\circ f(a)\Big(\widetilde{D}f(a) - \widetilde{D}f(b)\Big)\right\| + \left\|\Big(\widetilde{D}A\circ f(a) - \widetilde{D}A\circ f(b)\Big)\widetilde{D}f(b)\right\|.
\end{aligned}
$$

Matice $\widetilde{D}A$ má rozměry $rs \times n$, matice $\widetilde{D}f$ je $n \times m$. Proto dále

$$
\left\|\widetilde{D}A\circ f(a)\Big(\widetilde{D}f(a) - \widetilde{D}f(b)\Big)\right\| \leq n\cdot\left\|\widetilde{D}A\circ f(a)\right\|\cdot\left\|\widetilde{D}f(a) - \widetilde{D}f(b)\right\|
$$

a

$$
\left\|\Big(\widetilde{D}A\circ f(a) - \widetilde{D}A\circ f(b)\Big)\widetilde{D}f(b)\right\| \leq n\cdot\left\|\widetilde{D}A\circ f(a) - \widetilde{D}A\circ f(b)\right\|\cdot\left\|\widetilde{D}f(b)\right\|.
$$

Položíme-li $C_1 = n$, dostáváme dohromady

$$
\begin{aligned}
&\left\|\widetilde{D}^1(A\circ f)(a) - \widetilde{D}^1(A\circ f)(b)\right\| \leq \\
&\leq C_1\cdot\left(\left\|\widetilde{D}A\circ f(a)\right\|\cdot\left\|\widetilde{D}f(a) - \widetilde{D}f(b)\right\| + \left\|\widetilde{D}A\circ f(a) - \widetilde{D}A\circ f(b)\right\|\cdot\left\|\widetilde{D}f(b)\right\|\right) \\
&\leq C_1\cdot\left(1 + \left\|\widetilde{D}f(a)\right\|\right)\cdot\left(1 + \left\|\widetilde{D}f(b)\right\|\right)\cdot\left(1 + \left\|\widetilde{D}A\circ f(a)\right\|\right) \\
&\qquad\cdot\left(\left\|\widetilde{D}f(a) - \widetilde{D}f(b)\right\| + \left\|\widetilde{D}A\circ f(a) - \widetilde{D}A\circ f(b)\right\|\right),
\end{aligned}
$$

což je to, co jsme v případu $k = 1$ chtěli ukázat.

Případ $k \geq 2$.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k = 1, \dots, k_0$. Dokážeme ho pro $k = k_0 + 1$. K zadaným a, b definujme funkci $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$:

$$
g(x) = x + (b - a).
$$

Platí pro ni

$$
\widetilde{D}g(x) = E_m, \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}^m,
$$

díky čemuž podle řetízkového pravidla

$$\widetilde{D}\big(A\circ f\circ g\big)(a)=\Big(\big(\widetilde{D}A\circ f\circ g\big)\cdot\big(\widetilde{D}f\circ g\big)\cdot\widetilde{D}g\Big)(a)=\Big(\widetilde{D}A\circ f\circ g\cdot\widetilde{D}f\circ g\Big)(a).$$

a matematickou indukcí pro $l\in\mathbb{N}$ dokážeme

$$\widetilde{D}^l\big(f\circ g\big)(a)=\widetilde{D}^{l-1}\big(\widetilde{D}f\circ g\cdot\widetilde{D}g\big)(a)=\widetilde{D}^{l-1}\big(\widetilde{D}f\circ g\big)(a)=\cdots=\widetilde{D}^l f\circ g(a).$$

Dokazovaná nerovnost dostane po přepsání pomocí funkce g tvar

$$\begin{aligned}&\Big\|\widetilde{D}^k(A\circ f)-\widetilde{D}^k(A\circ f\circ g)\Big\|\le\\ &\qquad\le C\cdot\left(1+\sum_{i=1}^k\Big\|\widetilde{D}^i f\Big\|\right)^k\cdot\left(1+\sum_{i=1}^k\Big\|\widetilde{D}^i f\circ g\Big\|\right)^k\cdot\left(1+\sum_{i=1}^k\Big\|\widetilde{D}^i A\circ f\Big\|\right)\\ &\qquad\qquad\cdot\left(\sum_{i=1}^k\Big\|\widetilde{D}^i f-\widetilde{D}^i f\circ g\Big\|+\sum_{i=1}^k\Big\|\widetilde{D}^i A\circ f-\widetilde{D}^i A\circ f\circ g\Big\|\right),\end{aligned}$$

přičemž do všech funkcí v nerovnosti dosazujeme bod a.

Funkce g umožňuje dávat derivované funkce pod společnou derivaci

$$\widetilde{D}^{k_0+1}\big(A\circ f\big)(a)-\widetilde{D}^{k_0+1}\big(A\circ f\big)(b)=\widetilde{D}^{k_0+1}\Big(A\circ f-A\circ f\circ g\Big)(a),$$

dále pod společnou derivací upravovat

$$\begin{aligned}&\widetilde{D}^{k_0+1}\Big(A\circ f-A\circ f\circ g\Big)=\\ &=\widetilde{D}^{k_0}\Big(\widetilde{D}A\circ f\cdot\widetilde{D}f-\widetilde{D}A\circ f\circ g\cdot\widetilde{D}f\circ g\Big)\\ &=\widetilde{D}^{k_0}\Big(\widetilde{D}A\circ f\cdot\widetilde{D}f-\widetilde{D}A\circ f\cdot\widetilde{D}f\circ g+\widetilde{D}A\circ f\cdot\widetilde{D}f\circ g-\widetilde{D}A\circ f\circ g\cdot\widetilde{D}f\circ g\Big)\\ &=\widetilde{D}^{k_0}\Big(\widetilde{D}A\circ f\cdot\widetilde{D}f-\widetilde{D}A\circ f\cdot\widetilde{D}f\circ g\Big)+\widetilde{D}^{k_0}\Big(\widetilde{D}A\circ f\cdot\widetilde{D}f\circ g-\widetilde{D}A\circ f\circ g\cdot\widetilde{D}f\circ g\Big)\end{aligned}$$

a pod společnou derivací vytýkat

$$\widetilde{D}^{k_0}\Big(\widetilde{D}A\circ f\cdot\widetilde{D}f-\widetilde{D}A\circ f\cdot\widetilde{D}f\circ g\Big)=\widetilde{D}^{k_0}\Big(\widetilde{D}A\circ f\cdot\big(\widetilde{D}f-\widetilde{D}f\circ g\big)\Big),$$

$$\widetilde{D}^{k_0}\Big(\widetilde{D}A\circ f\cdot\widetilde{D}f\circ g-\widetilde{D}A\circ f\circ g\cdot\widetilde{D}f\circ g\Big)=\widetilde{D}^{k_0}\Big(\big(\widetilde{D}A\circ f-\widetilde{D}A\circ f\circ g\big)\cdot\widetilde{D}f\circ g\Big).$$

V normě tak dostaneme

$$\begin{aligned}&\Big\|\widetilde{D}^{k_0+1}\big(A\circ f\big)-\widetilde{D}^{k_0+1}\big(A\circ f\circ g\big)\Big\|=\\ &\quad=\left\|\widetilde{D}^{k_0}\Big(\widetilde{D}A\circ f\cdot\big(\widetilde{D}f-\widetilde{D}f\circ g\big)\Big)+\widetilde{D}^{k_0}\Big(\big(\widetilde{D}A\circ f-\widetilde{D}A\circ f\circ g\big)\cdot\widetilde{D}f\circ g\Big)\right\|\\ &\quad\le\left\|\widetilde{D}^{k_0}\Big(\widetilde{D}A\circ f\cdot\big(\widetilde{D}f-\widetilde{D}f\circ g\big)\Big)\right\|+\left\|\widetilde{D}^{k_0}\Big(\big(\widetilde{D}A\circ f-\widetilde{D}A\circ f\circ g\big)\cdot\widetilde{D}f\circ g\Big)\right\|.\end{aligned}$$

Podle *Lemmatu 2.21* a *Lemmatu 2.22* odhadneme první člen:

$$\left\|\widetilde{D}^{k_0}\Big(\widetilde{D}A\circ f\cdot\big(\widetilde{D}f-\widetilde{D}f\circ g\big)\Big)\right\|\overset{\text{L2.21}}{\le}$$

$$\overset{\text{L2.21}}{\le}\widetilde{C}\cdot\sum_{\alpha_1=0}^{k_0}\left(\left\|\widetilde{D}^{\alpha_1}\big(\widetilde{D}A\circ f\big)\right\|\cdot\left\|\widetilde{D}^{k_0-\alpha_1}\big(\widetilde{D}f-\widetilde{D}f\circ g\big)\right\|\right)$$

$$\overset{\text{L2.22}}{\le}\widetilde{C}\cdot\left\|\widetilde{D}^0\big(\widetilde{D}A\circ f\big)\right\|\cdot\left\|\widetilde{D}^{k_0}\big(\widetilde{D}f-\widetilde{D}f\circ g\big)\right\|$$

$$+\widetilde{C}\cdot\sum_{\alpha_1=1}^{k_0}\left(\widehat{C}_{\alpha_1}\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\|\widetilde{D}^i f\|\right)^{\alpha_1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\alpha_1}\left\|\widetilde{D}^i(\widetilde{D}A)\circ f\right\|\right)\cdot\left\|\widetilde{D}^{k_0-\alpha_1}\big(\widetilde{D}f-\widetilde{D}f\circ g\big)\right\|\right)$$

$$\le\widetilde{C}\cdot\sum_{\alpha_1=0}^{k_0}\left(\widehat{C}_{\alpha_1}\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{k_0}\|\widetilde{D}^i f\|\right)^{k_0}\cdot\left(\sum_{i=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^i A\circ f\right\|\right)\cdot\left\|\widetilde{D}^{k_0-\alpha_1}\big(\widetilde{D}f-\widetilde{D}f\circ g\big)\right\|\right)$$

$$\le C\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{k_0}\|\widetilde{D}^i f\|\right)^{k_0}\cdot\left(\sum_{i=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^i A\circ f\right\|\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^i f-\widetilde{D}^i f\circ g\right\|\right)$$

$$\le C\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^i f\right\|\right)^{k_0+1}\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^i f\circ g\right\|\right)^{k_0+1}\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^i A\circ f\right\|\right)$$

$$\cdot\left(\sum_{i=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^i f-\widetilde{D}^i f\circ g\right\|+\sum_{i=1}^{k_0+1}\left\|\widetilde{D}^i A\circ f-\widetilde{D}^i A\circ f\circ g\right\|\right).$$

Následuje odvození druhé potřebné nerovnosti. Prvním krokem je nerovnost podle *Lemmatu 2.21*, ve druhém kroku vyčleníme člen s $\alpha_1 = 0$ a na zbytek použijeme indukční předpoklady s $k = \alpha_1 = 1,\ldots,k_0-1$. Ve třetím kroku použijeme na první člen indukční předpoklad s $k = k_0$, ve zbylé sumě zvětšíme všechny α_1 podle nutnosti na k_0 nebo k_0+1, obě části (vyčleněný člen a sumu) spojíme do jednoho součinu a omezíme konstantou $C = (k_0+1)\widetilde{C}C_{\alpha_1}$. Platí tedy

$$\left\|\widetilde{D}^{k_0}\Big(\big(\widetilde{D}A\circ f-\widetilde{D}A\circ f\circ g\big)\cdot\widetilde{D}f\circ g\Big)\right\|\overset{\text{L2.21}}{\le}$$

$$\overset{\text{L2.21}}{\le}\widetilde{C}\cdot\sum_{\alpha_1=0}^{k_0}\left(\left\|\widetilde{D}^{\alpha_1}\big(\widetilde{D}A\circ f-\widetilde{D}A\circ f\circ g\big)\right\|\cdot\left\|\widetilde{D}^{k_0-\alpha_1}\big(\widetilde{D}f\circ g\big)\right\|\right)$$

$$\le\widetilde{C}\cdot\left\|\widetilde{D}^0\big(\widetilde{D}A\circ f-\widetilde{D}A\circ f\circ g\big)\right\|\cdot\left\|\widetilde{D}^{k_0}\big(\widetilde{D}f\circ g\big)\right\|$$

$$+\ \widetilde{C}\cdot\sum_{\alpha_1=1}^{k_0}\left(\left\|\widetilde{D}^{k_0-\alpha_1}\big(\widetilde{D}f\circ g\big)\right\|\cdot C_{\alpha_1}\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\left\|\widetilde{D}^i f\right\|\right)^{\alpha_1}\right.$$

$$\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\left\|\widetilde{D}^i f(b)\right\|\right)^{\alpha_1}\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\left\|\widetilde{D}^i(\widetilde{D}A)\circ f\right\|\right)$$

$$\left.\cdot\left(\sum_{i=1}^{\alpha_1}\left\|\widetilde{D}^i f-\widetilde{D}^i f\circ g\right\|+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\left\|\widetilde{D}^i(\widetilde{D}A)\circ f-\widetilde{D}^i(\widetilde{D}A)\circ f\circ g\right\|\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C \cdot \left(\sum_{i=1}^{k_0+1} \left\| \widetilde{D}^i f \circ g \right\| \right) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{k_0} \left\| \widetilde{D}^i f \right\| \right)^{k_0} \\
&\qquad \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{k_0} \left\| \widetilde{D}^i f \circ g \right\| \right)^{k_0} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{k_0} \left\| \widetilde{D}^i A \circ f \right\| \right) \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{i=1}^{k_0} \left\| \widetilde{D}^i f - \widetilde{D}^i f \circ g \right\| + \sum_{i=2}^{k_0+1} \left\| \widetilde{D}^i A \circ f - \widetilde{D}^i A \circ f \circ g \right\| \right) \\
&\leq C \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{k_0+1} \left\| \widetilde{D}^i f \right\| \right)^{k_0+1} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{k_0+1} \left\| \widetilde{D}^i f \circ g \right\| \right)^{k_0+1} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{k_0+1} \left\| \widetilde{D}^i A \circ f \right\| \right) \\
&\qquad \cdot \left(\sum_{i=1}^{k_0+1} \left\| \widetilde{D}^i f - \widetilde{D}^i f \circ g \right\| + \sum_{i=1}^{k_0+1} \left\| \widetilde{D}^i A \circ f - \widetilde{D}^i A \circ f \circ g \right\| \right).
\end{aligned}
$$

Oba členy

$$
\left\| \widetilde{D}^{k_0} \left(\widetilde{D} A \circ f \cdot \left(\widetilde{D} f - \widetilde{D} f \circ g \right) \right) \right\| \qquad \text{i} \qquad \left\| \widetilde{D}^{k_0} \left(\left(\widetilde{D} A \circ f - \widetilde{D} A \circ f \circ g \right) \cdot \widetilde{D} f \circ g \right) \right\|
$$

jsme omezili stejným výrazem (s různou konstantou C). I součet těchto členů je tedy omezen tímto stejným výrazem pro nějakou konstantu C a dostáváme nerovnost (2.2). $\square$

3. Hlavní část práce

3.1. Významná rovnost

Podstatný díl hlavní části bude vycházet z rovnosti, která vznikne úpravou identity

$$\widetilde{D}^2\big(f \circ f^{-1}(y)\big) = \widetilde{D}^2\big(\mathrm{id}(y)\big).$$

Značení 3.1. V této části bude f vždy homeomorfismus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Za derivaci používáme $\widetilde{D}$ zavedenou v předchozím oddílu.

Významná rovnost 3.2. V dalším textu několikrát využijeme rovnost

$$\widetilde{D}^2 f^{-1}(y) = -\,\Theta\Big(\widetilde{D}f^{-1}(y), n\Big) \cdot \Psi\Big(\big(\widetilde{D}f^{-1}(y)\big)^T, n\Big) \cdot \widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big) \cdot \widetilde{D}f^{-1}(y).$$

Proto ji teď odvodíme a odvodíme i za jakých podmínek platí.

Lemma 3.3. *Nechť $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \Omega'$ je homeomorfismus. Nechť v bodě $y \in \Omega'$ existuje derivace $\widetilde{D}f^{-1}(y)$ a nechť v bodě $x = f^{-1}(y) \in \Omega$ existuje derivace $\widetilde{D}f(x)$ ve smyslu totálního diferenciálu. Pak platí*

$$E_n = \widetilde{D}f^{-1}(y) \cdot \widetilde{D}f\big(f^{-1}(y)\big). \tag{3.1}$$

Nechť je dále splněna aspoň jedna z podmínek

(i) *derivace $\widetilde{D}^2 f(x)$ existuje ve smyslu totálního diferenciálu*

(ii) *existuje $\widetilde{D}^2 f(x)$ a je splněna rovnost $\widetilde{D}\Big(\widetilde{D}f\big(f^{-1}(y)\big)\Big) = \widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big) \cdot \widetilde{D}f^{-1}(y)$*

potom platí

$$\widetilde{D}^2 f^{-1}(y) = -\,\Theta\Big(\widetilde{D}f^{-1}(y), n\Big) \cdot \Psi\Big(\big(\widetilde{D}f^{-1}(y)\big)^T, n\Big) \cdot \widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big) \cdot \widetilde{D}f^{-1}(y). \tag{3.2}$$

Důkaz. Podle řetízkového pravidla *Lemma 2.14* platí

$$E_n = \widetilde{D}(y) = \widetilde{D}\Big(f\big(f^{-1}(y)\big)\Big) \overset{\text{L2.14}}{=} \widetilde{D}f\big(f^{-1}(y)\big) \cdot \widetilde{D}f^{-1}(y). \tag{3.3}$$

Matice $\widetilde{D}f^{-1}(y)$ je inverzní maticí k $\widetilde{D}f\big(f^{-1}(y)\big)$, tyto matice můžeme v (3.3) zaměnit a dostáváme (3.1).

Zderivujeme (3.3) podle *Lemmatu 2.13* a dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \widetilde{D}(E_n) \\ &= \widetilde{D}\Big(\widetilde{D}f\big(f^{-1}(y)\big) \cdot \widetilde{D}f^{-1}(y)\Big) \\ &= \Theta\Big(\widetilde{D}f\big(f^{-1}(y)\big), n\Big) \cdot \widetilde{D}\Big(\widetilde{D}f^{-1}(y)\Big) + \Psi\Big(\big(\widetilde{D}f^{-1}(y)\big)^T, n\Big) \cdot \widetilde{D}\Big(\widetilde{D}f\big(f^{-1}(y)\big)\Big). \end{aligned}$$

Dle *Poznámky 2.11* je díky rovnosti (3.1) matice

$$\Theta\Big(\widetilde{D}f^{-1}(y), n\Big) \qquad \text{inverzní maticí k} \qquad \Theta\Big(\widetilde{D}f\big(f^{-1}(y)\big), n\Big),$$

proto po vynásobení poslední rovnosti maticí $\Theta\Big(\widetilde{D}f^{-1}(y), n\Big)$ zleva dostaneme

$$0 = \widetilde{D}\Big(\widetilde{D}f^{-1}(y)\Big) + \Theta\Big(\widetilde{D}f^{-1}(y), n\Big) \cdot \Psi\Big(\big(\widetilde{D}f^{-1}(y)\big)^T, n\Big) \cdot \widetilde{D}\Big(\widetilde{D}f\big(f^{-1}(y)\big)\Big).$$

Přepsáním

$$\widetilde{D}\Big(\widetilde{D}f^{-1}(y)\Big) = \widetilde{D}^2 f^{-1}(y)$$

a v případě (i) dalším použitím řetízkového pravidla nebo v případě (ii) přímo z předpokladu

$$\widetilde{D}\Big(\widetilde{D}f\big(f^{-1}(y)\big)\Big) = \widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big) \cdot \widetilde{D}f^{-1}(y)$$

obdržíme (3.2). □

3.2. Lemmata klíčová pro důkaz hlavních vět

Následují klíčová lemmata nutná k důkazu hlavní věty.

Lemma 3.4. *Buď $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ a $f : \Omega \xrightarrow{\text{na}} \Omega'$ bilipschitzovské zobrazení, a nechť $f \in W^{m,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap W^{m+1,1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Nechť derivace $\widetilde{D}^{m+1} f^{-1}$ existuje skoro všude v Ω'. Nechť $Q(c, r) \subset \Omega'$ je zvolena pevně.*

Potom existují konstanty $\widetilde{K}, C \in \mathbb{R}$ a podmnožina $\mathcal{A} \subset Q(c, r)$ takové, že

$$\mathcal{L}_n(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_n\big(Q(c, r)\big),$$

dále že pro každé $y \in \mathcal{A}$ platí

$$\big\|\widetilde{D}^j f\big(f^{-1}(y)\big)\big\| \le \widetilde{K}, \qquad \big\|\widetilde{D}^j f^{-1}(y)\big\| \le \widetilde{K} \qquad \text{pro } j \in \{1, \dots, m\}$$

a

$$\big\|\widetilde{D}^{m+1} f^{-1}(y)\big\| \le C\Big(\big\|\widetilde{D}^{m+1} f\big(f^{-1}(y)\big)\big\| + 1\Big).$$

Důkaz. Důkaz si indukčně rozdělíme na případy $m = 1$ a $m \ge 2$.

Případ $m = 1$.

Zvolme za $\mathcal{A}$ všechna $y \in Q(c, r)$ taková, že existují derivace

$$\widetilde{D}f^{-1}(y) \qquad \text{a} \qquad \widetilde{D}^2 f^{-1}(y),$$

že v bodě $x = f^{-1}(y)$ existuje derivace $\widetilde{D}f(x)$ ve smyslu totálního diferenciálu a že v y platí

$$\widetilde{D}\Big(\widetilde{D}f\big(f^{-1}(y)\big)\Big) = \widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big) \cdot \widetilde{D}f^{-1}(y). \tag{3.4}$$

Zobrazení f je bilipschitzovské a tedy podle *Tvrzení 1.15* existuje totální diferenciál $\widetilde{D}f(x)$ skoro všude v $f^{-1}\big(Q(c,r)\big)$. Bilipschitzovské zobrazení f zobrazuje množiny nulové míry na množiny nulové míry, takže totální diferenciál $\widetilde{D}f(x)$ existuje pro skoro všechna $y \in Q(c,r)$, přičemž $x = f^{-1}(y)$. Jelikož $\widetilde{D}f \in W^{1,p}$, tak podle *Lemmatu 2.15* platí také rovnost (3.4) skoro všude v $Q(c,r)$. Každá z podmínek na $\mathcal{A}$ je splněna skoro všude v $Q(c,r)$, proto $\mathcal{L}_n\big(\mathcal{A}\big) = \mathcal{L}_n\big(Q(c,r)\big)$. Pro Lipschitzovskou konstantu $\widetilde{K}$ bilipschitzovského zobrazení f navíc platí

$$\big\|\widetilde{D}f(f^{-1}(y))\big\| \le \widetilde{K} \qquad \text{a} \qquad \big\|\widetilde{D}f^{-1}(y)\big\| \le \widetilde{K}.$$

Na $\mathcal{A}$ jsou splněny podmínky pro rovnost (3.2), podle ní provedeme odhad. Druhá a třetí úprava je podle *Lemmatu 2.17*, přičemž n^{2+2+1} dostaneme z rozměrů matic

$$\begin{aligned} \Theta\Big(\widetilde{D}f^{-1}(y), n\Big) :&\quad n^2 \times n^2, & \Psi\Big(\big(\widetilde{D}f^{-1}(y)\big)^T, n\Big) :&\quad n^2 \times n^2, \\ \widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big) :&\quad n^2 \times n, & \widetilde{D}f^{-1}(y) :&\quad n \times n. \end{aligned}$$

Čtvrtá úprava využívá $\big\|\widetilde{D}f^{-1}(y)\big\| \le \widetilde{K}$. Upravujeme:

$$\begin{aligned} &\Big\|\widetilde{D}^2 f^{-1}(y)\Big\| \overset{(3.2)}{=} \\ &\overset{(3.2)}{=} \Big\| -\Theta\Big(\widetilde{D}f^{-1}(y), n\Big) \cdot \Psi\Big(\big(\widetilde{D}f^{-1}(y)\big)^T, n\Big) \cdot \widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big) \cdot \widetilde{D}f^{-1}(y)\Big\| \\ &\overset{\text{L2.17}}{\le} n^{2+2+1} \cdot \Big\| -\Theta\Big(\widetilde{D}f^{-1}(y), n\Big)\Big\| \cdot \Big\|\Psi\Big(\big(\widetilde{D}f^{-1}(y)\big)^T, n\Big)\Big\| \cdot \Big\|\widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big)\Big\| \cdot \Big\|\widetilde{D}f^{-1}(y)\Big\| \\ &\overset{\text{L2.17}}{=} n^5 \cdot \big\|\widetilde{D}f^{-1}(y)\big\| \cdot \big\|\widetilde{D}f^{-1}(y)\big\| \cdot \big\|\widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big)\big\| \cdot \big\|\widetilde{D}f^{-1}(y)\big\| \\ &\le n^5 \cdot \widetilde{K}^3 \cdot \big\|\widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big)\big\| = C \cdot \big\|\widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big)\big\|. \end{aligned}$$

Případ $m \ge 2$.

Předpokládejme, že jsme už Lemma v případě $m = m_0 - 1$ dokázali a dokažme jej pro $m = m_0 \ge 2$. Z existencí derivací

$$\widetilde{D}^{m_0+1} f\big(f^{-1}(y)\big) \qquad \text{a} \qquad \widetilde{D}^{m_0+1} f^{-1}(y)$$

skoro všude v Ω' dostáváme existenci derivací

$$\widetilde{D}^{m_0} f\big(f^{-1}(y)\big) \qquad \text{a} \qquad \widetilde{D}^{m_0} f^{-1}(y)$$

skoro všude v Ω'. Z $f \in W^{m_0,\infty}_{\mathrm{loc}}$ podle *Tvrzení 1.10* plyne $f \in W^{m_0-1,\infty}_{\mathrm{loc}}$. Jsou splněny podmínky tohoto Lemmatu v případě $m = m_0 - 1$, proto pro nějaké $K > 0$ pro skoro všechna $y \in Q(c,r)$

$$\left\|\widetilde{D}^j f(f^{-1}(y))\right\| \le K, \qquad \left\|\widetilde{D}^j f^{-1}(y)\right\| \le K \qquad \text{pro } j \in \{1, \dots, m_0 - 1\}$$

a

$$\left\|\widetilde{D}^{m_0} f^{-1}(y)\right\| \le C\Big(\left\|\widetilde{D}^{m_0} f(f^{-1}(y))\right\| + 1\Big). \tag{3.5}$$

Z $f \in W^{m_0,\infty}_{\mathrm{loc}}$ dostáváme navíc (bez újmy na obecnosti pro stejné K):

$$\left\|\widetilde{D}^{m_0} f(f^{-1}(y))\right\| \le K \tag{3.6}$$

pro skoro všechna $y \in Q(c,r)$. Spojením výsledků (3.5) a (3.6) odvodíme

$$\left\|\widetilde{D}^{m_0} f^{-1}(y)\right\| \le C(K+1)$$

skoro všude v $Q(c,r)$. Označme $\widetilde{K} = \max\big\{K, C(K+1)\big\}$. Za $\mathcal{A}$ vezměme tedy ta $y \in Q(c,r)$, kde existuje derivace $\widetilde{D}^{m_0+1} f^{-1}(y)$, kde derivace $\widetilde{D}^j f\big(f^{-1}(y)\big)$, $j \in \{1, \dots, m_0\}$, existuje ve smyslu totálního diferenciálu, dále kde je splněna rovnost

$$\widetilde{D}\Big(\widetilde{D}^{m_0} f\big(f^{-1}(y)\big)\Big) = \widetilde{D}^{m_0+1} f\big(f^{-1}(y)\big) \cdot \widetilde{D} f^{-1}(y) \tag{3.7}$$

a kde platí všechny nerovnosti

$$\left\|\widetilde{D}^j f(f^{-1}(y))\right\| \le \widetilde{K} \qquad \text{a} \qquad \left\|\widetilde{D}^j f^{-1}(y)\right\| \le \widetilde{K} \qquad \text{pro } j \in \{1, \dots, m_0\}.$$

Podle *Poznámky 1.11* platí $D^{m_0} f \in W^{1,p}$. Z toho podle *Lemmatu 2.15* díky bilipschitzovskosti f plyne, že je rovnost (3.7) splněna skoro všude v $Q(c,r)$. Pro každé $j \in \{1, \dots, m_0\}$ podle *Tvrzení 1.10* platí $f \in W^{j,\infty}$ a z *Poznámky 1.11* dále plyne $\widetilde{D}^{j-1} f \in W^{1,\infty}$. Proto podle *Tvrzení 1.14* existuje Lipschitzovský reprezentant $\widetilde{D}^{j-1} f$ a podle *Tvrzení 1.15* má tento reprezentant totální diferenciál $\widetilde{D}^j f$ skoro všude v $f^{-1}\big(Q(c,r)\big)$. Bilipschitzovské zobrazení f zobrazuje množiny nulové míry na množiny nulové míry, proto existuje $\widetilde{D}^j f\big(f^{-1}(y)\big)$ ve smyslu totálního diferenciálu skoro všude v $Q(c,r)$. Jelikož všechny podmínky na množinu $\mathcal{A}$ platí (existují) skoro všude na $Q(c,r)$, je $\mathcal{L}_n\big(\mathcal{A}\big) = \mathcal{L}_n\big(Q(c,r)\big)$.

Zafixujme $y \in \mathcal{A}$. Pro snažší zápis následujících operací označme

$$\begin{aligned}
A_1 &:= -\Theta\Big(\widetilde{D} f^{-1}(y), n\Big),\\
A_2 &:= \Psi\Big(\big(\widetilde{D} f^{-1}(y)\big)^T, n\Big),\\
A_3 &:= \widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big),\\
A_4 &:= \widetilde{D} f^{-1}(y).
\end{aligned}$$

Za použití (3.2) dostaneme

$$\left\|\widetilde{D}^{m_0+1}f^{-1}(y)\right\| = \left\|\widetilde{D}^{m_0-1}\big(\widetilde{D}^2 f^{-1}(y)\big)\right\| \overset{(3.2)}{=} \left\|\widetilde{D}^{m_0-1}(A_1A_2A_3A_4)\right\|.$$

Další odhad provedeme podle *Lemmatu 2.21*:

$$\left\|\widetilde{D}^{m_0-1}(A_1A_2A_3A_4)\right\| \leq C_{2.21}\cdot \sum_{\sum \alpha_i = m_0-1}\prod_{j=1}^{4}\left\|\widetilde{D}^{\alpha_j}A_j\right\|.$$

Nyní omezíme jednotlivá $\left\|\widetilde{D}^{\alpha_j}A_j\right\|$ pro $\alpha_j \in \{0,\dots,m_0-1\}, j \in \{1,2,3,4\}$. Díky *Lemmatu 2.19*

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{D}^{\alpha_1}A_1\right\| &= \left\|\widetilde{D}^{\alpha_1}\Big(-\Theta\Big(\widetilde{D}f^{-1}(y), n\Big)\Big)\right\| = \left\|\widetilde{D}^{\alpha_1+1}f^{-1}(y)\right\| \leq \widetilde{K},\\
\left\|\widetilde{D}^{\alpha_2}A_2\right\| &= \left\|\widetilde{D}^{\alpha_2}\Big(\Psi\Big(\big(\widetilde{D}f^{-1}(y)\big)^T, n\Big)\Big)\right\| = \left\|\widetilde{D}^{\alpha_2+1}f^{-1}(y)\right\| \leq \widetilde{K},\\
\left\|\widetilde{D}^{\alpha_4}A_4\right\| &= \left\|\widetilde{D}^{\alpha_4}\big(\widetilde{D}f^{-1}(y)\big)\right\| \leq \widetilde{K}.
\end{aligned}$$

Derivace matice A_3 odhadneme pomocí *Lemmatu 2.22*. Pro $1 \leq \alpha_3 \leq m_0 - 1$ platí

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{D}^{\alpha_3}A_3\right\| &= \left\|\widetilde{D}^{\alpha_3}\Big(\widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big)\Big)\right\| \leq\\
&\leq C_{2.22}\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{\alpha_3}\left\|\widetilde{D}^i f^{-1}(y)\right\|\right)^{\alpha_3}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\alpha_3}\left\|\widetilde{D}^i(\widetilde{D}^2 f)\big(f^{-1}(y)\big)\right\|\right)\\
&\leq C_{2.22}\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{\alpha_3}\widetilde{K}\right)^{\alpha_3}\cdot\left(\left\|\widetilde{D}^{\alpha_3+2}f\big(f^{-1}(y)\big)\right\| + \sum_{i=1}^{\alpha_3-1}\left\|\widetilde{D}^{i+2}f\big(f^{-1}(y)\big)\right\|\right)\\
&\leq C_{2.22}\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{\alpha_3}\widetilde{K}\right)^{\alpha_3}\cdot\left(\left\|\widetilde{D}^{\alpha_3+2}f\big(f^{-1}(y)\big)\right\| + \sum_{i=1}^{\alpha_3-1}\widetilde{K}\right)\\
&\leq \widetilde{C}\cdot\left(\left\|\widetilde{D}^{\alpha_3+2}f\big(f^{-1}(y)\big)\right\|+1\right).
\end{aligned}$$

Pro $\alpha_3 = 1,\dots,m_0-2$ je navíc

$$\widetilde{C}\cdot\left(\left\|\widetilde{D}^{\alpha_3+2}f\big(f^{-1}(y)\big)\right\|+1\right) \leq \widetilde{C}\cdot(\widetilde{K}+1).$$

Pro $\alpha_3 = 0$ platí odhad $\left\|\widetilde{D}^0 A_3\right\| \leq \widetilde{C}\cdot(\widetilde{K}+1)$ triviálně.

Dokončíme důkaz:

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{D}^{m_0+1}f^{-1}(y)\right\| &\leq C_{2.21}\cdot\sum_{\sum\alpha_i=m_0-1}\prod_{j=1}^{4}\left\|\widetilde{D}^{\alpha_j}A_j\right\|\\
&\leq C\cdot\left(\left\|\widetilde{D}^{m_0+1}f\big(f^{-1}(y)\big)\right\|+1\right).
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.5. *Buď Ω, $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $1 \le m \in \mathbb{N}$ a $f : \Omega \xrightarrow{\text{na}} \Omega'$ bilipschitzovské zobrazení. Nechť derivace $\widetilde{D}^m f$ resp. $\widetilde{D}^m f^{-1}$ existují skoro všude v Ω resp. v Ω', přičemž $\widetilde{D}^m f$ ve smyslu totálního diferenciálu. Krychle $Q(c,r) \subset \Omega'$ je zvolena pevně. Nakonec nechť existuje konstanta $\widetilde{K}$ taková, že*

$$\begin{aligned} & \left\|\widetilde{D}^j f^{-1}(y)\right\| \le \widetilde{K} && \text{pro } j \in \{1,\dots,m-1\} \\ \text{a} \quad & \left\|\widetilde{D}^j f(f^{-1}(y))\right\| \le \widetilde{K} && \text{pro } j \in \{1,\dots,m\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

pro skoro všechna $y \in Q(c,r)$.

Potom existují konstanta $C \in \mathbb{R}$ a podmnožina $\mathcal{A} \subset Q(c,r)$ takové, že

$$\mathcal{L}_n(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_n\big(Q(c,r)\big),$$

dále že pro každé $x \in f^{-1}(\mathcal{A})$ a každé $y \in \mathcal{A}$ existují všechny derivace

$$\widetilde{D}^i f(x) \qquad \text{a} \qquad \widetilde{D}^i f^{-1}(y), \qquad \text{kde } i \in \{1,\dots,m\},$$

a že pro každé $a, b \in \mathcal{A}$ platí

$$\left\|\widetilde{D}^m f^{-1}(a) - \widetilde{D}^m f^{-1}(b)\right\| \le C \cdot \sum_{i=1}^{m} \left\|\widetilde{D}^i f\big(f^{-1}(a)\big) - \widetilde{D}^i f\big(f^{-1}(b)\big)\right\|. \tag{3.9}$$

Pro $m = 1$ nejsou nerovnosti (3.8) v předpokladech Lemmatu nutné.

Důkaz. Důkaz Lemmatu provedeme zvlášť pro $m = 1$, $m = 2$ a $m \ge 3$. Případ $m = 2$ by bylo možné dokázat přímo indukcí, ale uděláme ho názorně zvlášť, aby se lépe chápal obecný indukční krok.

Případ $m = 1$.

Definujme množinu $\mathcal{A} \subset Q(c,r)$ jako všechna $y \in Q(c,r)$, kde existují derivace

$$\widetilde{D} f\big(f^{-1}(y)\big), \qquad \widetilde{D} f^{-1}(y),$$

první z nich ve smyslu totálního diferenciálu. Bilipschitzovské zobrazení f zobrazuje množiny nulové míry na množiny nulové míry, proto z předpokladů Lemmatu existují obě derivace skoro všude v $Q(c,r)$. Je tedy $\mathcal{L}_n\big(\mathcal{A}\big) = \mathcal{L}_n\big(Q(c,r)\big)$. Pro bilipschitzovskou konstantu K zobrazení f platí

$$\left\|\widetilde{D} f^{-1}(y)\right\| \le K \qquad \text{a} \qquad y \in \mathcal{A}.$$

Zvolme nějaká $a, b \in \mathcal{A}$. Využitím rovnosti (3.1) a nerovnosti z *Lemmatu 2.17* upravíme

$$\begin{aligned} \left\|\widetilde{D} f^{-1}(a) - \widetilde{D} f^{-1}(b)\right\| &\overset{(3.1)}{=} \\ &\overset{(3.1)}{=} \left\|\widetilde{D} f^{-1}(b)\Big(\widetilde{D} f\big(f^{-1}(b)\big) - \widetilde{D} f\big(f^{-1}(a)\big)\Big)\widetilde{D} f^{-1}(a)\right\| \\ &\overset{\text{L2.17}}{\le} n^2 \cdot \left\|\widetilde{D} f^{-1}(b)\right\| \cdot \left\|\widetilde{D} f\big(f^{-1}(b)\big) - \widetilde{D} f\big(f^{-1}(a)\big)\right\| \cdot \left\|\widetilde{D} f^{-1}(a)\right\| \\ &\le \underbrace{n^2 K^2}_{C} \cdot \left\|\widetilde{D} f\big(f^{-1}(a)\big) - \widetilde{D} f\big(f^{-1}(b)\big)\right\|. \end{aligned}$$

Nerovnost (3.9) pro případ $m = 1$ dokázána.

Případ $m = 2$.

Množinu $\mathcal{A}$ definujme jako ta $y \in Q(c, r)$, kde existují derivace

$$\widetilde{D} f^{-1}(y), \qquad \widetilde{D}^2 f^{-1}(y),$$

dále kde

$$\widetilde{D} f\big(f^{-1}(y)\big), \qquad \widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big)$$

existují ve smyslu totálního diferenciálu a ve kterých platí

$$\Big\|\widetilde{D} f^{-1}(y)\Big\| \leq \widetilde{K}, \qquad \Big\|\widetilde{D} f\big(f^{-1}(y)\big)\Big\| \leq \widetilde{K}, \qquad \Big\|\widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big)\Big\| \leq \widetilde{K}.$$

Derivace $\widetilde{D}^2 f^{-1}(y)$ existuje skoro všude v $Q(c, r)$, takže existuje skoro všude i derivace $\widetilde{D} f^{-1}(y)$. Derivace $\widetilde{D}^2 f$ existuje ve smyslu totálního diferenciálu skoro všude v $f^{-1}\big(Q(c, r)\big)$, proto skoro všude ve smyslu totálního diferenciálu existuje i $\widetilde{D} f$. Množiny nulové míry se u bilipschitzovského zobrazení f zobrazují na množiny nulové míry, proto existují totální diferenciály $\widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big)$, $\widetilde{D} f\big(f^{-1}(y)\big)$ pro skoro všechna $y \in Q(c, r)$. Každá z potřebných podmínek splněna skoro všude v $Q(c, r)$, proto jsou tyto podmínky splněny i najednou skoro všude v $Q(c, r)$ a platí

$$\mathcal{L}_n(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_n\big(Q(c, r)\big).$$

Vyberme nyní nějaká $a, b \in \mathcal{A}$ a pro zpřehlednění zápisu označme

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\beta_a &=& -\Theta\Big(Df^{-1}(a), n\Big), & \beta_b &=& -\Theta\Big(Df^{-1}(b), n\Big), \\
\gamma_a &=& \Psi\Big(\big(Df^{-1}(a)\big)^T, n\Big), & \gamma_b &=& \Psi\Big(\big(Df^{-1}(b)\big)^T, n\Big), \\
\delta_a &=& D^2 f\big(f^{-1}(a)\big), & \delta_b &=& D^2 f\big(f^{-1}(b)\big), \\
\varepsilon_a &=& Df^{-1}(a), & \varepsilon_b &=& Df^{-1}(b).
\end{array}$$

Na $\mathcal{A}$ jsou splněny podmínky pro rovnost (3.2). Rovnost (3.2) se tak dá zapsat jako

$$\widetilde{D}^2 f^{-1}(a) = \beta_a \gamma_a \delta_a \varepsilon_a \qquad \text{a} \qquad \widetilde{D}^2 f^{-1}(b) = \beta_b \gamma_b \delta_b \varepsilon_b.$$

Odhadujme

$$\begin{aligned}
\big\|D^2 f^{-1}(a) - D^2 f^{-1}(b)\big\| &= \big\|\beta_a \gamma_a \delta_a \varepsilon_a - \beta_b \gamma_b \delta_b \varepsilon_b\big\| \\
&\leq \quad \|\beta_a \gamma_a \delta_a \varepsilon_a - \beta_b \gamma_a \delta_a \varepsilon_a\| \\
&\quad + \|\beta_b \gamma_a \delta_a \varepsilon_a - \beta_b \gamma_b \delta_a \varepsilon_a\| \\
&\quad + \|\beta_b \gamma_b \delta_a \varepsilon_a - \beta_b \gamma_b \delta_b \varepsilon_a\| \\
&\quad + \|\beta_b \gamma_b \delta_b \varepsilon_a - \beta_b \gamma_b \delta_b \varepsilon_b\| \\
&= \quad \|(\beta_a - \beta_b) \gamma_a \delta_a \varepsilon_a\| \\
&\quad + \|\beta_b (\gamma_a - \gamma_b) \delta_a \varepsilon_a\| \\
&\quad + \|\beta_b \gamma_b (\delta_a - \delta_b) \varepsilon_a\| \\
&\quad + \|\beta_b \gamma_b \delta_b (\varepsilon_a - \varepsilon_b)\|.
\end{aligned}$$

Odhadneme podrobně $\|(\beta_a - \beta_b)\gamma_a\delta_a\varepsilon_a\|$. Označme si

$$A_1 = \beta_a - \beta_b, \qquad A_2 = \gamma_a, \qquad A_3 = \delta_a, \qquad A_4 = \varepsilon_a.$$

Následující krok by šel provést i mnohem jednodušeji podle *Lemmatu 2.17*, ale právě kvůli názornosti uvedeme analogii těžšího (obecně použitelného) postupu. Podle *Lemmatu 2.21* existuje konstanta C nezávislá na volbě a, b, pro kterou

$$\begin{aligned}\|A_1A_2A_3A_4\| = \|\widetilde{D}^0(A_1A_2A_3A_4)\| &\leq C_{2.21} \cdot \sum_{\sum \alpha_i = 0} \prod_{j=1}^{4} \|\widetilde{D}^{\alpha_j} A_j\| \\ &= C_{2.21} \cdot \prod_{j=1}^{4} \|\widetilde{D}^0 A_j\| = C_{2.21} \cdot \|A_1\| \cdot \|A_2\| \cdot \|A_3\| \cdot \|A_4\|.\end{aligned}$$

Pro jednotlivé členy součinu je

$$\begin{aligned}\|A_1\| &= \left\|-\Theta\Big(\widetilde{D}f^{-1}(a), n\Big) + \Theta\Big(\widetilde{D}f^{-1}(b), n\Big)\right\| \\ &= \left\|\Theta\Big(-\widetilde{D}f^{-1}(a) + \widetilde{D}f^{-1}(b), n\Big)\right\| = \left\|\widetilde{D}f^{-1}(a) - \widetilde{D}f^{-1}(b)\right\|, \\ \|A_2\| &= \left\|\Psi\Big(\big(\widetilde{D}f^{-1}(a)\big)^T, n\Big)\right\| = \left\|\widetilde{D}f^{-1}(a)\right\| \leq \widetilde{K}, \\ \|A_3\| &= \left\|\widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(a)\big)\right\| \leq \widetilde{K}, \\ \|A_4\| &= \left\|\widetilde{D}f^{-1}(a))\right\| \leq \widetilde{K}.\end{aligned}$$

Proto dohromady

$$\|(\beta_a - \beta_b)\gamma_a\delta_a\varepsilon_a\| \leq \widetilde{C}_1 \cdot \left\|\widetilde{D}f^{-1}(a) - \widetilde{D}f^{-1}(b)\right\|$$

pro nějakou konstantu $\widetilde{C}_1 \in \mathbb{R}$. Velmi podobně odhadujeme i zbylé normy. Využíváme přitom vztahy

$$\begin{aligned}\|\gamma_a - \gamma_b\| &= \left\|\Psi\Big(\big(\widetilde{D}f^{-1}(a)\big)^T, n\Big) - \Psi\Big(\big(\widetilde{D}f^{-1}(b)\big)^T, n\Big)\right\| \\ &= \left\|\Psi\Big(\big(\widetilde{D}f^{-1}(a)\big)^T - \big(\widetilde{D}f^{-1}(b)\big)^T, n\Big)\right\| \\ &= \left\|\big(\widetilde{D}f^{-1}(a)\big)^T - \big(\widetilde{D}f^{-1}(b)\big)^T\right\| = \left\|\widetilde{D}f^{-1}(a) - \widetilde{D}f^{-1}(b)\right\|, \\ \|\delta_a - \delta_b\| &= \left\|\widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(a)\big) - \widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(b)\big)\right\|, \\ \|\varepsilon_a - \varepsilon_b\| &= \left\|\widetilde{D}f^{-1}(a) - \widetilde{D}f^{-1}(b)\right\|, \\ \|\beta_b\| &= \left\|-\Theta\Big(\widetilde{D}f^{-1}(b), n\Big)\right\| = \left\|\widetilde{D}f^{-1}(b)\right\| \leq \widetilde{K}, \\ \|\gamma_b\| &\leq \widetilde{K}, \qquad \|\delta_{a,b}\| \leq \widetilde{K}, \qquad \|\varepsilon_b\| \leq \widetilde{K}.\end{aligned}$$

Analogickým postupem k postupu s $\left\|(\beta_a-\beta_b)\gamma_a\delta_a\varepsilon_a\right\|$ tak obdržíme

$$\begin{aligned}
\left\|\alpha_b(\beta_a-\beta_b)\gamma_a\delta_a\right\| &\le \widetilde{C}_2\cdot\left\|\widetilde{D}f^{-1}(a)-\widetilde{D}f^{-1}(b)\right\| \\
\left\|\alpha_b\beta_b(\gamma_a-\gamma_b)\delta_a\right\| &\le \widetilde{C}_3\cdot\left\|\widetilde{D}^2f\big(f^{-1}(a)\big)-\widetilde{D}^2f\big(f^{-1}(b)\big)\right\| \\
\left\|\alpha_b\beta_b\gamma_b(\delta_a-\delta_b)\right\| &\le \widetilde{C}_4\cdot\left\|\widetilde{D}f^{-1}(a)-\widetilde{D}f^{-1}(b)\right\|.
\end{aligned}$$

Z případu $m=1$ víme

$$\left\|\widetilde{D}f^{-1}(a)-\widetilde{D}f^{-1}(b)\right\| \le C_{m=1}\cdot\left\|\widetilde{D}f\big(f^{-1}(a)\big)-\widetilde{D}f\big(f^{-1}(b)\big)\right\|.$$

Při složení všeho dohromady dostáváme

$$\begin{aligned}
\left\|D^2f^{-1}(a)-D^2f^{-1}(b)\right\| &\le (\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_2+\widetilde{C}_4)\cdot\left\|\widetilde{D}f^{-1}(a)-\widetilde{D}f^{-1}(b)\right\| \\
&\quad+\widetilde{C}_3\cdot\left\|\widetilde{D}^2f\big(f^{-1}(a)\big)-\widetilde{D}^2f\big(f^{-1}(b)\big)\right\| \\
&\le C_{m=1}\cdot(\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_2+\widetilde{C}_4)\cdot\left\|\widetilde{D}f\big(f^{-1}(a)\big)-\widetilde{D}f\big(f^{-1}(b)\big)\right\| \\
&\quad+\widetilde{C}_3\cdot\left\|\widetilde{D}^2f\big(f^{-1}(a)\big)-\widetilde{D}^2f\big(f^{-1}(b)\big)\right\| \\
&\le C\cdot\sum_{i=1}^{2}\left\|\widetilde{D}^if\big(f^{-1}(a)\big)-\widetilde{D}^if\big(f^{-1}(b)\big)\right\|,
\end{aligned}$$

což je hledaný závěr pro $m=2$.

Případ $m\ge 3$.

Pro indukci předpokládejme, že už jsme Lemma s $m=1,\dots,m_0-1$ dokázali a teď ho dokazujeme pro $m=m_0$. Existence derivací $\widetilde{D}^{m_0}f$ resp. $\widetilde{D}^{m_0}f^{-1}$ skoro všude v $f^{-1}(\Omega')$ resp. Ω' implikuje existenci derivací

$$\widetilde{D}^m f \qquad \text{resp.} \qquad \widetilde{D}^m f^{-1} \qquad \text{skoro všude v } f^{-1}(\Omega') \text{ resp. } \Omega'$$

pro všechna $m\in\{1,\dots,m_0-1\}$, přičemž u $\widetilde{D}^m f$ ve smyslu totálního diferenciálu. Jsou tedy splněny předpoklady Lemmatu i pro $m<m_0$ a pro $a,b\in\mathcal{A}_m$ platí nerovnost (3.9) s $m<m_0$ ($\mathcal{A}_m$ je množina z případu $m<m_0$). Zvolme nyní za $\mathcal{A}$ všechna taková $y\in Q(c,r)$, že v nich existují derivace

$$\widetilde{D}^m f^{-1}(y) \qquad \text{a} \qquad \widetilde{D}^m f\big(f^{-1}(y)\big) \qquad \text{pro každé } m\le m_0$$

(ty druhé ve smyslu totálního diferenciálu), dále že jsou v y splněny nerovnosti (3.8) a nakonec že $y\in\bigcap_{m=1}^{m_0-1}\mathcal{A}_m$. Každá z uvedených podmínek na body y z $\mathcal{A}$ platí pro skoro všechna $y\in Q(c,r)$, proto $\mathcal{L}_n(\mathcal{A})=\mathcal{L}_n\big(Q(c,r)\big)$.

Zvolme $a, b \in \mathcal{A}$. Abychom mohli provádět úpravy pod společnou derivací, zaveďme stejně jako v důkazu *Lemmatu 2.23* funkci $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$g(x) := x + (b - a).$$

Pro jednodušší úpravy opět označme

$$\begin{aligned}
\beta_a &= -\Theta\Big(Df^{-1}(a), n\Big), & \beta_b &= -\Theta\Big(Df^{-1}\big(g(a)\big), n\Big),\\
\gamma_a &= \Psi\Big(\big(Df^{-1}(a)\big)^T, n\Big), & \gamma_b &= \Psi\Big(\big(Df^{-1}\big(g(a)\big)\big)^T, n\Big),\\
\delta_a &= D^2 f\big(f^{-1}(a)\big), & \delta_b &= D^2 f\big(f^{-1}\big(g(a)\big)\big),\\
\varepsilon_a &= Df^{-1}(a), & \varepsilon_b &= Df^{-1}\big(g(a)\big).
\end{aligned}$$

S využitím (3.2) odhadujeme

$$\begin{aligned}
\Big\|\widetilde{D}^{m_0} f^{-1}(a) - \widetilde{D}^{m_0} f^{-1}(b)\Big\| &= \Big\|\widetilde{D}^{m_0-2}\big(\widetilde{D}^2 f^{-1}(a)\big) - \widetilde{D}^{m_0-2}\big(\widetilde{D}^2 f^{-1}(b)\big)\Big\|\\
&\overset{(3.2)}{=} \Big\|\widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_a\gamma_a\delta_a\varepsilon_a\big) - \widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_b\gamma_b\delta_b\varepsilon_b\big)\Big\|\\
&\leq \quad \big\|\widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_a\gamma_a\delta_a\varepsilon_a\big) - \widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_b\gamma_a\delta_a\varepsilon_a\big)\big\|\\
&\quad + \big\|\widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_b\gamma_a\delta_a\varepsilon_a\big) - \widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_b\gamma_b\delta_a\varepsilon_a\big)\big\|\\
&\quad + \big\|\widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_b\gamma_b\delta_a\varepsilon_a\big) - \widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_b\gamma_b\delta_b\varepsilon_a\big)\big\|\\
&\quad + \big\|\widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_b\gamma_b\delta_b\varepsilon_a\big) - \widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_b\gamma_b\delta_b\varepsilon_b\big)\big\|
\end{aligned}$$

Přepíšeme ještě poslední čtyři členy (to si můžeme dovolit právě díky využití funkce g).

$$\begin{aligned}
\Big\|\widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_a\gamma_a\delta_a\varepsilon_a\big) - \widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_b\gamma_a\delta_a\varepsilon_a\big)\Big\| &= \Big\|\widetilde{D}^{m_0-2}\Big(\big(\beta_a - \beta_b\big)\gamma_a\delta_a\varepsilon_a\Big)\Big\|,\\
\Big\|\widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_b\gamma_a\delta_a\varepsilon_a\big) - \widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_b\gamma_b\delta_a\varepsilon_a\big)\Big\| &= \Big\|\widetilde{D}^{m_0-2}\Big(\beta_b\big(\gamma_a - \gamma_b\big)\delta_a\varepsilon_a\Big)\Big\|,\\
\Big\|\widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_b\gamma_b\delta_a\varepsilon_a\big) - \widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_b\gamma_b\delta_b\varepsilon_a\big)\Big\| &= \Big\|\widetilde{D}^{m_0-2}\Big(\beta_b\gamma_b\big(\delta_a - \delta_b\big)\varepsilon_a\Big)\Big\|,\\
\Big\|\widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_b\gamma_b\delta_b\varepsilon_a\big) - \widetilde{D}^{m_0-2}\big(\beta_b\gamma_b\delta_b\varepsilon_b\big)\Big\| &= \Big\|\widetilde{D}^{m_0-2}\Big(\beta_b\gamma_b\delta_b\big(\varepsilon_a - \varepsilon_b\big)\Big)\Big\|.
\end{aligned}$$

A podle *Lemmatu 2.21* odhadneme první z posledních čtyř závorek. K tomu použijeme substituci

$$A_1 = \big(\beta_a - \beta_b\big), \qquad A_2 = \gamma_a, \qquad A_3 = \delta_a, \qquad A_4 = \varepsilon_a.$$

Platí

$$\big\|\widetilde{D}^{m_0-2}(A_1A_2A_3A_4)\big\| \leq C_{2.21} \cdot \sum_{\sum \alpha_i = m_0-2} \prod_{j=1}^{4} \big\|\widetilde{D}^{\alpha_j} A_j\big\|.$$

Odhadujme členy napravo. Konstanta C_{α_1} značí konstantu z tohoto Lemmatu pro $m = \alpha_1$.

Pro $0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \leq m_0 - 2$ platí

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{D}^{\alpha_2} A_2\right\| &= \left\|\widetilde{D}^{\alpha_2}\Big(\Psi\Big(\big(\widetilde{D} f^{-1}(a)\big)^T, n\Big)\Big)\right\| = \left\|\widetilde{D}^{\alpha_2+1} f^{-1}(a)\right\| \leq \widetilde{K} \\
\left\|\widetilde{D}^{\alpha_4} A_4\right\| &= \left\|\widetilde{D}^{\alpha_4}\big(\widetilde{D} f^{-1}(a)\big)\right\| = \left\|\widetilde{D}^{\alpha_4+1} f^{-1}(a)\right\| \leq \widetilde{K} \\
\left\|\widetilde{D}^{\alpha_1} A_1\right\| &= \left\|\widetilde{D}^{\alpha_1}\Big(-\Theta\Big(\widetilde{D} f^{-1}(a), n\Big) + \Theta\Big(\widetilde{D} f^{-1}(b), n\Big)\Big)\right\| \\
&= \left\|\widetilde{D}^{\alpha_1+1} f^{-1}(a) - \widetilde{D}^{\alpha_1+1} f^{-1}(b)\right\| \\
&\leq C_{\alpha_1} \cdot \sum_{i=1}^{\alpha_1+1} \left\|\widetilde{D}^i f\big(f^{-1}(a)\big) - \widetilde{D}^i f\big(f^{-1}(b)\big)\right\|.
\end{aligned}$$

Pro $1 \leq \alpha_3 \leq m_0 - 2$ podle *Lemmatu 2.22* dostaneme

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{D}^{\alpha_3} A_3\right\| &= \left\|\widetilde{D}^{\alpha_3}\big(\widetilde{D}^2 f(f^{-1}(a))\big)\right\| \\
&\leq C_{2.22} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{\alpha_3} \left\|D^i f^{-1}(a)\right\|\right)^{\alpha_3} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\alpha_3} \left\|D^i(\widetilde{D}^2 f)\big(f^{-1}(a)\big)\right\|\right) \\
&\leq C_{2.22} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{\alpha_3} \widetilde{K}\right)^{\alpha_3} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\alpha_3} \widetilde{K}\right) \leq \widehat{K}.
\end{aligned}$$

Pro $\alpha_3 = 0$ odhadneme

$$\left\|\widetilde{D}^{\alpha_3} A_3\right\| = \left\|\widetilde{D}^0\big(\widetilde{D}^2 f(f^{-1}(a))\big)\right\| \leq \widetilde{K}.$$

Označme $\widetilde{M} = \max\{\widetilde{K}, \widehat{K}\}$. Pak platí

$$\begin{aligned}
C_{2.21} \cdot \sum_{\sum \alpha_i = m_0 - 2} \prod_{j=1}^{4} \left\|\widetilde{D}^{\alpha_j} A_j\right\| &\leq \\
&\leq C_{2.21} \cdot \sum_{\sum \alpha_i = m_0 - 2} \left(\widetilde{M}^3 \cdot C_{\alpha_1} \cdot \sum_{i=1}^{\alpha_1+1} \left\|\widetilde{D}^i f\big(f^{-1}(a)\big) - \widetilde{D}^i f\big(f^{-1}(b)\big)\right\|\right) \\
&\leq C \cdot \sum_{i=1}^{m_0-1} \left\|\widetilde{D}^i f\big(f^{-1}(a)\big) - \widetilde{D}^i f\big(f^{-1}(b)\big)\right\|.
\end{aligned}$$

V předchozí sumě se opět sčítá přes všechny kombinace $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, jejichž součet je $m_0 - 2$. Počet těchto kombinací je konečné číslo, proto existuje konstanta C, která omezuje poslední odhad.

Analogicky jako člen

$$\left\|\widetilde{D}^{m_0-2}\Big(\big(\beta_a - \beta_b\big)\gamma_a \delta_a \varepsilon_a\Big)\right\|$$

odhadneme i členy

$$\left\|\widetilde{D}^{m_0-2}\Big(\beta_b\big(\gamma_a-\gamma_b\big)\delta_a\varepsilon_a\Big)\right\| \qquad \text{a} \qquad \left\|\widetilde{D}^{m_0-2}\Big(\beta_b\gamma_b\delta_b\big(\varepsilon_a-\varepsilon_b\big)\Big)\right\|.$$

Rozdíl je u

$$\left\|\widetilde{D}^{m_0-2}\Big(\beta_b\gamma_b\big(\delta_a-\delta_b\big)\varepsilon_a\Big)\right\|,$$

který odhadneme zvlášť. Označíme

$$A_1=\beta_b, \qquad A_2=\gamma_b, \qquad A_3=\big(\delta_a-\delta_b\big), \qquad A_4=\varepsilon_a.$$

a opět odhadneme

$$\big\|\widetilde{D}^{m_0-2}(A_1A_2A_3A_4)\big\| \le C_{2.21}\cdot \sum_{\sum\alpha_i=m_0-2}\ \prod_{j=1}^{4}\big\|\widetilde{D}^{\alpha_j}A_j\big\|.$$

Stejně jako v předchozím případu $m=2$ omezíme

$$\begin{aligned}
\big\|\widetilde{D}^{\alpha_1}A_1\big\| &= \left\|\widetilde{D}^{\alpha_1}\Big(-\Theta\big(\widetilde{D}f^{-1}(b),n\big)\Big)\right\| = \left\|\widetilde{D}^{\alpha_1+1}f^{-1}(b)\right\| \le \widetilde{K},\\
\big\|\widetilde{D}^{\alpha_2}A_2\big\| &= \left\|\widetilde{D}^{\alpha_1}\Big(\Xi\big(\widetilde{D}f^{-1}(b),n\big)\Big)\right\| = \left\|\widetilde{D}^{\alpha_2+1}f^{-1}(b)\right\| \le \widetilde{K},\\
\big\|\widetilde{D}^{\alpha_4}A_4\big\| &= \left\|\widetilde{D}^{\alpha_4}\Big(\widetilde{D}f^{-1}(a)\Big)\right\| = \left\|\widetilde{D}^{\alpha_4+1}f^{-1}(a)\right\| \le \widetilde{K}.
\end{aligned}$$

S použitím *Lemmatu 2.21* a indukčního předpokladu pro $m \le m_0-2$ odhadneme i

$\|\widetilde{D}^{\alpha_3}A_3\|$. Odhad $\|\widetilde{D}^{\alpha_3}A_3\|$ se však liší

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{D}^{\alpha_3}A_3\| &= \Big\|\widetilde{D}^{\alpha_3}\Big(\widetilde{D}^2 f\circ f^{-1} - \widetilde{D}^2 f\circ f^{-1}\circ g\Big)(a)\Big\| \leq \\
&\leq C_{2.21}\cdot\Big(1+\sum_{i=1}^{\alpha_3}\Big\|\widetilde{D}^i f^{-1}(a)\Big\|\Big)^{\alpha_3}\cdot\Big(1+\sum_{i=1}^{\alpha_3}\Big\|\widetilde{D}^i f^{-1}\circ g(a)\Big\|\Big)^{\alpha_3}\cdot\Big(1+\sum_{i=1}^{\alpha_3}\Big\|\widetilde{D}^i(\widetilde{D}^2 f)\circ f^{-1}(a)\Big\|\Big)\\
&\quad\cdot\Big(\sum_{i=1}^{\alpha_3}\Big\|\widetilde{D}^i f^{-1}(a) - \widetilde{D}^i f^{-1}\circ g(a)\Big\| + \sum_{i=1}^{\alpha_3}\Big\|\widetilde{D}^i(\widetilde{D}^2 f)\circ f^{-1}(a) - \widetilde{D}^i(\widetilde{D}^2 f)\circ f^{-1}\circ g(a)\Big\|\Big)\\
&\leq C_{2.21}\cdot\Big(1+\sum_{i=1}^{\alpha_3}\widetilde{K}\Big)^{\alpha_3}\cdot\Big(1+\sum_{i=1}^{\alpha_3}\widetilde{K}\Big)^{\alpha_3}\cdot\Big(1+\sum_{i=1}^{\alpha_3}\widetilde{K}\Big)\\
&\quad\cdot\Big(\sum_{i=1}^{\alpha_3}\Big\|\widetilde{D}^i f^{-1}(a) - \widetilde{D}^i f^{-1}\circ g(a)\Big\| + \sum_{i=1}^{\alpha_3}\Big\|\widetilde{D}^i(\widetilde{D}^2 f)\circ f^{-1}(a) - \widetilde{D}^i(\widetilde{D}^2 f)\circ f^{-1}\circ g(a)\Big\|\Big)\\
&\leq \widehat{K}\cdot\Big(\sum_{i=1}^{m_0-2}\Big\|\widetilde{D}^i f^{-1}(a) - \widetilde{D}^i f^{-1}\circ g(a)\Big\| + \sum_{i=1}^{m_0}\Big\|\widetilde{D}^i f\circ f^{-1}(a) - \widetilde{D}^i f\circ f^{-1}\circ g(a)\Big\|\Big)\\
&\leq \widehat{K}\cdot\Big(\sum_{i=1}^{m_0-2}\Big(C_i\cdot\sum_{j=1}^{i}\Big\|\widetilde{D}^j f\circ f^{-1}(a) - \widetilde{D}^j f\circ f^{-1}\circ g(a)\Big\|\Big)\\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{m_0}\Big\|\widetilde{D}^i f\circ f^{-1}(a) - \widetilde{D}^i f\circ f^{-1}\circ g(a)\Big\|\Big)\\
&\leq \widehat{K}\cdot\max C_i\cdot m_0\cdot\sum_{i=1}^{m_0}\Big\|\widetilde{D}^i f\circ f^{-1}(a) - \widetilde{D}^i f\circ f^{-1}\circ g(a)\Big\|.
\end{aligned}
$$

Zakomponujme odhady do předchozího výsledku:

$$
\begin{aligned}
&C_{2.21}\cdot\sum_{\substack{\sum\alpha_{i'}=m_0-2\\ \alpha_1,\dots,\alpha_4\geq 0}}\prod_{j=1}^{4}\|\widetilde{D}^{\alpha_j}A_j\| \leq\\
&\quad\leq C_{2.21}\cdot\sum_{\substack{\sum\alpha_{i'}=m_0-2\\ \alpha_1,\dots,\alpha_4\geq 0}}\Big(\widetilde{K}^3\cdot\widehat{K}\cdot\max C_i\cdot m_0\cdot\sum_{i=1}^{m_0}\Big\|\widetilde{D}^i f\circ f^{-1}(a) - \widetilde{D}^i f\circ f^{-1}\circ g(a)\Big\|\Big)\\
&\quad\leq C\cdot\sum_{i=1}^{m_0}\Big\|\widetilde{D}^i f\big(f^{-1}(a)\big) - \widetilde{D}^i f\big(f^{-1}(b)\big)\Big\|.
\end{aligned}
$$

Celkově pro nějaké C nezávislé na volbě $a, b \in \mathcal{A}$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{D}^{m_0} f^{-1}(a) - \widetilde{D}^{m_0} f^{-1}(b)\right\| \leq \quad & \left\|\widetilde{D}^{m_0-2}\Big(\big(\beta_a - \beta_b\big)\gamma_a\delta_a\varepsilon_a\Big)\right\| \\
+ \quad & \left\|\widetilde{D}^{m_0-2}\Big(\beta_b\big(\gamma_a - \gamma_b\big)\delta_a\varepsilon_a\Big)\right\| \\
+ \quad & \left\|\widetilde{D}^{m_0-2}\Big(\beta_b\gamma_b\big(\delta_a - \delta_b\big)\varepsilon_a\Big)\right\| \\
+ \quad & \left\|\widetilde{D}^{m_0-2}\Big(\beta_b\gamma_b\delta_b\big(\varepsilon_a - \varepsilon_b\big)\Big)\right\| \\
\leq C \cdot \sum_{i=1}^{m_0} & \left\|\widetilde{D}^i f\big(f^{-1}(a)\big) - \widetilde{D}^i f\big(f^{-1}(b)\big)\right\|.
\end{aligned}$$

Případ $m \geq 3$ dořešen. □

3.3. Hlavní věty

Věta 3.6. *Nechť $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené, $k \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že $f : \Omega \xrightarrow{\text{na}} \Omega'$ je bilipschitzovské zobrazení takové, že $f \in W^{k+1,p}_{\text{loc}}\big(\Omega, \mathbb{R}^n\big) \cap W^{k,\infty}_{\text{loc}}\big(\Omega, \mathbb{R}^n\big)$. Potom i $f^{-1} \in W^{k+1,p}_{\text{loc}}\big(\Omega', \mathbb{R}^n\big)$.*

Důkaz. Větu dokážeme indukcí podle k.

Případ $k = 1$.

Podle *Poznámky 1.11* je případ $k = 1$ ekvivalentní s důkazem $Df^{-1} \in W^{1,p}_{\text{loc}}$ a $f^{-1} \in L^p_{\text{loc}}$. Protože je f^{-1} Lipschitzovská, tak je na omezené měřitelné množině omezená a integrovatelná, platnost $f^{-1} \in L^p_{\text{loc}}$ máme tak automaticky. Podle *Věty 1.18* ukážeme, že Df^{-1} splňuje ACL podmínku na skoro všech úsečkách rovnoběžných s osami souřadnic a že platí (1.1). Protože Df^{-1} je absolutně spojitá, právě když je $\widetilde{D}f^{-1}$ absolutně spojitá a ekvivalence mezi Df^{-1} a $\widetilde{D}f^{-1}$ platí i u integrálu v (1.1), stačí ukázat zmíněné vlastnosti pro novou derivaci $\widetilde{D}f^{-1}$.

Z *Věty 1.20* víme $\widetilde{D}f \circ f^{-1} \in W^{1,p}_{\text{loc}}$. Zvolme $Q(c, r) \subset \Omega'$ a $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pro $y \in Q^i(c, r)$ označme $h_{i,y}$ dobrého reprezentanta $\widetilde{D}f \circ f^{-1}$ z *Věty 1.18* a položme $h_{i,y}(t) := h(y + t\mathbf{e}_i)$ pro $t \in (c_i - r, c_i + r)$. Díky lipschitzovskosti f pro skoro všechna $y \in Q(c, r)$ platí $\left\|\widetilde{D}f\big(f^{-1}(y)\big)\right\| \leq K$ pro nějakou konstantu $K \in \mathbb{R}$. Podle *Tvrzení 1.15* existuje i totální diferenciál $\widetilde{D}f$ skoro všude. Potom podle *Lemmatu 3.5* existují konstanta $C \in \mathbb{R}$ a podmnožina $\mathcal{A} \subset Q(c, r)$ takové, že

$$\mathcal{L}_n(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_n\big(Q(c, r)\big),$$

dále že pro každé $x \in f^{-1}(\mathcal{A})$ a každé $y \in \mathcal{A}$ existují obě derivace

$$\widetilde{D}f(x) \qquad \text{a} \qquad \widetilde{D}f^{-1}(y),$$

a pro každé $a, b \in \mathcal{A}$ platí

$$\left\|\widetilde{D}f^{-1}(a) - \widetilde{D}f^{-1}(b)\right\| \leq C \cdot \left\|\widetilde{D}f\big(f^{-1}(a)\big) - \widetilde{D}f\big(f^{-1}(b)\big)\right\|.$$

Zafixujme $y \in Q^i(c,r)$ takové, že $h_{i,y}$ je absolutně spojitá na $(c_i - r, c_i + r)$. Nechť $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^J$ je systém po dvou disjunktních intervalů náležících do intervalu $(c_i - r, c_i + r)$ takových, že $A_j := y + a_j\mathbf{e}_i \in \mathcal{A}$ a $B_j := y + b_j\mathbf{e}_i \in \mathcal{A}$ pro každé $j \in \{1, \dots, J\}$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a z absolutní spojitosti $h_{i,y}$ vyberme $\delta > 0$ takové, že pro všechna $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^J$ splňující $\sum(b_j - a_j) < \delta$ platí

$$\sum_{j=1}^J \big\|h_{i,y}(a_j) - h_{i,y}(b_j)\big\| < \varepsilon.$$

Potom (s využitím závěru *Lemmatu 3.5*)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^J \left\|\widetilde{D}f^{-1}(A_j) - \widetilde{D}f^{-1}(B_j)\right\| &\leq C \cdot \sum_{j=1}^J \left\|\widetilde{D}f\big(f^{-1}(A_j)\big) - \widetilde{D}f\big(f^{-1}(B_j)\big)\right\| \\ &= C \cdot \sum_{j=1}^J \big\|h_{i,y}(a_j) - h_{i,y}(b_j)\big\| \leq C \cdot \varepsilon,\end{aligned}$$

přičemž konstanta C je nezávislá na volbě y, i a ε. Odtud plyne, že funkce $g_{y,i}(t) := \widetilde{D}f^{-1}(y + t\mathbf{e}_i)$ je na $(c_i - r, c_i + r) \cap \mathcal{A}$ absolutně spojitá. Z $\mathcal{L}_n\big(\mathcal{A}\big) = \mathcal{L}_n\big(Q(c,r)\big)$ plyne, že $\mathcal{L}_1\big(\pi_i^{-1}(y) \cap \mathcal{A}\big) = 2r$ pro $\mathcal{L}_{n-1}$-skoro všechna $y \in Q^i(c,r)$. Uvažujme tedy taková $y \in Q^i(c,r)$, že jsou funkce $g_{y,i}$ absolutně spojité na $(c_i - r, c_i + r) \cap \mathcal{A}$ a navíc, že $\mathcal{L}_1\big((c_i - r, c_i + r) \cap \mathcal{A}\big) = 2r$ (stále jsou to $\mathcal{L}_{n-1}$-skoro všechna $y \in Q^i(c,r)$). Podle *Lemmatu 1.22* existuje reprezentant $\tilde{g}_{y,i}$ absolutně spojitý na $(c_i - r, c_i + r)$ takový, že $\tilde{g}_{y,i} = g_{y,i}$ na $(c_i - r, c_i + r) \cap \mathcal{A}$. Díky nezávislé volbě y a $Q(c,r)$ má $\widetilde{D}f^{-1}$ reprezentanta, který splňuje ACL podmínku na skoro všech úsečkách z Ω' rovnoběžných s osou $\mathbf{x}_i$. Proto existují parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x_i}$ funkcí (prvků) matice $\widetilde{D}f^{-1}$ pro skoro všechny body z Ω'. Také i jsme volili libovolně, proto existují všechny parciální derivace funkcí z matice $\widetilde{D}f^{-1}$ pro skoro všechny body z Ω'. Skoro všude na Ω' tedy existuje derivace $\widetilde{D}^2 f^{-1}$. Jsou splněny podmínky *Lemmatu 3.4*, podle kterého pro nějakou konstantu $\widetilde{C}$ pro skoro každé $y \in \Omega'$ platí

$$\big\|\widetilde{D}^2 f^{-1}(y)\big\| \leq \widetilde{C}\Big(\big\|\widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big)\big\| + 1\Big).$$

Pro kompaktní množinu $\Omega_K \subset \Omega'$ tím dostáváme

$$\int\limits_{\Omega_K} \big\|\widetilde{D}^2 f^{-1}(y)\big\|^p \mathrm{d}y \leq \int\limits_{\Omega_K} \bigg(\widetilde{C}\Big(\big\|\widetilde{D}^2 f\big(f^{-1}(y)\big)\big\| + 1\Big)\bigg)^p \mathrm{d}y.$$

S úpravou podle nerovnosti $(a+b)^p \leq 2^p(a^p+b^p)$ máme

$$\int\limits_{\Omega_K} \Big(\widetilde{C}\Big(\big\|\widetilde{D}^2 f(f^{-1}(y))\big\|+1\Big)\Big)^p \mathrm{d}y \leq 2^p \widetilde{C}^p \int\limits_{\Omega_K} \Big(\big\|\widetilde{D}^2 f(f^{-1}(y))\big\|^p + 1^p\Big)\mathrm{d}y$$

$$\leq C\Big(\int\limits_{\Omega_K} \big\|\widetilde{D}^2 f(f^{-1}(y))\big\|^p \mathrm{d}y + \mathcal{L}_n(\Omega_K)\Big).$$

Protože Ω_K je omezená a $\widetilde{D}f \circ f^{-1} \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, víme

$$\mathcal{L}_n(\Omega_K) < \infty \qquad \text{a} \qquad \int\limits_{\Omega_K} \big\|\widetilde{D}^2 f(f^{-1}(y))\big\|^p \mathrm{d}y < \infty,$$

dostáváme tím podle *Věty 1.18* závěr $\widetilde{D}f^{-1} \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ a tedy i $Df^{-1} \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$.

Případ $k \geq 2$.

Předpokládejme, že jsme už Větu dokázali pro $k = 1, \dots, k_0 - 1$ a teď ji chceme dokázat pro $k = k_0$. Dokazované tvrzení je podle *Poznámky 1.11* ekvivalentní tomu, že $f^{-1} \in L^p_{\mathrm{loc}}$ a $D^{k_0-1}f^{-1} \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$. Vlastnost $f^{-1} \in L^p_{\mathrm{loc}}$ plyne automaticky z lipschitzovskosti f^{-1}. U důkazu druhé vlastnosti budeme postupovat opět podle *Věty 1.18.* Ukážeme, že $D^{k_0-1}f^{-1}$ má reprezentanta absolutně spojitého na skoro všech úsečkách rovnoběžných s osami souřadnic a že platí (1.1). Předchozí fakty platí pro $D^{k_0-1}f^{-1}$, právě když platí pro $\widetilde{D}^{k_0-1}f^{-1}$, proto je stačí ukázat pro $\widetilde{D}^{k_0-1}f^{-1}$. Zvolme $Q(c,r) \subset \Omega'$ a pevné $i \in \{1, \dots, n\}$.

Z $f \in W^{k_0+1,p}_{\mathrm{loc}} \cap W^{k_0,\infty}_{\mathrm{loc}}$ víme $f \in W^{k_0,p}_{\mathrm{loc}} \cap W^{k_0-1,\infty}_{\mathrm{loc}}$ a díky předpokladu platnosti Věty pro $k = k_0 - 1$ víme $f^{-1} \in W^{k_0,p}_{\mathrm{loc}}$. Z toho plyne existence derivace $D^{k_0}f^{-1}$ a potažmo $\widetilde{D}^{k_0}f^{-1}$ skoro všude v $Q(c,r)$. Jsou tak splněny podmínky *Lemmatu 3.4*. Podle něj existuje konstanta $\widetilde{K}$ taková, že pro skoro všechna $y \in Q(c,r)$ platí

$$\big\|\widetilde{D}^j f\big(f^{-1}(y)\big)\big\| \leq \widetilde{K} \qquad \text{a} \qquad \big\|\widetilde{D}^j f^{-1}(y)\big\| \leq \widetilde{K} \qquad \text{pro } j \in \{1, \dots, k_0 - 1\}.$$

Jelikož bilipschitzovské zobrazení f^{-1} zobrazuje množiny nulové míry na množiny nulové míry, tak z $f \in W^{k_0,p}_{\mathrm{loc}}$ (bez újmy na obecnosti pro stejné $\widetilde{K}$) dostáváme

$$\big\|\widetilde{D}^{k_0} f\big(f^{-1}(y)\big)\big\| \leq \widetilde{K}$$

pro skoro všechna $y \in Q(c,r)$. Podle *Tvrzení 1.14* plyne z $f \in W^{k_0,\infty}$, že existuje Lipschitzovský reprezentant funkce $\widetilde{D}^{k_0-1}f$ a ten má podle *Tvrzení 1.15* totální diferenciál $\widetilde{D}^{k_0}f$ skoro všude. Díky tomu podle *Lemmatu 3.5* existuje konstanta C a podmnožina $\mathcal{A} \subset Q(c,r)$ taková, že

$$\mathcal{L}_n(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_n\big(Q(c,r)\big),$$

že pro každé $x \in f^{-1}(\mathcal{A})$ a každé $y \in \mathcal{A}$ existují všechny derivace

$$\widetilde{D}^j f(x) \qquad \text{a} \qquad \widetilde{D}^j f^{-1}(y), \qquad \text{kde } j \in \{1, \dots, k_0\},$$

a že pro každé $a, b \in \mathcal{A}$ platí

$$\left\| \widetilde{D}^{k_0} f^{-1}(a) - \widetilde{D}^{k_0} f^{-1}(b) \right\| \leq C \cdot \sum_{j=1}^{k_0} \left\| \widetilde{D}^j f\big(f^{-1}(a)\big) - \widetilde{D}^j f(f^{-1}(b)) \right\|.$$

Z *Tvrzení 1.10* a *Poznámky 1.11* dostáváme, že z $f \in W^{k_0+1,p}_{\mathrm{loc}}\big(\Omega, \mathbb{R}^n\big)$ plyne $\widetilde{D}^k f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}\big(\Omega, \mathbb{R}^n\big)$ pro $k = 1, \dots, k_0$. Proto podle *Věty 1.20* pro každé $k = 1, \dots, k_0$ platí $\widetilde{D}^k f \circ f^{-1} \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}\big(\Omega', \mathbb{R}^n\big)$. To využijeme podle *Věty 1.18* k absolutní spojitosti funkcí $\widetilde{D}^k f \circ f^{-1}$ na úsečkách.

Zafixujme $y \in Q^i(c, r)$. Nechť $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^J$ je od teď vždy posloupnost po dvou disjunktních intervalů náležících do intervalu $(c_i - r, c_i + r)$ taková, že $A_j := y + a_j \mathbf{e}_i \in \mathcal{A}$ a $B_j := y + b_j \mathbf{e}_i \in \mathcal{A}$ pro každé $j \in \{1, \dots, J\}$. Označme dále pro každou funkci $\widetilde{D}^k f \circ f^{-1}$ jejího dobrého reprezentanta h^k (podle *Věty 1.18*), $k \in \{1, \dots, k_0\}$. Dobrým reprezentantem máme na mysli toho, který je na skoro všech úsečkách rovnoběžných se soustavou souřadnic absolutně spojitý. Dále položme $h^k_{i,y}(t) := h^k(y + t\mathbf{e}_i)$ pro $t \in (c_i - r, c_i + r)$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a pro každé $k \in \{1, \dots, k_0\}$ nalezněme $\delta_k > 0$ (z absolutní spojitosti funkcí $h^k_{i,y}$), aby platilo

$$\text{jestliže} \quad \sum_{j=1}^J |b_j - a_j| < \delta_k, \quad \text{tak potom} \quad \sum_{j=1}^J \left\| h^k_{i,y}(b_j) - h^k_{i,y}(a_j) \right\| \leq \varepsilon.$$

Vezměme $\delta = \min \delta_k$.

Pak pro všechny $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^J$ s celkovou délkou menší než δ dostáváme

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^J \left\| \widetilde{D}^{k_0} f^{-1}(B_j) - \widetilde{D}^{k_0} f^{-1}(A_j) \right\| &\leq C \cdot \sum_{j=1}^J \sum_{j'=1}^{k_0} \left\| \widetilde{D}^{j'} f\big(f^{-1}(B_j)\big) - \widetilde{D}^{j'} f\big(f^{-1}(A_j)\big) \right\| \\
&\leq C \cdot \sum_{j'=1}^{k_0} \sum_{j=1}^J \left\| h^{j'}_{i,y}(b_j) - h^{j'}_{i,y}(a_j) \right\| \\
&\leq C \cdot k_0 \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Označme $g_{y,i}(t) := \widetilde{D}^{k_0} f^{-1}(y + t\mathbf{e}_i)$ pro $t \in (c_i - r, c_i + r) \cap \mathcal{A}$. Funkce $g_{y,i}$ je tedy absolutně spojitá na $(c_i - r, c_i + r) \cap \mathcal{A}$. Z $\mathcal{L}_n\big(\mathcal{A}\big) = \mathcal{L}_n\big(Q(c, r)\big)$ plyne, že $\mathcal{L}_1\big(\pi_i^{-1}(y) \cap \mathcal{A}\big) = 2r$ pro $\mathcal{L}_{n-1}$-skoro všechna $y \in Q^i(c, r)$. Uvažujme tedy taková $y \in Q^i(c, r)$, že jsou funkce $g_{y,i}$ absolutně spojité na $(c_i - r, c_i + r) \cap \mathcal{A}$ a navíc, že $\mathcal{L}_1\big((c_i - r, c_i + r) \cap \mathcal{A}\big) = 2r$ (stále jsou to $\mathcal{L}_{n-1}$-skoro všechna $y \in Q^i(c, r)$). Podle *Lemmatu 1.22* existuje absolutně spojité rozšíření $\tilde{g}_{y,i}$ celý interval $(c_i - r, c_i + r)$. Zobrazení $\widetilde{D}^{k_0} f^{-1}$ má tedy v $Q(c, r)$ absolutně spojitého reprezentanta na skoro všech přímkách rovnoběžných s osou $\mathbf{x}_i$. Parciální derivace podle i-té souřadnice $\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{D}^{k_0}f^{-1}$ tak existují skoro všude v $Q(c,r)$. Číslo $i \in \{1,\dots,n\}$ jsme volili libovolně a díky tomu existují derivace $\widetilde{D}^{k_0+1}f^{-1}$ (ve smyslu parciálních derivací) skoro všude v $Q(c,r)$. Krychli $Q(c,r)$ jsme volili v Ω' libovolně, proto existují derivace $\widetilde{D}^{k_0+1}f^{-1}$ skoro všude v Ω' a můžeme je integrovat. Pro každý kompakt $\Omega_K \subset \Omega'$ tak podle *Lemmatu 3.4* pro nějakou konstantu $\widetilde{C}$ platí

$$\int_{\Omega_K} \|D^{k_0+1}f^{-1}(y)\|^p \mathrm{d}y \le \int_{\Omega_K} \Big(\widetilde{C}\Big(\|D^{k_0+1}f(f^{-1}(y))\| + 1\Big)\Big)^p \mathrm{d}y,$$

pomocí nerovnosti $(x+y)^p \le 2^p(x^p + y^p)$ pokračujeme

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_K} \Big(\widetilde{C}\Big\|\widetilde{D}^{k_0+1}f\big(f^{-1}(y)\big)\Big\| + \widetilde{C}\Big)^p \mathrm{d}y &\le 2^p\widetilde{C}^p \int_{\Omega_K} \Big(\|\widetilde{D}^{k_0+1}f(f^{-1}(y))\|^p + 1^p\Big)\mathrm{d}y \\ &\le C\Big(\int_{\Omega_K} \|\widetilde{D}^{k_0+1}f(f^{-1}(y))\|^p \mathrm{d}y + \mathcal{L}_n(\Omega_K)\Big).\end{aligned}$$

Protože $\widetilde{D}^{k_0}f \circ f^{-1} \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, máme

$$\int_{\Omega_K} \Big\|\widetilde{D}^{k_0+1}f\big(f^{-1}(y)\big)\Big\|^p \mathrm{d}y < \infty,$$

tedy i

$$\int_{\Omega_K} \Big\|\widetilde{D}^{k_0+1}f^{-1}(y)\Big\|^p \mathrm{d}y < \infty$$

a podle *Věty 1.18* konečně $\widetilde{D}^{k_0}f^{-1} \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ a tedy i $f^{-1} \in W^{k_0+1,p}_{\mathrm{loc}}$. □

Věta 3.7. *Nechť $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené, $k \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že $f : \Omega \xrightarrow{\text{na}} \Omega'$ je bilipschitzovské zobrazení takové, že $D^k f \in BV_{\mathrm{loc}}\big(\Omega, \mathbb{R}^{n^{k+1}}\big)$ a že $f \in W^{k,\infty}_{\mathrm{loc}}\big(\Omega, \mathbb{R}^n\big)$. Potom i $D^k f^{-1} \in BV_{\mathrm{loc}}\big(\Omega', \mathbb{R}^{n^{k+1}}\big)$.*

Důkaz. Důkaz povedeme indukcí podle k.

Případ $k = 1$.

Zafixujme $Q(c,r) \subset \Omega'$ a $i \in \{1,\dots,n\}$. Potřebujeme ukázat, že nějaký reprezentant funkce Df^{-1} má konečnou variaci na skoro všech úsečkách rovnoběžných s osou $\mathbf{x}_i$ a že je potřebný integrál (1.2) konečný, z čehož podle *Věty 1.19* vyplyne $Df^{-1} \in BV_{\mathrm{loc}}$. Důkaz stačí provést pro derivaci $\widetilde{D}$, jelikož se podle definice shoduje s klasickou derivací D.

Z *Věty 1.21* víme, že $\widetilde{D}f \circ f^{-1} \in BV_{\mathrm{loc}}$. Označme h dobrého reprezentanta funkce $\widetilde{D}f \circ f^{-1}$ z *Věty 1.19* a položme $h_{i,y}(t) := h(y + t\mathbf{e}_i)$ pro $y \in Q^i(c,r)$ a $t \in (c_i - r, c_i + r)$. Z (1.2) máme

$$\int_{Q^i(c,r)} V\Big(h_{i,y}, (c_i - r, c_i + r)\Big)\mathrm{d}y < \infty. \tag{3.10}$$

Podle *Tvrzení 1.15* existuje totální diferenciál $\widetilde{D}f$ díky lipschitzovskosti f skoro všude. Dobrý reprezentant h se shoduje s původní funkcí skoro všude a také nerovnost (3.9) platí podle *Lemmatu 3.5* skoro všude na $Q(c,r)$. Označme $\mathcal{A}$ množinu takových $a, b \in Q(c,r)$, pro které existuje $\widetilde{D}f$ v $f^{-1}(a)$, $h(a) = \widetilde{D}f \circ f^{-1}(a)$ a ve kterých je splněna nerovnost (3.9) (pro případ $m = 1$):

$$\left\|\widetilde{D}f^{-1}(a) - \widetilde{D}f^{-1}(b)\right\| \le C \cdot \left\|\widetilde{D}f\big(f^{-1}(a)\big) - \widetilde{D}f\big(f^{-1}(a)\big)\right\|. \tag{3.11}$$

Předchozí fakty platí skoro všude na $Q(c,r)$ či na $f^{-1}\big(Q(c,r)\big)$ a bilipschitzovské zobrazení zobrazuje množiny nulové míry na množiny nulové míry, proto z předchozích úvah plyne $\mathcal{L}_n\big(\mathcal{A}\big) = \mathcal{L}_n\big(Q(c,r)\big)$.

Zafixujme $y \in Q^i(c,r)$ a nechť $\big\{(a_j, b_j)\big\}_{j=1}^J$ je systém po dvou disjunktních intervalů obsažených v $(c_i - r, c_i + r)$ takových, že $A_j := y + a_j\mathbf{e}_i \in \mathcal{A}$ a $B_j := y + b_j\mathbf{e}_i \in \mathcal{A}$ pro každé j.

Podle nerovnosti (3.11) je

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\left\|\widetilde{D}f^{-1}(A_j) - \widetilde{D}f^{-1}(B_j)\right\| &\le C\sum_{j=1}^{k}\left\|\widetilde{D}f\big(f^{-1}(A_j)\big) - \widetilde{D}f\big(f^{-1}(B_j)\big)\right\| \\ &\le C \cdot V\Big(h_{i,y}, (c_i - r, c_i + r)\Big).\end{aligned}$$

Označme funkci $u_{i,y}(t) := \widetilde{D}f^{-1}(y + t\mathbf{e}_i)$ a interval $I_i := (c_i - r, c_i + r)$. Pak

$$\begin{aligned}V\Big(u_{i,y}, I_i \cap \mathcal{A}\Big) &= \sup_{\substack{\{(a_j,b_j)\}_{j=1}^J \subset I_i,\\ a_j, b_j \in \mathcal{A},\ k \in \mathbb{N},\\ a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < a_J < b_J}} \left\{\sum_{j=1}^{k}\left\|u_{i,y}(a_j) - u_{i,y}(b_j)\right\|\right\} \\ &\le C \cdot V\Big(h_{i,y}, (c_i - r, c_i + r)\Big).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Podle *Věty 1.19* platí $V\Big(h_{i,y}, (c_i - r, c_i + r)\Big) < \infty$, proto platí také $V\big(u_{i,y}, I_i \cap \mathcal{A}\big) < \infty$. Z $\mathcal{L}_n\big(\mathcal{A}\big) = \mathcal{L}_n\big(Q(c,r)\big)$ plyne, že $\mathcal{L}_1\big(\pi_i^{-1}(y) \cap \mathcal{A}\big) = 2r$ pro $\mathcal{L}_{n-1}$-skoro všechna $y \in Q^i(c,r)$. Uvažujme tedy taková $y \in Q^i(c,r)$, že má reprezentant $u_{y,i}$ konečné variace na $(c_i - r, c_i + r) \cap \mathcal{A}$ a navíc, že $\mathcal{L}_1\big((c_i - r, c_i + r) \cap \mathcal{A}\big) = 2r$ (stále jsou to $\mathcal{L}_{n-1}$-skoro všechna $y \in Q^i(c,r)$). Podle *Lemmatu 1.24* existuje reprezentant $\tilde{u}_{i,y} : I_i \to \mathbb{R}^{n^2}$ takový, že na množině $I_i \cap \mathcal{A}$ platí $\tilde{u}_{i,y} = u_{i,y}$ a navíc

$$V\Big(\tilde{u}_{i,y}, (c_i - r, c_i + r)\Big) = V\Big(u_{i,y}, I_i \cap \mathcal{A}\Big) < \infty. \tag{3.13}$$

Reprezentant funkce $\widetilde{D}f^{-1}$, který má ve zvolené krychli $Q(c,r)$ konečnou variaci na skoro všech úsečkách rovnoběžných se soustavou souřadnic, tedy existuje.

Složením nerovností (3.10) a (3.12) a rovnosti v (3.13) dostáváme

$$\int\limits_{Q^i(c,r)} V\Big(\tilde{u}_{i,y},(c_i-r,c_i+r)\Big) < \infty.$$

Funkce $\widetilde{D}f^{-1}$ splňuje obě podmínky obrácené implikace z *Věty 1.19*, z toho plyne závěr $\widetilde{D}f^{-1} \in BV_{\text{loc}}$ a tedy i $Df^{-1} \in BV_{\text{loc}}$.

Případ $k = k_0 \geq 2$.

Tvrzení $D^{k_0}f^{-1} \in BV_{\text{loc}}$ je ekvivalentní tvrzení $\widetilde{D}^{k_0}f^{-1} \in BV_{\text{loc}}$, dokážeme tedy to druhé. Důkaz povedeme ověřováním podmínek opačné implikace z *Věty 1.19*. Zvolme $Q(c,r) \subset \Omega'$ a $i \in \{1,\dots,n\}$. Dokazujeme tedy, že $\widetilde{D}^{k_0}f^{-1}$ má reprezentanta, který má konečnou varivaci na skoro všech úsečkách obsažených v $Q(c,r)$ rovnoběžných s osou $\mathbf{x}_i$ a že je potřebný integrál (1.2) konečný.

Díky $f \in W^{k_0,\infty}_{\text{loc}}$ je i $f \in W^{k_0,1}_{\text{loc}}$ a $f \in W^{k_0-1,\infty}_{\text{loc}}$, jsou splněny podmínky *Věty 3.6* a máme $f^{-1} \in W^{k_0,1}_{\text{loc}}$. Derivace $\widetilde{D}^{k_0}f^{-1}$ díky tomu existuje skoro všude v $Q(c,r)$.

Derivace $\widetilde{D}^{k_0}f^{-1}$ existuje skoro všude, je $\widetilde{D}^{k_0-1}f \in W^{k_0-1,\infty}_{\text{loc}} \cap W^{k_0,1}_{\text{loc}}$ a jsou tedy splněny podmínky *Lemmatu 3.4* (případ $m = k_0-1$), proto pro skoro všechna $y \in Q(c,r)$ pro nějakou konstantu $\widetilde{K} \in \mathbb{R}$ platí

$$\big\|\widetilde{D}^{k'}f\big(f^{-1}(y)\big)\big\| \leq \widetilde{K} \qquad \text{a} \qquad \big\|\widetilde{D}^{k'}f^{-1}(y)\big\| \leq \widetilde{K} \qquad \text{pro } k' \in \{1,\dots,k_0-1\}.$$

Z $f \in W^{k_0,\infty}_{\text{loc}}$ plyne, že $\widetilde{D}^{k_0}f$ je na $Q(c,r)$ omezená (až na množinu nulové míry), bez újmy na obecnosti nechť tedy

$$\big\|\widetilde{D}^{k_0}f\big(f^{-1}(y)\big)\big\| \leq \widetilde{K}$$

se stejnou konstantou $\widetilde{K}$ (jinak konstantu $\widetilde{K}$ dostatečně zvětšíme). Podle *Tvrzení 1.14* z $f \in W^{k_0,\infty}$ plyne, že existuje Lipschitzovský reprezentant funkce $\widetilde{D}^{k_0-1}f$ a ten má podle *Tvrzení 1.15* totální diferenciál $\widetilde{D}^{k_0}f$ skoro všude. Jsou tak splněny podmínky *Lemmatu 3.5*. Tím pádem existuje množina $\mathcal{A} \subset Q(c,r)$ a konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že $\mathcal{L}_n\big(\mathcal{A}\big) = \mathcal{L}_n\big(Q(c,r)\big)$, dále že na $\mathcal{A}$ existují všechny derivace $\widetilde{D}^{k'}f\big(f^{-1}(y)\big)$ a $\widetilde{D}^{k'}f^{-1}(y)$ pro $k' \in \{1,\dots,k_0\}$ a že pro každé $a,b \in \mathcal{A}$ platí

$$\Big\|\widetilde{D}^{k_0}f^{-1}(a) - \widetilde{D}^{k_0}f^{-1}(b)\Big\| \leq C \cdot \sum_{k'=1}^{k_0}\Big\|\widetilde{D}^{k'}f\big(f^{-1}(a)\big) - \widetilde{D}^{k'}f\big(f^{-1}(b)\big)\Big\|. \tag{3.14}$$

Díky $f \in W^{k_0,\infty}_{\text{loc}}$ máme $\widetilde{D}^{k'}f \in W^{1,1}_{\text{loc}}$ a díky tomu i $\widetilde{D}^{k'}f \in BV_{\text{loc}}$ pro každé $k' \in \{1,\dots,k_0-1\}$. V předpokladech Věty je navíc $\widetilde{D}^{k_0}f \in BV_{\text{loc}}$. Podle *Věty 1.21* tak z předchozího odvodíme $\widetilde{D}^{k'}f \circ f^{-1} \in BV_{\text{loc}}$ pro $k' \in \{1,\dots,k_0\}$. Pro každé $k' \in \{1,\dots,k_0\}$ tedy podle *Věty 1.19* na $\mathcal{L}_{n-1}$-skoro všech úsečkách rovnoběžných s osou $\mathbf{x}_i$ existuje dobrý reprezentant s konečnou variací uvnitř $Q(c,r)$. Zafixujme $y \in Q^i(c,r)$, pro něž tito reprezentanti existují, a označme pro každou funkci $\widetilde{D}^{k'} f \circ f^{-1}$ jejího dobrého reprezentanta $h^{k'}$, $k' \in \{1, \dots, k_0\}$. Dále položme $h^{k'}_{i,y}(t) := h^{k'}(y + t\mathbf{e}_i)$ pro $t \in (c_i - r, c_i + r)$. Nechť $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^J$ je posloupnost po dvou disjunktních intervalů náležících do intervalu $(c_i - r, c_i + r)$ taková, že $A_j := y + a_j\mathbf{e}_i \in \mathcal{A}$ a $B_j := y + b_j\mathbf{e}_i \in \mathcal{A}$ pro každé $j \in \{1, \dots, J\}$. Pro každé $k' \in \{1, \dots, k_0\}$ máme

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^J \Big\| \widetilde{D}^{k'} f\big(f^{-1}(A_j)\big) - \widetilde{D}^{k'} f\big(f^{-1}(B_j)\big)\Big\| &= \sum_{j=1}^J \Big\| h^{k'}_{i,y}(a_j) - h^{k'}_{i,y}(b_j)\Big\| \\ &\leq V\Big(h^{k'}_{i,y}, (c_i - r, c_i + r)\Big) < \infty.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Složením (3.14) a (3.15) dostaneme

$$\sum_{j=1}^J \Big\| \widetilde{D}^{k_0} f^{-1}(A_j) - \widetilde{D}^{k_0} f^{-1}(B_j)\Big\| \leq C \cdot \sum_{k'}^{k_0} V\Big(h^{k'}_{i,y}, (c_i - r, c_i + r)\Big).$$

Označme $u_{i,y}(t) := \widetilde{D}^k f^{-1}(y + t\mathbf{e}_i)$ pro $t \in (c_i - r, c_i + r) \cap \mathcal{A}$. Přechodem k supremu z předchozího plyne

$$V\Big(u_{i,y}, (c_i - r, c_i + r) \cap \mathcal{A}\Big) \leq C \cdot \sum_{k'}^{k} V\Big(h^{k'}_{i,y}, (c_i - r, c_i + r)\Big) < \infty. \tag{3.16}$$

Z $\mathcal{L}_n\big(\mathcal{A}\big) = \mathcal{L}_n\big(Q(c,r)\big)$ plyne, že $\mathcal{L}_1\big(\pi_i^{-1}(y) \cap \mathcal{A}\big) = 2r$ pro $\mathcal{L}_{n-1}$-skoro všechna $y \in Q^i(c,r)$. Uvažujme tedy taková $y \in Q^i(c,r)$, že má funkce $u_{y,i}$ konečné variace na $(c_i - r, c_i + r) \cap \mathcal{A}$ a navíc, že $\mathcal{L}_1\big((c_i - r, c_i + r) \cap \mathcal{A}\big) = 2r$ (stále jsou to $\mathcal{L}_{n-1}$-skoro všechna $y \in Q^i(c,r)$). *Lemma 1.24* říká, že existuje funkce $\tilde{u}_{i,y} : (c_i - r, c_i + r) \to \mathbb{R}^{n^{k_0+1}}$ taková, že $\tilde{u}_{i,y} = u_{i,y}$ na $(c_i - r, c_i + r) \cap \mathcal{A}$ a přitom zůstává

$$V\Big(\tilde{u}_{i,y}, (c_i - r, c_i + r)\Big) = V\Big(u_{i,y}, (c_i - r, c_i + r) \cap \mathcal{A}\Big) < \infty.$$

Ukázali jsme tedy, že existuje reprezentant $\tilde{u}$ funkce $\widetilde{D}^{k_0} f^{-1}$ takový, že mají funkce $\tilde{u}_{i,y}$ pro skoro všechna $y \in Q^i(c,r)$ na intervalu $(c_i - r, c_i + r)$ konečnou variaci.

I příslušný integrál podle (3.16) zůstává konečný,

$$\int_{Q^i(c,r)} V(\tilde{u}_{i,y}, (c_i - r, c_i + r)) \leq C \cdot \sum_{k'}^{k_0} \int_{Q^i(c,r)} V\Big(h^{k'}_{i,y}, (c_i - r, c_i + r)\Big)\, \mathrm{d}y,$$

protože všechna $h^{k'}_{i,y}$ jsou dobří reprezentanti funkcí BV_{loc} a tedy pro každé k' podle *Věty 1.19* platí

$$\int_{Q^i(c,r)} V\Big(h^{k'}_{i,y}, (c_i - r, c_i + r)\Big)\, \mathrm{d}y < \infty.$$

Podle opačné implikace *Věty 1.19* konečně dostáváme $\widetilde{D}^{k_0} f^{-1} \in BV_{\mathrm{loc}}$ a tím pádem i $D^{k_0} f^{-1} \in BV_{\mathrm{loc}}$. $\square$

Seznam použité literatury

[1] HENCL S. Bilipschitz mappings with derivatives of bounded variation. *Publicacions Matemàtiques.* 2008, vol. 52, no. 1, s. 91-99. ISSN 0214-1493.

[2] AMBROSIO, L. – FUSCO, N. – PALLARA, D. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems.* 1st printing, 2000. New York, USA: Oxford University Press, 2000. ISBN 0-19-850245-1.

[3] KAPLAN, W. *Advanced Calculus.* 5th edition, 2003. Reading, MA, USA: Pearson Addison-Wesley, 2003. ISBN 0-20-179937-5.