

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Martin Kalousek

Systémy rovnic s anizotropním růstem disipativního potenciálu

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematická analýza

Praha 2011

Na tomto místě chci poděkovat vedoucímu práce Mgr. Petru Kaplickému, Ph.D za veškerou jeho pomoc při tvorbě práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne..... podpis

Obsah

1	Úvod	5
2	Značení	6
3	Pomocná tvrzení	8
4	Existence řešení	12
4.1	Řešitelnost systému s aproximativním potenciálem	12
4.2	Vylepšení regularity řešení aproximativní úlohy	21
4.3	Limitní přechod	35
5	Hölderovská spojitost gradientů řešení	40
5.1	Částečná regularita pro $d = 3$, $q_0 = 2$	40
5.2	Úplná regularita ve 2D, $q_0 = 2$	49
	Literatura	59

Název práce: Systémy rovnic s anizotropním růstem disipativního potenciálu
Autor: Martin Kalousek
Katedra: Katedry matematické analýzy
Vedoucí diplomové práce: Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.
e-mail vedoucího: Petr.Kaplicky@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme existenci a vlastnosti řešení systému nelineárních parciálních diferenciálních rovnic, které popisují ustálené proudění newtonovské tekutiny. Pro tento systém uvažujeme disipativní potenciál s anizotropním růstem. Ukážeme, že existuje slabé řešení systému, a jeho částečnou $C^{1,\alpha}$ -regularitu ve 3D a úplnou $C^{1,\alpha}$ -regularitu ve 2D.

Klíčová slova: potenciál s anizotropním růstem, částečná a úplná regularita

Title: Systems of equations with anisotropic dissipative potential
Author: Martin Kalousek
Department: Department of mathematical analysis
Supervisor: Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Petr.Kaplicky@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the existence and properties of solution of the system of partial differential equations describing steady flow of Newtonian fluid. We consider that this system has anisotropic dissipative potential. We prove existence of weak solution to this system and its partial $C^{1,\alpha}$ -regularity in 3D and full $C^{1,\alpha}$ -regularity in 2D.

Keywords: potential with anisotropic growth, partial and full regularity

Kapitola 1

Úvod

V předložené práci budeme studovat systém parciálních diferenciálních rovnic

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div} \{T(\varepsilon(\mathbf{u}))\} + u_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} + \nabla P &= \mathbf{g} \text{ v } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \text{ v } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ na } \partial\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

který pochází z mechaniky kontinua. Množina $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2$ nebo $d = 3$ bude omezená oblast s lipschitzovskou hranicí. Funkce P představuje tlak, $\mathbf{g}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ vnější síly a $\mathbf{u}_0: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ je zadaná okrajová podmínka. Budeme uvažovat

$$\mathbf{g} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d), \quad \mathbf{u}_0 = 0. \quad (1.2)$$

O tenzoru T předpokládáme, že je gradientem potenciálu $f: \mathbb{S}^d \rightarrow [0, \infty)$, který je třídy C^2 a splňuje podmínku anizotropního růstu

$$\begin{aligned} \exists \lambda, \Lambda > 0, \exists p, q_0, 1 < p \leq q_0 \leq \infty, q_0 \geq 2 \forall \tau, \sigma \in \mathbb{S}^d: \\ \lambda(1 + |\tau|^2)^{\frac{p-2}{2}} |\sigma|^2 \leq \mathcal{D}^2 f(\tau)(\sigma, \sigma) \leq \Lambda(1 + |\tau|^2)^{\frac{q_0-2}{2}} |\sigma|^2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Pro exponenty p, q_0 vyskytující se v anizotropní růstové podmínce (1.3) budeme uvažovat

$$2 \geq p > \begin{cases} \frac{6}{5} & \text{pro } d=2 \\ \frac{9}{5} & \text{pro } d=3 \end{cases} \quad \text{a zároveň } 2 \leq q_0 < p \frac{d+2}{d}. \quad (1.4)$$

Pro takto zadaná data ukážeme ve Větě 4.11 existenci slabého řešení systému (1.1), ve Větě 5.5 částečnou regularitu slabého řešení pro $d = 3$ a ve Větě 5.8 jeho úplnou regularitu pro $d = 2$.

Kapitola 2

Značení

Číselné množiny

$\mathbb{N}, \mathbb{R}$	přirozená a reálná čísla
$\mathbb{R}^d$	d -dimenzionální eukleidovský prostor nad $\mathbb{R}$ s bází $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\}$
$\mathbb{S}^d$	$d \times d$ symetrické matice
$B(x, r)$	koule se středem v bodě x a poloměrem r

Prostory funkcí.

Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}^d$.

$W^{k,p}(\Omega)$ Sobolevův prostor

$C^{k,\nu}(\bar{\Omega})$ prostor funkcí s hölderovsky spojitými parciálními derivacemi řádu k

Matice a vektory

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	skalární součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^d u_i v_i$
$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$	tenzorový součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$	$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (u_i v_j)_{i,j=1}^d$
$\mathbf{u} \odot \mathbf{v}$	symetrická část $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$	$\mathbf{u} \odot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{u})$
$\mathbf{1}$	jednotková matice	

Nechť $\sigma, \rho \in \mathbb{R}^{d \times d}$

$\sigma : \rho$	skalární součin matic σ, ρ	$\sigma : \rho = \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij} \rho_{ij}$
$ \sigma $	norma matice σ	$ \sigma = \sqrt{\sigma : \sigma}$

Derivace

∂_k	parciální derivace podle k-té proměnné
∇	gradient
ε	symetrická část gradientu
$\mathcal{D}$	derivace podle maticové proměnné

Nechť X je Banachův prostor a X^* jeho duál. Pro $F \in X^*$ a $x \in X$ bude $\langle F, x \rangle$ značit hodnotu F v x .

Druhý diferenciál potenciálu f v $\varepsilon \in \mathbb{S}^d$ definuje bilineární formu $\mathcal{D}^2 f(\varepsilon) : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$, její vyčíslení na prvcích $\rho, \sigma \in \mathbb{S}^d$ budeme značit $\mathcal{D}^2 f(\varepsilon)(\rho, \sigma)$.

Oscilací funkce h na množině $U \subset \mathbb{R}^d$ definujeme jako

$$\text{osc}_U g := \sup_{x, y \in U} \{|g(x) - g(y)|\}.$$

Na $V \subset\subset U$ definujeme pro $h < \text{dist}(V, \partial U)$ a $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ diferenční podíl g ve směru $\mathbf{e}_k$ jako

$$\Delta_h g(x) := \frac{g(x + h\mathbf{e}_k) - g(x)}{h}.$$

c bude značit univerzální konstantu.

Kapitola 3

Pomocná tvrzení

V této kapitole je uvedeno několik tvrzení, na která se budeme několikrát odvolávat v dalších kapitolách.

Nejdříve uvedeme [16, Theorem 1.10 (a)], tvrzení (b) je odvozeno během důkazu (a) tamtéž.

Lemma 3.1. *Nechť $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je omezená, otevřená a má lipschitzovskou hranici. Potom existují konstanty $c_1 = c_1(p, \Omega)$ a $c_2 = c_2(p, \Omega)$ taková, že*

(a) *pro každou $\mathbf{v} \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ platí*

$$\|\mathbf{v}\|_{W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq c_1 \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)}. \quad (3.1)$$

(b) *pro každou $\mathbf{v} \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ platí*

$$\|\mathbf{v}\|_{W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq c_2 (\|\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)} + \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)}). \quad (3.2)$$

Následující Lemma odpovídá na otázku, jak vypadá jádro operátoru ε . Jedná se o upravenou verzi věty [14, Theorem 3.2], která je formulována pro $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$.

Lemma 3.2. *Nechť $\mathbf{u} \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, Ω je oblast v $\mathbb{R}^d$. Pak $\varepsilon(\mathbf{u}) = 0$ v Ω právě když $\mathbf{u} \in T := \{\mathbf{v} = a + Bx; a \in \mathbb{R}^d, B \text{ je antisymetrická matice } d \times d\}$.*

Důkaz. Zřejmě pro každou $\mathbf{u} \in T$ je $\varepsilon(\mathbf{u}) = 0$. Ukažme opačnou implikaci. Zvolme $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ konvexní. A pro $\mathbf{u}$ takovou, že $\varepsilon(\mathbf{u}) = 0$, ukážeme $\mathbf{u} = a + Bx$ na Ω_0 . Pro $h < \frac{1}{2} \text{dist}(\partial\Omega_0, \partial\Omega)$ definujeme

$$\mathbf{u}_h(x) := \frac{1}{h^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\left(\frac{x-y}{h}\right) \mathbf{u}(y) \, dy, \quad (3.3)$$

kde φ je regularizátor s nosičem v $B(0, 1)$. Potom $\mathbf{u}_h \in C^\infty(\Omega_0; \mathbb{R}^d)$ a $\mathbf{u}_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathbf{u}$ ve $W^{1,q}(\Omega_0; \mathbb{R}^d)$. Navíc je $\varepsilon(\mathbf{u}_h) = 0$ v Ω_0 , neboť

$$\partial_j u_h^i(x) := \frac{1}{h^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\left(\frac{x-y}{h}\right) \partial_j u^i(y) dy. \quad (3.4)$$

Tvrzení dokážeme pro $\mathbf{v} \in C^\infty(\Omega_0; \mathbb{R}^d)$. Z předpokladu $\varepsilon(\mathbf{v}) = 0$ vyplývá

$$\partial_i v^i = 0 \quad i = 1, \dots, d \quad (3.5)$$

$$\partial_i v^j = -\partial_j v^i \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (3.6)$$

Nyní uvažujme $d=3$. Z (3.5) a 3.6 vyplývá

$$\partial_j \partial_k v^i = 0, \quad (3.7)$$

pokud $i = j$ nebo $i = k$ nebo $j = k$. Z (3.5) musí mít $\mathbf{v}$ tvar

$$\begin{aligned} v^1 &= a^1 + w^1(x_2, x_3) \\ v^2 &= a^2 + w^2(x_1, x_3) \\ v^3 &= a^3 + w^3(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Z faktu $\partial_i^2 w^k = 0$, což je speciální případ (3.7), dostaneme po integraci

$$w^1(x_2, x_3) = B(x_3)x_2 + \tilde{B}(x_3) = C(x_2)x_3 + \tilde{C}(x_2) \quad (3.8)$$

$$w^2(x_1, x_3) = D(x_3)x_1 + \tilde{D}(x_3) = E(x_1)x_3 + \tilde{E}(x_1) \quad (3.9)$$

$$w^3(x_1, x_2) = F(x_2)x_1 + \tilde{F}(x_2) = G(x_1)x_2 + \tilde{G}(x_1).$$

Derivací (3.9) podle x_2 obdržíme $B(x_3) = C'(x_2)x_3 + \tilde{C}'(x_2)$, odkud je okamžitě vidět, že $C''(x_2)$ a $\tilde{C}''(x_2)$ jsou konstantní a proto jsou $C(x_2)$ a $\tilde{C}(x_2)$ lineární. Potom je zřejmě i $B(x_3)$ lineární. Podobně se ukáže, že i $\tilde{B}, D, \tilde{D}, E, \tilde{E}, F, \tilde{F}, G, \tilde{G}$ jsou ve svých proměnných lineární. Dohromady proto dostaneme

$$\left. \begin{aligned} v^1 &= a^1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + c_1x_2x_3 \\ v^2 &= a^2 + b_{21}x_1 + b_{23}x_3 + c_2x_1x_3 \\ v^3 &= a^3 + b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + c_3x_1x_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Po aplikaci (3.5) v (3.10) získáme $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Navíc je matice $(b_{ij})_{i,j=1}^d$ antisymetrická, protože pro $i \neq j$ $b_{ij} = \partial_i v^j = -\partial_j v^i = -b_{ji}$. Tedy $\mathbf{v}$ má požadovaný tvar. Pokud $d = 2$ můžeme podobně jako v případě $d = 3$ odvodit, že $\mathbf{v}$

má požadovaný tvar.

T_0 (v definici T vezmeme $\Omega = \Omega_0$) je konečně dimenzionální podprostor $W^{1,q}(\Omega_0; \mathbb{R}^3)$ a je tudíž uzavřený. Je-li $\{\mathbf{u}_h\} \subset T$ a $\mathbf{u}_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathbf{u}$ ve $W^{1,q}(\Omega_0; \mathbb{R}^d)$ pak i $\mathbf{u} \in T_0$. A jelikož byla Ω_0 zvolena libovolně je $\mathbf{u} \in T$. $\square$

V důkazu odhadu Cacciopoliho typu použijeme nerovnost z [10, Lemma 3.1], kde je ale uvažována pouze pro funkce z $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. V následujícím lemmatu bude tato nerovnost dokázána pro funkce z $W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ $q \in (1, \infty)$.

Lemma 3.3. *Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}^d$. Potom existuje $c > 0$ tak, že pro každou $\mathbf{v} \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ $q \in (1, \infty)$ existuje $\mathbf{w} \in T$*

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq c \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^d)}. \quad (3.11)$$

Důkaz. Uvažujme prostor T , ten je konečně dimenzionálním podprostorem ve $W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, proto existuje jeho topologický doplněk S ve $W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Zřejmě stačí dokázat

$$\|\mathbf{v}\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq c \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^d)} \quad (3.12)$$

pro $\mathbf{v}$ z S . Tvzení ukažme sporem. Nechť $\forall k \in \mathbb{N}$ existuje $\mathbf{v}_k \in S$ tak, že

$$\|\mathbf{v}_k\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^d)} > k \|\varepsilon(\mathbf{v}_k)\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^d)}. \quad (3.13)$$

Přejdeme k přeškálované posloupnosti $\bar{\mathbf{v}}_k := \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^d)}}$ a z (3.13) dostaneme

$$\|\varepsilon(\bar{\mathbf{v}}_k)\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^d)} < \frac{1}{k}. \quad (3.14)$$

Podle Kornovy nerovnosti (3.2) je posloupnost $\bar{\mathbf{v}}_k$ omezená ve $W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ a z reflexivity tohoto prostoru existuje $\mathbf{v}_0$ a podposloupnost ve $\{\bar{\mathbf{v}}_k\}$ (značená stejně) tak, že $\bar{\mathbf{v}}_k \rightharpoonup \mathbf{v}_0$ slabě ve $W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Slabá zdola polospojitosť normy a (3.14) implikuje $\varepsilon(\mathbf{v}_0) = 0$ a podle Lemmatu 3.2 je $\mathbf{v}_0 \in T$. Konvexita a uzavřenost S implikují slabou uzavřenost S , tedy speciálně $\mathbf{v}_0 \in S$. Již víme, že $\mathbf{v}_0 \in T$, a proto je $\mathbf{v}_0 = 0$. Z kompaktního vnoření $W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ do $L^q(\Omega; \mathbb{R}^d)$ dostaneme silnou konvergenci $\bar{\mathbf{v}}_k \rightarrow \mathbf{v}_0$ v $L^q(\Omega; \mathbb{R}^d)$ a tudíž $\|\mathbf{v}_0\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^d)} = 1$ a to je spor s $\mathbf{v}_0 = 0$. $\square$

Dále uvedeme [17, Theorem 3.6.8].

Věta 3.4. *Nechť $\varphi \in L^s(\Omega; \mathbb{R}^d)$, $D \subset \subset \Omega$. Pro $h \in (-\frac{1}{2}\text{dist}(\partial\Omega, D), \frac{1}{2}\text{dist}(\partial\Omega, D))$ definujeme*

$$\psi_h(x) := \int_0^1 \varphi(x + t h \mathbf{e}_i) dt$$

Potom platí $\psi_h \in L^s(D; \mathbb{R}^d)$ a $\psi_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \varphi$ v $L^s(D; \mathbb{R}^d)$.

Dále použijeme variantu Brouwerovy věty o pevném bodě z knihy [6, p.493].

Věta 3.5. *Nechť $P : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ je spojitě zobrazení. Nechť existuje $r > 0$ takové, že*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, |\xi| = r : P(\xi) \cdot \xi \geq 0. \quad (3.15)$$

Pak existuje $\xi_0 \in \overline{B(0, r)}$, pro které je $P(\xi_0) = 0$.

Následují lemmata [12, Chapter III Lemma 2.1., Chapter V Lemma 3.1.]

Lemma 3.6. *Nechť $A, B, \alpha, \beta > 0$, $\alpha > \beta$ a nechť $\varphi : [0, R_0] \rightarrow [0, \infty)$ je neklesající funkce taková, že*

$$\forall \rho, R \in (0, R_0), \rho < R : \varphi(\rho) \leq A \left[\left(\frac{\rho}{R} \right)^\alpha + \varepsilon \right] \varphi(R) + BR^\beta$$

Pak existuje konstanta $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(A, \alpha, \beta)$ taková, že pro všechna $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ existuje konstanta c závisající na $\varepsilon, A, \alpha, \beta$ taková, že

$$\forall \rho, R \in (0, R_0), \rho < R : \varphi(\rho) \leq c \left[\left(\frac{\rho}{R} \right)^\beta \varphi(R) + B\rho^\beta \right].$$

Lemma 3.7. *Nechť $f(t) : [\tau_0, \tau_1] \rightarrow [0, \infty)$ $0 \leq \tau_0 < \tau_1$. Nechť pro s, t , $\tau_0 \leq t < s \leq \tau_1$ platí*

$$f(t) \leq [A(s - t)^{-\alpha} + B] + \theta f(s),$$

kde A, B, α, θ jsou nezáporné konstanty, $\theta \in [0, 1)$. Potom existuje $c = c(\alpha, \theta)$ taková, že pro $\tau_0 \leq \rho < R \leq \tau_1$ platí

$$f(\rho) \leq c[A(R - \rho)^{-\alpha} + B].$$

Kapitola 4

Existence řešení

Nejdříve se budeme zabývat definicí slabého řešení úlohy (1.1). Od slabého řešení (1.1) je přirozené požadovat splnění

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{D}f(\varepsilon(\mathbf{u})) : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}) \, dx - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}) \, dx &= \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{v } \Omega, \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

pro každou

$$\boldsymbol{\varphi} \in C_{0,\operatorname{div}}^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d) = \{\mathbf{v} \in C^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d); \operatorname{spt} \mathbf{v} \subset \Omega; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}.$$

Pokud bychom dále vyžadovali pouze $\mathbf{u} \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ dostaneme další podmínku pro q_0 . Pro splnění $\mathcal{D}f(\varepsilon(\mathbf{u})) \in L^1(\Omega; \mathbb{S}^d)$ je totiž třeba $q_0 < p + 1$, což je pro p uvažované v (1.4) silnější podmínka než $q_0 < p^{\frac{d+2}{d}}$. Abychom se této podmínce vyhnuli, nebudeme proto teď psát do jakého prostoru má slabé řešení patřit. V následující sekci budeme studovat existenci a vlastnosti slabého řešení modifikované úlohy a ve Větě 4.11 ukážeme v jakém smyslu řešení této modifikované úlohy konverguje k řešení systému (1.1).

4.1 Řešitelnost systému s aproximativním potenciálem

Zvolme $q \geq q_0$ splňující

$$p \frac{d+2}{d} > q > d, \quad (4.2)$$

existenci takového q zaručuje (1.4). Pro $\delta \in (0, 1)$ polořme

$$f_\delta(\sigma) := \delta(1 + |\sigma|^2)^{\frac{q}{2}} + f(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{S}^d, \quad (4.3)$$

a hledáme $\mathbf{u}_\delta \in W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d) := \overline{C_{0,\text{div}}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_{1,q}}$, které řeší

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)) : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}) \, dx - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}) \, dx &= \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx, \\ \forall \boldsymbol{\varphi} \in C_{0,\text{div}}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d). \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Poznámka 1. Na množině s lipschitzovskou hranicí platí $W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d) = \{\mathbf{u} \in W^{1,q}, \mathbf{u} = 0 \text{ ve smyslu stop na } \partial\Omega, \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ s.v. v } \Omega\}$ viz [11, Theorem 1.4]. Potom je $W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ uzavřený podprostor reflexivního prostoru $W^{1,q}$, tudíž je i $W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ reflexivní.

Lemma 4.1. *Pro f_δ definované v (4.3) platí:*

(a)

$$\begin{aligned} f_\delta &\in C^2(\mathbb{S}^d), \quad \forall \sigma, \rho \in \mathbb{S}^d: \\ \mathcal{D}^2 f_\delta(\sigma)(\rho, \rho) &= \delta q[(q-2)(1 + |\sigma|^2)^{\frac{q-4}{2}}|\sigma|^2 + (1 + |\sigma|^2)^{\frac{q-2}{2}}]|\rho|^2 + \mathcal{D}^2 f(\sigma)(\rho, \rho) \end{aligned} \quad (4.5)$$

(b)

$$\begin{aligned} \exists c_1, c_2 > 0, \quad \forall \delta \in (0, 1), \quad \forall \sigma, \rho \in \mathbb{S}^d: \\ c_1 \max\{(1 + |\sigma|^2)^{\frac{p-2}{2}}, \delta(1 + |\sigma|^2)^{\frac{q-2}{2}}\}|\rho|^2 &\leq \mathcal{D}^2 f_\delta(\sigma)(\rho, \rho) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$|\mathcal{D}^2 f_\delta(\sigma)| \leq c_2(1 + |\sigma|^2)^{\frac{q-2}{2}} \quad (4.7)$$

(c)

$$\begin{aligned} \exists c_3, c_4 > 0, \quad \forall \delta \in (0, 1), \quad \forall \sigma, \rho \in \mathbb{S}^d: \\ c_3 \max\{\delta(1 + |\sigma|^2)^{\frac{q-2}{2}}, (1 + |\sigma|^2)^{\frac{p-2}{2}}\}|\sigma|^2 &\leq \mathcal{D}f_\delta(\sigma) : \sigma \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$|\mathcal{D}f_\delta(\sigma)| \leq c_4(1 + |\sigma|^2)^{\frac{q-1}{2}} \quad (4.9)$$

(d) *Definujeme operátor K , který funkci $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ přiřadí funkci $K(\sigma) : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$, předpisem $K(\sigma)(x) := \mathcal{D}f_\delta(\sigma(x))$. Potom K je spojitý operátor z $L^q(\Omega; \mathbb{S}^d)$ do $L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega; \mathbb{S}^d)$.*

Důkaz. Identitu (4.5) pro $\mathcal{D}^2 f_\delta$ v (a) obdržíme okamžitě dvojnásobným zderivováním f_δ , spojitost $\mathcal{D}^2 f_\delta$ je zřejmá.

Všechny členy v (4.5) jsou kladné, proto zřejmě platí (4.6). Nerovnost (4.7) je důsledkem

$$0 \leq \mathcal{D}^2 f_\delta(\sigma)(\tau, \tau) \leq c(1 + |\sigma|^2)^{\frac{q-2}{2}} |\tau|^2$$

a

$$|\mathcal{D}^2 f_\delta(\sigma)| = \max_{|\tau| \leq 1} \{\mathcal{D}^2 f_\delta(\sigma)(\tau, \tau)\}.$$

Tato nerovnost platí díky symetrii $\mathcal{D}^2 f_\delta$

Tvrzení (c) plyne z

$$\mathcal{D} f_\delta(\sigma) : \sigma = \int_0^1 \mathcal{D}^2 f_\delta(s\sigma)(\sigma, \sigma) ds$$

a odhadů v (b).

Důkaz (d) je založen na Větě o spojitosti Nemyckého operátoru [18, Theorem 10.58]. Definujme funkci $h(x, \rho)$ pro $x \in \Omega$ a $\rho \in \mathbb{S}^d$ předpisem

$$h(x, \rho) := \mathcal{D} f_\delta(\rho).$$

Funkce h je zřejmě pro každé $x \in \Omega$ spojitá v ρ , pro každé $\rho \in \mathbb{S}^d$ měřitelná v x a platí $K(\sigma)(x) = h(x, \sigma(x))$. Navíc z (iii) máme odhad $|K(\sigma)| \leq (1 + |\sigma|^{q-1})$. Operátor K splňuje předpoklady Věty o spojitosti Nemyckého operátoru, podle které je K spojitý operátor z $L^q(\Omega; \mathbb{S}^d)$ do $L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega; \mathbb{S}^d)$. □

Lemma 4.2. *Pro $\mathbf{v} \in W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ je*

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} : \varepsilon(\mathbf{v}) dx = 0.$$

Důkaz. Díky symetrii tenzorového součinu $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ máme

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} : \varepsilon(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} : \nabla(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} v_i v_j \partial_i v_j dx = \int_{\Omega} v_i \frac{1}{2} \partial_i |\mathbf{v}|^2 dx.$$

Integrujme per partes a dostaneme

$$\int_{\partial\Omega} v_i \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 n_i dS - \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v} \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 dx.$$

Tvrzení dostaneme použitím předpokladů $\mathbf{v} = 0$ na $\partial\Omega$ ve smyslu stop a $\text{div } \mathbf{v} = 0$ s.v. v Ω . □

Věta 4.3. *Nechť f splňuje (1.3) s $p \in (1, 2)$ a jistým $q_0 \geq 2$, nechť je $q > d$, $q \geq q_0$ a data úlohy jsou daná v (1.2). Potom existuje slabé řešení $\mathbf{u}_\delta \in W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ úlohy (4.4). Navíc platí*

$$\sup_{\delta \in (0,1)} \|\mathbf{u}_\delta\|_{W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)} < \infty. \quad (4.10)$$

Důkaz. V důkazu jsou použity techniky z [15].

KROK 1 Nechť $\{\mathbf{w}^j\}_{j=1}^\infty$ lineárně nezávislá množina ve $W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ splňující $\overline{\text{Lin}\{\mathbf{w}^j\}} = W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Pro pevné $N \in \mathbb{N}$ definujeme Galerkinovy aproximace $\mathbf{v}^N$ předpisem

$$\mathbf{v}^N(x) = \sum_{j=1}^N \mathbf{c}_j^N \mathbf{w}^j(x), \quad (4.11)$$

přičemž koeficienty $\mathbf{c}^N \in \mathbb{R}^N$ řeší soustavu rovnic

$$\int_{\Omega} \mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{v}^N)) : \varepsilon(\mathbf{w}^j) \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{v}^N \otimes \mathbf{v}^N : \varepsilon(\mathbf{w}^j) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}^j \, dx, \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.12)$$

Nyní ukažme, že pro pevné $N \in \mathbb{N}$ existuje řešení soustavy (4.12). Definujeme zobrazení $P: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ předpisem

$$P_j(\mathbf{c}) := \int_{\Omega} \mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{v})) : \varepsilon(\mathbf{w}^j) \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} : \varepsilon(\mathbf{w}^j) \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}^j \, dx, \\ \text{kde } \mathbf{v}(x) = \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{w}^j(x), j = 1, \dots, N.$$

Abychom mohli použít Větu 3.5, musíme ukázat, že P je spojitý a splňuje podmínku (3.15).

Nejdříve dokažme spojitost P . Nechť $\{\mathbf{c}^l\}_{l=1}^\infty \subset \mathbb{R}^N$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{c}^l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \mathbf{c}$. Každému $\mathbf{c}^l$, $l \in \mathbb{N}$, je přiřazena funkce $\mathbf{v}^l(x) := \sum_{j=1}^N c_j^l \mathbf{w}^j(x)$ a $\mathbf{c}$ je přiřazena $\mathbf{v}(x) := \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{w}^j(x)$. Potom

$$|P_j(\mathbf{c}^l) - P_j(\mathbf{c})| \leq \left| \int_{\Omega} (\mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{v}^l)) - \mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{v}))) : \varepsilon(\mathbf{w}^j) \, dx \right| \\ + \left| \int_{\Omega} (\mathbf{v}^l \otimes \mathbf{v}^l - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) : \varepsilon(\mathbf{w}^j) \, dx \right| =: I_1 + I_2.$$

UkaŹme $I_1 \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$. Definujme $K(\varepsilon(\mathbf{u}))(x) := \mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}(x)))$ pro $\mathbf{u} \in W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, podle Lemmatu 4.1 (d) je K spojitý operátor z $L^q(\Omega; \mathbb{S}^d)$ do $L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega; \mathbb{S}^d)$. V našem pŕípade $\varepsilon(\mathbf{v}^l) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \varepsilon(\mathbf{v})$ v $L^q(\Omega; \mathbb{S}^d)$, potom z Hölderovy nerovnosti dostaneme

$$I_1 \leq \|K(\varepsilon(\mathbf{v}^l)) - K(\varepsilon(\mathbf{v}))\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega; \mathbb{S}^d)} \|\varepsilon(\mathbf{w}^j)\|_{L^q(\Omega; \mathbb{S}^d)} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0.$$

Ještě zbývá ukázat, Źe $I_2 \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$.

$$I_2 = \left| \sum_{i,k=1}^N (c_i^l c_k^l - c_i c_k) \int_{\Omega} \mathbf{w}^i \otimes \mathbf{w}^k : \mathbf{w}^j \, dx \right|$$

Z konvergence $\mathbf{c}^l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \mathbf{c}$ v $\mathbb{R}^N$ okamŹitě plyne, Źe I_2 jde k nule, a tudíŹ zobrazení P je spojité.

Nyní ověŕíme, Źe P splňuje podmínku (3.15), $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$ je pŕiřazena funkce $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{w}^j$.

$$P(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} = \int_{\Omega} \mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{v})) : \varepsilon(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} : \varepsilon(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dx$$

Po pouŹití (a) Lemmatu 4.1, Lemmatu 4.2 a Kornovy nerovnosti (3.1) dostáváme

$$\begin{aligned} P(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} &= \int_{\Omega} \mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{v})) : \varepsilon(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dx \geq \delta q \int_{\Omega} (1 + |\varepsilon(\mathbf{v})|^2)^{\frac{q-2}{2}} |\varepsilon(\mathbf{v})|^2 \, dx \\ &\quad - \|\mathbf{g}\|_{\infty} \|\mathbf{v}\|_1 \geq c \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_q^q - \|\mathbf{g}\|_{\infty} \|\mathbf{v}\|_1 \geq c \|\nabla \mathbf{v}\|_q^q - \|\mathbf{g}\|_{\infty} \|\mathbf{v}\|_1 \\ &\geq c |\mathbf{c}|^q \left\| \sum_{j=1}^N \frac{c_j}{|\mathbf{c}|} \nabla \mathbf{w}^j \right\|_q^q - \|\mathbf{g}\|_{\infty} |\mathbf{c}| \left\| \sum_{j=1}^N \frac{c_j}{|\mathbf{c}|} \mathbf{w}^j \right\|_1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

UkaŹme, Źe existuje konstanta $M > 0$ taková, Źe pro všechna $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{c} \neq 0$

$$\left\| \sum_{j=1}^N \frac{c_j}{|\mathbf{c}|} \nabla \mathbf{w}^j \right\|_q^q \geq M. \quad (4.14)$$

JelikoŹ je funkce $H(\alpha) := \left\| \sum_{j=1}^N \alpha_j \nabla \mathbf{w}^j \right\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^{d \times d})}^q$ spojitá pro $\alpha \in S = \{y \in \mathbb{R}^N, |y| = 1\}$, nabývá funkce H na kompaktní množině S minima a minimální hodnotu označme M . UkaŹme, Źe je toto minimum kladné. K tomu bude stačit ukázat, Źe $\forall \alpha \in S$ je $H(\alpha) > 0$. Pro spor předpokládejme, Źe existuje $\tilde{\alpha} \in S$ tak,

že $H(\tilde{\alpha}) = 0$. Z ekvivalence norem $\|\nabla \cdot\|_q$ a $\|\cdot\|_{1,q}$ na $W_0^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ dostaneme $\sum_{j=1}^N \tilde{\alpha}_j \mathbf{w}^j = 0$ s.v. na Ω . To implikuje $\tilde{\alpha}_j = 0$ $j = 1, \dots, N$, jelikož množina $\{\mathbf{w}^j\}_{j=1}^N$ je z lineárně nezávislá. Máme tedy spor s předpokladem $\tilde{\alpha} \in S$ a (4.14) platí. Dále zřejmě $\left| \frac{c_j}{|\mathbf{c}|} \right| \leq 1$ a protože $|\mathbf{c}|^q$ jde pro $q > 1$ k nekonečnu rychleji než $|\mathbf{c}|$ plyne z (4.13) podmínka (3.15).

KROK 2 Ukážeme, že $\mathbf{v}^N$ je omezená ve $W_0^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Násobením j -té rovnice v (4.12) koeficientem c_j^N a součtem přes j obdržíme, při použití Lemmatu 4.2,

$$\int_{\Omega} \mathcal{D}f_{\delta}(\varepsilon(\mathbf{v}^N)) : \varepsilon(\mathbf{v}^N) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^N \, dx. \quad (4.15)$$

Levou stranu (4.15) odhadneme zdola, použijeme přitom bod (a) Lemmatu 4.1 a Kornovu nerovnost z Lemmatu 3.1

$$\int_{\Omega} \mathcal{D}f_{\delta}(\varepsilon(\mathbf{v}^N)) : \varepsilon(\mathbf{v}^N) \, dx \geq c \int_{\Omega} (1 + |\varepsilon(\mathbf{v}^N)|^2)^{\frac{q-2}{2}} |\varepsilon(\mathbf{v}^N)|^2 \, dx \geq c \|\nabla \mathbf{v}^N\|_q^q. \quad (4.16)$$

Pravou stranu (4.15) odhadneme shora pomocí Poincarého a Youngovy nerovnosti

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^N \, dx &\leq c \|\mathbf{g}\|_{\infty} \|\mathbf{v}^N\|_1 \leq c \|\mathbf{g}\|_{\infty} \|\mathbf{v}^N\|_{1,q} \leq c \|\mathbf{g}\|_{\infty} \|\nabla \mathbf{v}\|_q \\ &\leq \gamma \|\nabla \mathbf{v}^N\|_q^q + c(\gamma^{-1}) \|\mathbf{g}\|_{\infty}^{\frac{q}{q-1}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pro $\gamma \in (0, 1)$ dostatečně malé pak z (4.16) a (4.17) dostáváme

$$\sup_N \|\mathbf{v}^N\|_{W_0^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq c < \infty. \quad (4.18)$$

KROK 3 Díky reflexivitě $W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ implikuje (4.18) existenci podposloupnosti $\{\mathbf{v}^{N_k}\} \subset \{\mathbf{v}^N\}$ a $\mathbf{u}_{\delta} \in W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ takových, že

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}^{N_k} &\rightharpoonup \mathbf{u}_{\delta} \text{ ve } W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d) \\ \mathbf{v}^{N_k} &\rightarrow \mathbf{u}_{\delta} \text{ v } L^q(\Omega; \mathbb{R}^d) \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

pro $k \rightarrow \infty$.

Definujme operátor T předpisem

$$\langle T\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle := \int_{\Omega} \mathcal{D}f_{\delta}(\varepsilon(\mathbf{u})) : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}) \, dx$$

Potom $T: W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d) \rightarrow (W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d))^*$. Nejdříve ukažme spojitost T . Nechť $\mathbf{u}^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}$ ve $W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, opět položíme $K(\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta}))(x) := \mathcal{D}f_{\delta}(\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta}(x)))$, podle (d) Lemmatu 4.1 je K spojitý operátor z $L^q(\Omega; \mathbb{S}^d)$ do $L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega; \mathbb{S}^d)$ a můžeme provést odhad

$$\left| \langle T\mathbf{u}^k - T\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \right| \leq \|K(\varepsilon(\mathbf{u}^k)) - K(\varepsilon(\mathbf{u}))\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega; \mathbb{S}^d)} \|\varepsilon(\boldsymbol{\varphi})\|_{L^q(\Omega; \mathbb{S}^d)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Dále z (4.18) plyne $\|T\mathbf{v}^N\|_{(W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d))^*} \leq c < \infty$. Pro $\boldsymbol{\varphi} \in W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, $\|\boldsymbol{\varphi}\|_{1,q} \leq 1$ totiž platí

$$\begin{aligned} \left| \langle T\mathbf{v}^N, \boldsymbol{\varphi} \rangle \right| &= \left| \int_{\Omega} \mathcal{D}f_{\delta}(\varepsilon(\mathbf{v}^N)) : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}) \, dx \right| \leq c \int_{\Omega} (1 + |\varepsilon(\mathbf{v}^N)|^2)^{\frac{q-2}{2}} |\varepsilon(\mathbf{v}^N)| |\varepsilon(\boldsymbol{\varphi})| \, dx \\ &\leq c \int_{\Omega} (1 + |\varepsilon(\mathbf{v}^N)|)^{q-1} |\varepsilon(\boldsymbol{\varphi})| \, dx \leq c \left(\int_{\Omega} (1 + |\varepsilon(\mathbf{v}^N)|)^q \, dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \|\varepsilon(\boldsymbol{\varphi})\|_{L^q(\Omega)}, \end{aligned}$$

tedy

$$\|T\mathbf{v}^N\|_{(W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d))^*} = \sup_{\boldsymbol{\varphi} \in W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d), \|\boldsymbol{\varphi}\|_{W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq 1} \left| \langle T\mathbf{v}^N, \boldsymbol{\varphi} \rangle \right| \leq c < \infty.$$

Předchozí odhad implikuje existenci podposloupnosti $\{T\mathbf{v}^{N_k}\} \subset \{T\mathbf{v}^N\}$ a $\Psi \in (W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d))^*$ takových, že

$$T\mathbf{v}^{N_k} \rightharpoonup \Psi \text{ ve } (W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d))^*. \quad (4.20)$$

Navíc je operátor T je monotónní, neboť

$$\begin{aligned} \langle T\mathbf{u} - T\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle &= \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{d}{ds} [\mathcal{D}f_{\delta}(\varepsilon(\mathbf{v}) + s\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v})) : \varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v})] \, ds \, dx \\ &= \int_{\Omega} \int_0^1 \mathcal{D}^2 f_{\delta}((\varepsilon(\mathbf{v}) + s\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v}))(\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v}), \varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v})) \, ds \, dx \\ &\geq c \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v})|^2 \int_0^1 (1 + |\varepsilon(\mathbf{v}) + s\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{v})|^2)^{\frac{q-2}{2}} \, ds \, dx \geq 0. \end{aligned}$$

KROK 4 Nyní máme vše připraveno k provedení limitního přechodu v systému rovnic (4.12). S využitím silné konvergence $\{\mathbf{v}^{N_k}\}$ v $L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ a vnoření $W^{1,q}$ do L^∞ provedme v konvektivním členu limitní přechod $k \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (\mathbf{v}^{N_k} \otimes \mathbf{v}^{N_k} - \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) : \varepsilon(\mathbf{w}^j) \, dx \right| \\ & \leq \int_{\Omega} |\mathbf{v}^{N_k}| |\mathbf{v}^{N_k} - \mathbf{u}_\delta| |\varepsilon(\mathbf{w}^j)| \, dx + \int_{\Omega} |\mathbf{u}_\delta| |\mathbf{v}^{N_k} - \mathbf{u}_\delta| |\varepsilon(\mathbf{w}^j)| \, dx \\ & \leq \|\mathbf{v}^{N_k}\|_\infty \|\mathbf{v}^{N_k} - \mathbf{u}_\delta\|_{\frac{q}{q-1}} \|\varepsilon(\mathbf{w}^j)\|_q + \|\mathbf{u}_\delta\|_\infty \|\mathbf{v}^{N_k} - \mathbf{u}_\delta\|_{\frac{q}{q-1}} \|\varepsilon(\mathbf{w}^j)\|_q, \end{aligned} \quad (4.21)$$

což jde k nule, neboť pro námi uvažované $q \geq 2$ je $\frac{q}{q-1} \leq q$. Nyní zbývá ukázat, že pro Ψ z (4.20) je $\Psi = T(\mathbf{u}_\delta)$. Se znalostí (4.19), (4.20) a (4.21) obdržíme limitním přechodem $k \rightarrow \infty$ v (4.12)

$$\langle \Psi, \mathbf{w}^j \rangle - \int_{\Omega} \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta : \varepsilon(\mathbf{w}^j) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}^j \, dx \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

tudíž platí také

$$\langle \Psi, \boldsymbol{\varphi} \rangle - \int_{\Omega} \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d), \quad (4.22)$$

a speciálně pro $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{u}_\delta$ díky Lemmatu 4.2

$$\langle \Psi, \mathbf{u}_\delta \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_\delta \, dx. \quad (4.23)$$

Z monotonie T dostáváme

$$\langle T\mathbf{v}^{N_k} - T\mathbf{v}, \mathbf{v}^{N_k} - \mathbf{v} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d),$$

a z (4.15) již víme, že

$$\langle T\mathbf{v}^{N_k}, \mathbf{v}^{N_k} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^{N_k} \, dx,$$

proto platí

$$0 \leq \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^{N_k} \, dx - \langle T\mathbf{v}^{N_k}, \mathbf{v} \rangle - \langle T\mathbf{v}, \mathbf{v}^{N_k} - \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d).$$

Pro $k \rightarrow \infty$ plyne z předchozí nerovnosti

$$0 \leq \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_{\delta} \, dx - \langle \Psi, \mathbf{v} \rangle - \langle T\mathbf{v}, \mathbf{u}_{\delta} - \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d).$$

Rovnost (4.23) implikuje

$$0 \leq \langle \Psi, \mathbf{u}_{\delta} - \mathbf{v} \rangle - \langle T\mathbf{v}, \mathbf{u}_{\delta} - \mathbf{v} \rangle = \langle \Psi - T\mathbf{v}, \mathbf{u}_{\delta} - \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d).$$

Zvolme $\mathbf{v} = \mathbf{u}_{\delta} \pm \lambda\varphi$, kde $\varphi \in W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ je libovolná, $\lambda \in \mathbb{R}$, potom

$$0 \leq \pm \langle \Psi - T(\mathbf{u}_{\delta} \pm \lambda\varphi), \varphi \rangle$$

Nechť $\lambda \rightarrow 0$ potom spojitost T implikuje

$$0 = \langle \Psi - T\mathbf{u}_{\delta}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d),$$

odtud $\Psi = T\mathbf{u}_{\delta}$. Dosazením $T\mathbf{u}_{\delta}$ namísto Ψ v (4.22) zjistíme, že $\mathbf{u}_{\delta}$ je slabé řešení úlohy 4.4.

KROK 5 Nyní zbývá ukázat stejnoměrný odhad 4.10. Pro $\varphi = \mathbf{u}_{\delta}$ ve slabé formulaci (4.4) je s využitím odhadu (c) Lemmatu 4.1 a Lemmatu 4.2

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta})|^p \, dx &\leq c^{-1} \left(1 + \int_{\Omega} \mathcal{D}f_{\delta}(\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta})) : \varepsilon(\mathbf{u}_{\delta}) \, dx \right) \\ &= c^{-1} \left(1 + \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_{\delta} \, dx \right). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Provedme odhad posledního členu na pravé straně.

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_{\delta} \, dx \right| \leq c \|\mathbf{g}\|_{\infty} \|\mathbf{u}_{\delta}\|_{1,p} \leq c \|\mathbf{g}\|_{\infty} \|\nabla \mathbf{u}_{\delta}\|_p \leq \gamma \int_{\Omega} |\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta})|^p \, dx + c(\gamma^{-1})$$

Pro γ dostatečně malé potom z (4.24) a Kornovy nerovnosti (3.1) je

$$\sup_{\delta \in (0,1)} \|\mathbf{u}_{\delta}\|_{W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq c < \infty.$$

□

4.2 Vylepšení regularity řešení aproximativní úlohy

Nejprve provedeme rekonstrukci tlaku p_δ . K tomu využijeme Lemma o existenci tlaku [11, Lemma 1.1].

Lemma 4.4. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ má lipschitzovskou hranici, $q \in (1, \infty)$ a necht' $F \in (W_0^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d))^*$ je takový, že*

$$\forall \varphi \in W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d) : \langle F, \varphi \rangle = 0. \quad (4.25)$$

Pak existuje právě jedna funkce $p \in \left\{ v \in L^{q'}(\Omega); \int_\Omega v \, dx = 0 \right\}$ taková, že

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_\Omega p \operatorname{div} \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d).$$

S využitím minulého lemmatu ukážeme existenci funkce $p_\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že $p_\delta \in \left\{ v \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega); \int_\Omega v \, dx = 0 \right\}$ splňující

$$\int_\Omega (\sigma_\delta - \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}) \, dx - \int_\Omega \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx = \int_{B(x,R)} p_\delta \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \, dx. \quad (4.26)$$

Označme $\sigma_\delta = \mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta))$. Definujme funkcionál Φ předpisem

$$\langle \Phi, \boldsymbol{\varphi} \rangle := \int_{B(x_0,R)} (\sigma_\delta - \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}) \, dx - \int_{B(x_0,R)} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx. \quad (4.27)$$

Růstová podmínka (4.9) implikuje $\sigma_\delta \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega; \mathbb{S}^d)$. Zřejmě je $\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega; \mathbb{R}^{d \times d})$ a připomeňme, že $\mathbf{g} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Z těchto informací plyne $\Phi \in (W_0^{1,q}(B(x_0, R); \mathbb{R}^d))^*$. Pro každou $\boldsymbol{\varphi} \in W_{0,\text{div}}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ vychází díky (4.4) $\langle \Phi, \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0$.

Následující [2, Lemma 3.1] bychom získali po otestování rovnice (4.26) funkcí $\partial_k \mathbf{u}_\delta$, $k \in \{1, \dots, d\}$. Tento postup by ale nebyl korektní, neboť nevíme zda $\partial_k \mathbf{u}_\delta$ je vhodná testovací funkce v (4.26). Za testovací funkci v (4.26) je třeba vzít vhodný diferenční podíl a poté ukázat, že je možné ho nahradit příslušnou derivací. Podobné úvahy provedeme v Lemmatu 4.7

Lemma 4.5. *Za předpokladů Věty 4.3 platí:*

$$(i) \quad \mathbf{u}_\delta \in W_{loc}^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^d);$$

(ii) $(1 + |\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)|^2)^{\frac{q}{4}} \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ a

$$\nabla(1 + |\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)|^2)^{\frac{q}{4}} = \frac{q}{2}(1 + |\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)|^2)^{\frac{q-4}{4}} |\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)| \nabla |\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)|;$$

(iii) $\mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)) \in W_{loc}^{1, \frac{q}{q-1}}(\Omega; \mathbb{S}^d)$ a

$$\forall \rho \in \mathbb{S}^d \quad \partial_k[\mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta))]: \rho = \mathcal{D}^2 f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta))(\partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta), \rho), \quad k = 1, \dots, d.$$

Ještě uvedme [2, Lemma 3.2], ze kterého plyne stejnoměrná omezenost $\mathbf{u}_\delta$ v $L_{loc}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$ vzhledem k $\delta \in (0, 1)$.

Lemma 4.6. *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 4.3 a platí (1.4). Potom pro $\Omega' \subset\subset \Omega$ existuje c nezávislá na δ tak, že*

$$\int_{\Omega'} |\nabla \mathbf{u}_\delta|^{\frac{dp}{d-p}} \leq c. \quad (4.28)$$

Poznámka 2. Jelikož exponent $\frac{dp}{d-p}$ v minulém lemmatu je pro p uvažované v (1.4) větší než d , díky vnoření $W^{1, \frac{dp}{d-p}}$ do L^∞ existuje pro každou $\Omega' \subset\subset \Omega$ konstanta c nezávislá na δ tak, že platí

$$\|\mathbf{u}_\delta\|_{L^\infty(\Omega'; \mathbb{R})} \leq c. \quad (4.29)$$

V důkazu věty se stejnoměrným odhadem $\mathbf{u}_\delta$ využijeme nerovnost Cacciopoliho typu obsaženou v následujícím lemmatu, citujeme [2, Lemma 3.3]. V jeho důkazu jsou použity techniky z důkazů [2, Lemma 3.1, Lemma 3.3].

Lemma 4.7. *Nechť $B(x_0, R) \subset\subset \Omega$ a $0 < r < r' < R < 1$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Pak existuje $\gamma > 0$ takové, že*

$$\begin{aligned} & \int_{B(x_0, r)} \mathcal{D}^2 f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta))(\partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta), \partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta)) \, dx \\ & \leq c_1(r' - r)^{-2} \int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{q-2}{2}} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 \, dx + c_2(r')^\gamma, \end{aligned} \quad (4.30)$$

kde $\Gamma_\delta = 1 + |\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)|^2$, c_1, c_2 jsou konstanty nezávislé na δ a $Q \in \mathbb{R}^{d \times d}$ je libovolná matice.

Důkaz. KROK 1 Slabou formulaci (4.26) použijeme v důkazu nerovnosti (4.30). Nejdříve ukažme, že můžeme vylepšit regularitu tlaku. Formulace v (4.26) a (iii) v Lemmatu 4.5 implikují s.v. v Ω

$$\nabla p_\delta = \operatorname{div}(\sigma_\delta - \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) + \mathbf{g}. \quad (4.31)$$

Z (iii) Lemmatu 4.5 a předpokladu $\mathbf{g} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$ vyplývá

$$p_\delta \in W_{loc}^{1, \frac{q}{q-1}}(\Omega). \quad (4.32)$$

Díky regularitě z Lemmatu 4.5 víme, že klasická formulace rovnice v (4.4) platí bodově s.v. v Ω a je možné ji derivovat ve slabém smyslu. Pro získání nerovnosti (4.42) bychom chtěli otestovat výslednou (4.31) s $\Delta \mathbf{u}_\delta$, ale informace v Lemmatu 4.5 pro tento postup nestačí, jelikož pro pevné $k \in \{1, \dots, d\}$ není zřejmé, že $\partial_k \sigma_\delta : \varepsilon(\partial_k \mathbf{u}_\delta) \in L_{loc}^1(\Omega)$. Budeme proto pracovat s diferenčními podíly a později ukážeme, že je možné diferenční podíly nahradit derivací. Zvolme libovolnou $d \times d$ matici Q a funkci $\eta \in C_0^\infty(B(x_0, r'))$ takovou, že $\eta \equiv 1$ v $B(x_0, r)$ a $|\nabla \eta| \leq c(r' - r)^{-1}$, kde r, r' jsou z předpokladu lemmatu. Volbou $\boldsymbol{\varphi} = \Delta_{-h}(\eta^2 \Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx))$ pro $h < \frac{1}{2}(R - r')$, to je vhodná testovací funkce v (4.26), dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_{B(x_0, r')} \Delta_h(\sigma_\delta - \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) : \varepsilon(\eta^2 \Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx + \int_{B(x_0, r')} \mathbf{g} \cdot \Delta_{-h}(\eta^2 \Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx \\ &= \int_{B(x_0, r')} \Delta_h p_\delta \operatorname{div}(\eta^2 \Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Navíc platí $\varepsilon(\Delta_h \mathbf{u}_\delta) = \varepsilon(\Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx))$, $\operatorname{div} \Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx) = 0$ a z (4.33) vyplývá

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0, r')} \eta^2 \Delta_h \sigma_\delta : \varepsilon(\Delta_h \mathbf{u}_\delta) \, dx &= \int_{B(x_0, r')} \eta^2 \Delta_h \sigma_\delta : \varepsilon(\Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx \\
&= \int_{B(x_0, r')} \Delta_h \sigma_\delta : \varepsilon(\eta^2 \Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx \\
&\quad - 2 \int_{B(x_0, r')} \Delta_h \sigma_\delta : (\nabla \eta \odot \Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \eta \, dx \\
&= \int_{B(x_0, r')} \Delta_h(\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) : \varepsilon(\eta^2 \Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx \\
&\quad - \int_{B(x_0, r')} \mathbf{g} \cdot \Delta_{-h}(\eta^2 \Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx \\
&\quad + \int_{B(x_0, r')} \Delta_h p_\delta \operatorname{div}(\eta^2 \Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx \\
&\quad - 2 \int_{B(x_0, r')} \Delta_h \sigma_\delta : \varepsilon(\nabla \eta \odot \Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \eta \, dx \\
&= -2 \int_{B(x_0, r')} \Delta_h \sigma_\delta : (\nabla \eta \odot \Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \eta \, dx \\
&\quad + \int_{B(x_0, r')} \Delta_h(\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) : \varepsilon(\eta^2 \Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx \\
&\quad - \int_{B(x_0, r')} \mathbf{g} \cdot \Delta_{-h}(\eta^2 \Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx \\
&\quad + 2 \int_{B(x_0, r')} \Delta_h p_\delta \mathbf{1} : (\nabla \eta \odot \Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \eta \, dx. \tag{4.34}
\end{aligned}$$

KROK 2 Nyní provedme limitní přechod $h \rightarrow 0$. Začneme u členu na levé straně rovnosti (4.34). Platí

$$\Delta_h \sigma_\delta : \varepsilon(\Delta_h \mathbf{u}_\delta) \geq 0, \tag{4.35}$$

neboť

$$\begin{aligned}
\Delta_h \sigma_\delta : \varepsilon(\Delta_h \mathbf{u}_\delta) &= \int_0^1 \mathcal{D}^2 f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta) + th\varepsilon(\Delta_h \mathbf{u}_\delta))(\varepsilon(\Delta_h \mathbf{u}_\delta), \varepsilon(\Delta_h \mathbf{u}_\delta)) \, dt \\
&\geq \int_0^1 (1 + |\varepsilon(\mathbf{u}_\delta) + th\varepsilon(\Delta_h \mathbf{u}_\delta)|)^{\frac{p-2}{2}} |\varepsilon(\Delta_h \mathbf{u}_\delta)|^2 \, dt
\end{aligned}$$

a člen na pravé straně poslední nerovnosti je zřejmě nezáporný, odtud dostáváme

(4.35). Dále s.v. v $B(x_0, r')$ platí

$$\Delta_h \sigma_\delta : \varepsilon(\Delta_h \mathbf{u}_\delta) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \partial_k \sigma_\delta : \varepsilon(\partial_k \mathbf{u}_\delta). \quad (4.36)$$

K důkazu tohoto tvrzení použijeme Větu 3.4. Podle Lemmatu 4.5 je $\sigma_\delta \in W_{loc}^{1, \frac{q}{q-1}}(\Omega; \mathbb{S}^d)$ a $\mathbf{u}_\delta \in W_{loc}^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Zvolíme nejdřív $\varphi = \partial_k \sigma_\delta$, $\psi_h = \Delta_h \sigma_\delta$ a poté $\varphi = \varepsilon(\partial_k \mathbf{u}_\delta)$, $\psi_h = \varepsilon(\Delta_h \mathbf{u}_\delta)$ dostáváme konvergenci

$$\Delta_h \sigma_\delta \xrightarrow{h \rightarrow 0} \partial_k \sigma_\delta \text{ v } L^{\frac{q}{q-1}}(B(x_0, r'); \mathbb{S}^d)$$

respektive

$$\varepsilon(\Delta_h \mathbf{u}_\delta) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \varepsilon(\partial_k \mathbf{u}_\delta) \text{ v } L^2(B(x_0, r'); \mathbb{R}^d).$$

Odtud plyne bodová konvergence pro s.v. x v $B(x_0, r')$

$$\Delta_h \sigma_\delta(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \partial_k \sigma_\delta(x) \text{ a } \varepsilon(\Delta_h \mathbf{u}_\delta(x)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \varepsilon(\partial_k \mathbf{u}_\delta(x)),$$

což implikuje (4.36). Použitím Fatouova lemmatu, v (4.35) a (4.36) jsou ověřeny jeho předpoklady, dostaneme

$$\int_{B(x, r')} \eta^2 \partial_k \sigma_\delta : \varepsilon(\partial_k \mathbf{u}_\delta) \, dx \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \int_{B(x, r')} \eta^2 \Delta_h \sigma_\delta : \varepsilon(\Delta_h \mathbf{u}_\delta) \, dx. \quad (4.37)$$

V prvním a posledním členu na pravé straně v (4.34) provedeme limitní přechod zároveň. Označme $\tau_\delta = \sigma_\delta - p_\delta \mathbf{1}$, pak z (iii) v Lemmatu 4.5 a (4.31) je zřejmé $\tau_\delta \in W_{loc}^{1, \frac{q}{q-1}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Odhadněme

$$\begin{aligned} & \int_{B(x_0, r')} |\eta \Delta_h \tau_\delta : (\nabla \eta \odot \Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx)) - \eta \partial_k \tau_\delta : (\nabla \eta \odot \partial_k(\mathbf{u}_\delta - Qx))| \, dx \\ &= \int_{B(x_0, r')} |\eta \Delta_h \tau_\delta : (\nabla \eta \odot (\Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx) - \partial_k(\mathbf{u}_\delta - Qx))) \\ &+ \eta(\Delta_h \tau_\delta - \partial_k \tau_\delta) : (\nabla \eta \odot \partial_k(\mathbf{u}_\delta - Qx))| \, dx \\ &\leq c(r' - r)^{-1} \left(\int_{B(x_0, r')} |\Delta_h \tau_\delta|^{\frac{q}{q-1}} \, dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{B(x_0, r')} |\Delta_h \mathbf{u}_\delta - \partial_k \mathbf{u}_\delta|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ c(r' - r)^{-1} \left(\int_{B(x_0, r')} |\Delta_h \tau_\delta - \partial_k \tau_\delta|^{\frac{q}{q-1}} \, dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{B(x_0, r')} |\partial_k(\mathbf{u}_\delta - Qx)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &=: c(r' - r)^{-1} (I_1^{\frac{q-1}{q}} I_2^{\frac{1}{q}} + I_3^{\frac{q-1}{q}} I_4^{\frac{1}{q}}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Jelikož je $\tau_\delta \in W^{1, \frac{q}{q-1}}(B(x_0, R); \mathbb{R}^d)$, máme I_1 omezený stejnoměrně vzhledem k h a $I_3 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Protože je $\mathbf{u}_\delta \in W_{0, \text{div}}^{1, q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, máme $I_2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ a omezenost I_4 . Ukázali jsme tedy

$$\int_{B(x_0, r')} \eta \Delta_h \tau_\delta : (\nabla \eta \odot \Delta_h(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{B(x_0, r')} \eta \partial_k \tau_\sigma : (\nabla \eta \odot \partial_k(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx. \quad (4.39)$$

Nyní provedme limitní přechod ve druhém členu na pravé straně (4.34). Nejdřív odhadněme

$$\begin{aligned} & \int_{B(x_0, r')} |\Delta_h(\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) : \varepsilon(\eta^2 \Delta_h \mathbf{u}_\delta) - \partial_k(\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) : \varepsilon(\eta^2 \Delta_h \mathbf{u}_\delta)| \, dx \\ &= \int_{B(x_0, r')} |\Delta_h(\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) : (\varepsilon(\eta^2 \Delta_h \mathbf{u}_\delta) - \varepsilon(\eta^2 \partial_k \mathbf{u}_\delta)) \\ &+ (\Delta_h(\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) - \partial_k(\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta)) : \varepsilon(\eta^2 \partial_k \mathbf{u}_\delta) \, dx \\ &\leq \left(\int_{B(x_0, r')} |\Delta_h(\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(x_0, r')} |\varepsilon(\eta^2 \Delta_h \mathbf{u}_\delta) - \varepsilon(\eta^2 \partial_k \mathbf{u}_\delta)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left(\int_{B(x_0, r')} |\partial_k(\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) - \Delta_h(\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(x_0, r')} |\varepsilon(\eta^2 \partial_k \mathbf{u}_\delta)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{B(x_0, r')} (|\Delta_h \mathbf{u}_\delta| |\mathbf{u}_\delta|)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(c(r' - r)^{-1} \int_{B(x_0, r')} |\Delta_h \mathbf{u}_\delta - \partial_k \mathbf{u}_\delta|^2 \, dx \right. \\ &+ \left. \int_{B(x_0, r')} |\varepsilon(\Delta_h \mathbf{u}_\delta) - \varepsilon(\partial_k \mathbf{u}_\delta)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + c \left(\int_{B(x_0, r')} (|\Delta_h \mathbf{u}_\delta - \partial_k \mathbf{u}_\delta| |\mathbf{u}_\delta|)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\left(\int_{B(x_0, r')} |\varepsilon(\eta^2 \partial_k \mathbf{u}_\delta)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} =: c I_1^{\frac{1}{2}} ((r' - r)^{-1} I_2 + I_3)^{\frac{1}{2}} + c I_4^{\frac{1}{2}} I_5^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Z (i) Lemmatu 4.5 víme, že $\mathbf{u}_\delta \in W^{2, 2}(B(x_0, R); \mathbb{R}^d)$, to implikuje stejnoměrnou omezenost vzhledem k h pro I_1 a I_5 . Dále to implikuje, že členy I_2, I_3, I_4 jdou k nule pro $h \rightarrow 0$. Máme dokázáno

$$\int_{B(x_0, r')} \Delta_h(\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) : \varepsilon(\eta^2 \Delta_h \mathbf{u}_\delta) \, dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{B(x_0, r')} \partial_k(\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) : \varepsilon(\eta^2 \partial_k \mathbf{u}_\delta) \, dx. \quad (4.40)$$

Provedme limitní přechod ve zbývajícím členu na pravé straně (4.34). Nejdříve

odhadněme

$$\begin{aligned}
& \int_{B(x_0, r')} |\mathbf{g} \Delta_{-h}(\eta^2 \Delta_h \mathbf{u}_\delta) - \mathbf{g} \partial_k(\eta^2 \partial_k \mathbf{u}_\delta)| \, dx = \int_{B(x_0, r')} |\mathbf{g}| |\Delta_{-h}(\eta^2)(\Delta_h \mathbf{u}_\delta - \partial_k \mathbf{u}_\delta) \\
& + \eta^2(\Delta_h(\Delta_{-h} \mathbf{u}_\delta) - \partial_k(\Delta_{-h} \mathbf{u}_\delta)) + \partial_k \mathbf{u}_\delta(\Delta_{-h}(\eta^2) - \partial_k(\eta^2)) \\
& + \eta^2(\Delta_{-h} \partial_k \mathbf{u}_\delta - \partial_k \partial_k \mathbf{u}_\delta)| \, dx \leq c \left[\left(\int_{B(x_0, r')} |\Delta_{-h} \eta^2|^{\frac{q}{q-1}} \, dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \right. \\
& \left(\int_{B(x_0, r')} |\Delta_h \mathbf{u}_\delta - \partial_k \mathbf{u}_\delta|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{B(x_0, r')} |\Delta_h(\Delta_{-h} \mathbf{u}_\delta) - \partial_k(\Delta_{-h} \mathbf{u}_\delta)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + \left(\int_{B(x_0, r')} |\partial_k \mathbf{u}_\delta|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B(x_0, r')} |\Delta_{-h}(\eta^2) - \partial_k(\eta^2)|^{\frac{q}{q-1}} \, dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \\
& \left. + \left(\int_{B(x_0, r')} |\Delta_{-h} \partial_k \mathbf{u}_\delta - \partial_k \partial_k \mathbf{u}_\delta|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] = c(I_1^{\frac{q}{q-1}} I_2^{\frac{1}{q}} + I_3^{\frac{1}{2}} + I_4^{\frac{1}{q}} I_5^{\frac{q-1}{q}} + I_6^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

Hladkost η zaručuje stejnoměrnou omezenost vzhledem k h pro I_1 a dále také to, že $I_5 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Ze znalosti $\mathbf{u}_\delta \in W_{0, \text{div}}^{1, q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ dostaneme $I_2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ a omezenost I_4 , z $\mathbf{u}_\delta \in W^{2, 2}(B(x_0, R); \mathbb{R}^d)$ dostaneme $I_3 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, $I_6 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Ukázali jsme tedy

$$\int_{B(x_0, r')} \mathbf{g} \cdot \Delta_{-h}(\eta^2 \Delta_h \mathbf{u}_\delta) \, dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{B(x_0, r')} \mathbf{g} \cdot \partial_k(\eta^2 \partial_k \mathbf{u}_\delta) \, dx. \quad (4.41)$$

Celkem dostaneme z (4.37), (4.39), (4.40) a (4.41)

$$\begin{aligned}
& \int_{B(x_0, r')} \eta^2 \partial_k \sigma_\delta : \varepsilon(\partial_k \mathbf{u}_\delta) \, dx \leq -2 \int_{B(x_0, r')} \partial_k \sigma_\delta \mathbf{1} : (\nabla \eta \odot \partial_k(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \eta \, dx \\
& + \int_{B(x_0, r')} \partial_k(\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) : \varepsilon(\eta^2 \partial_k(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx \\
& - \int_{B(x_0, r')} \mathbf{g} \cdot \partial_k(\eta^2 \partial_k(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx \\
& + 2 \int_{B(x_0, r')} \partial_k p_\delta \mathbf{1} : (\nabla \eta \odot \partial_k(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \eta \, dx \quad (4.42)
\end{aligned}$$

KROK 3 Postupně odhadneme všechny členy na pravé straně nerovnosti (4.42). Pro odhad prvního si nejdříve odvodíme následující nerovnost

$$\Gamma_\delta^{\frac{2-q}{4}} |\nabla \sigma_\delta| \leq c \left(\sum_{k=1}^d \partial_k \sigma_\delta : \varepsilon(\partial_k \mathbf{u}_\delta) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.43)$$

Podle formule z Lemmatu 4.5 (iii) a odhadu z Lemmatu 4.1 (b) dostaneme

$$\begin{aligned}
\Gamma_\delta^{\frac{2-q}{2}} |\partial_k \sigma_\delta|^2 &= \Gamma_\delta^{\frac{2-q}{2}} \partial_k \sigma_\delta : \partial_k \sigma_\delta = c \Gamma_\delta^{\frac{2-q}{2}} \mathcal{D}^2 f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta))(\partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta), \partial_k \sigma_\delta) \\
&\leq c \Gamma_\delta^{\frac{2-q}{2}} \left(\mathcal{D}^2 f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta))(\partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta), \partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta)) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathcal{D}^2 f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta))(\partial_k \sigma_\delta, \partial_k \sigma_\delta) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c \Gamma_\delta^{\frac{2-q}{4}} \left(\mathcal{D}^2 f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta))(\partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta), \partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta)) \right)^{\frac{1}{2}} |\partial_k \sigma_\delta|,
\end{aligned}$$

tedy (4.43). V odhadu prvního členu na pravé straně (4.42) použijeme Youngovu nerovnost.

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{B(x_0, r')} \partial_k \sigma_\delta : (\nabla \eta \odot \partial_k(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \eta \, dx \right| \\
&\leq \alpha \int_{B(x_0, r')} \eta^2 |\nabla \sigma|^2 \Gamma_\delta^{\frac{2-q}{2}} \, dx + c(\alpha) \int_{B(x, r')} |\nabla \eta|^2 \Gamma_\delta^{\frac{q-2}{2}} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 \, dx \\
&\stackrel{(4.43)}{\leq} c\alpha \int_{B(x_0, r')} \eta^2 \partial_k \sigma_\delta : \varepsilon(\partial_k \mathbf{u}_\delta) \, dx + c(\alpha) \int_{B(x_0, r')} |\nabla \eta|^2 \Gamma_\delta^{\frac{q-2}{2}} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 \, dx
\end{aligned} \tag{4.44}$$

α zvolíme tak malé, aby bylo možné zahrnout první integrál na pravé straně poslední nerovnosti do levé strany (4.42). Nyní provedme odhad druhého členu na pravé straně (4.42).

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{B(x_0, r')} \partial_k(\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) : \varepsilon(\eta^2 \partial_k(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx \right| \\
&\stackrel{(4.29)}{\leq} c \left(\int_{B(x_0, r')} |\nabla \mathbf{u}_\delta| \eta |\nabla \eta| |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q| \, dx + \int_{B(x_0, r')} |\nabla \mathbf{u}_\delta| \eta^2 |\nabla \varepsilon(\mathbf{u}_\delta)| \, dx \right) \\
&\leq c \left(\int_{B(x_0, r')} |\nabla \mathbf{u}_\delta|^2 \, dx + (r' - r)^2 \int_{B(x_0, r')} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 \, dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{B(x_0, r')} \eta^2 |\nabla \mathbf{u}_\delta| \Gamma_\delta^{\frac{p-2}{4}} |\nabla \varepsilon(\mathbf{u}_\delta)| \Gamma_\delta^{\frac{2-p}{4}} \, dx \right)
\end{aligned}$$

Na poslední integrál použijeme Youngovu nerovnost s β , dále růstovou podmínku

v (4.6) a (b) z Lemmatu 4.1

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{B(x_0, r')} \partial_k(\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) : \varepsilon(\eta^2 \partial_k(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx \right| \\
& \leq c \left(\int_{B(x_0, r')} |\nabla \mathbf{u}_\delta|^2 \, dx + (r' - r)^{-2} \int_{B(x_0, r')} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 \, dx \right. \\
& \quad \left. + \beta \int_{B(x_0, r')} \eta^2 \partial_k \sigma_\delta : \varepsilon(\partial_k \mathbf{u}_\delta) \, dx + c(\beta) \int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{2-p}{2}} \, dx \right) \\
& =: c \left(I_1 + I_2 + \beta \int_{B(x_0, r')} \eta^2 \partial_k \sigma_\delta : \varepsilon(\partial_k \mathbf{u}_\delta) \, dx + I_3 \right),
\end{aligned}$$

kde

$$I_1 \leq c \left(\int_{B(x_0, r')} |\nabla \mathbf{u}_\delta|^{\frac{dp}{d-p}} \, dx \right)^{\frac{2(d-p)}{pd}} (r')^{\frac{pd-2(d-p)}{p}} \stackrel{(4.28)}{\leq} c(r')^{\frac{pd-2(d-p)}{p}},$$

připomeňme, že $\Gamma_\delta^{\frac{q-2}{2}} \geq 1$, odhadujeme

$$I_2 \leq (r' - r)^{-2} \int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{q-2}{2}} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 \, dx,$$

na I_3 použijeme Hölderovu nerovnost a dostaneme

$$\int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{2-p}{2}} \, dx \leq c(r')^{d \frac{2(p-1)}{p}} \left(\int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{p}{2}} \, dx \right)^{\frac{2-p}{2}} \stackrel{(4.10)}{\leq} c(r')^{d \frac{2(p-1)}{p}}. \quad (4.45)$$

Celkem vychází

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{B(x_0, r')} \partial_k(\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta) : \varepsilon(\eta^2 \partial_k(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx \right| \\
& \leq c(r' - r)^{-2} \int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{q-2}{2}} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 \, dx + (r')^{\frac{2(p-1)}{p}} + \beta I_0, \quad (4.46)
\end{aligned}$$

protože β je voleno tak, aby člen s β bylo možné zahrnout do levé strany (4.42). Odhadneme třetí člen na pravé straně (4.42).

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{B(x_0, r')} \mathbf{g} \cdot \partial_k(\eta^2 \partial_k(\mathbf{u}_\delta - Qx)) \, dx \right| \leq c \left(\int_{B(x_0, r')} \eta |\nabla \eta| |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q| + \eta^2 |\nabla^2 \mathbf{u}_\delta| \, dx \right) \\
& =: c(I_1 + I_2),
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c \left((r' - r)^{-2} \int_{B(x_0, r')} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 dx + |B(x, r')| \right) \\ &\leq c \left((r' - r)^{-2} \int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{q-2}{2}} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 dx + (r')^d \right), \end{aligned}$$

$$I_2 \leq c \int_{B(x_0, r')} \eta^2 |\nabla \varepsilon(\mathbf{u}_\delta)| dx \leq \gamma \int_{B(x_0, r')} \eta^2 \Gamma_\delta^{\frac{p-2}{2}} |\nabla \varepsilon(\mathbf{u}_\delta)|^2 dx + c(\gamma) \int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{2-p}{2}} dx.$$

Nerovnost

$$|\nabla^2 \mathbf{u}_\delta| \leq c |\nabla \varepsilon(\mathbf{u}_\delta)| \quad (4.47)$$

plyne okamžitě z identity

$$\partial_j \partial_k \mathbf{u}_\delta^i = \partial_j \varepsilon_{ik}(\mathbf{u}_\delta) + \partial_k \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}_\delta) - \partial_i \varepsilon_{jk}(\mathbf{u}_\delta).$$

Poslední integrál odhadneme stejně jako v (4.45) a dostaneme

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(x_0, r')} \mathbf{g} \cdot \partial_k (\eta^2 \partial_k (\mathbf{u}_\delta - Qx)) dx \right| &\leq c(r')^{\frac{2(p-1)}{p}} + c(r')^d \\ &+ \gamma \int_{B(x_0, r')} \eta^2 \partial_k \sigma_\delta : \varepsilon(\partial_k \mathbf{u}_\delta) dx + c(r' - r)^{-2} \int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{q-2}{2}} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 dx, \end{aligned} \quad (4.48)$$

opět volíme γ tak, aby bylo možné člen s γ zahrnout do levé strany (4.42). Odhadněme ještě zbylý člen na pravé straně (4.42), použijeme rovnici v (4.31).

$$\begin{aligned} &\left| \int_{B(x_0, r')} \partial_k p_\delta \mathbf{1} : (\nabla \eta \odot \partial_k (\mathbf{u}_\delta - Qx)) \eta dx \right| \\ &\leq c \int_{B(x_0, r')} |\nabla \sigma_\delta| |\nabla \eta| |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q| \eta dx + c \int_{B(x_0, r')} |\nabla (\mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta)| |\nabla \eta| |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q| \eta dx \\ &+ c \int_{B(x_0, r')} |\mathbf{g}| |\nabla \eta| |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q| \eta dx =: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

$$I_1 \leq c\beta \int_{B(x_0, r')} \eta^2 |\nabla \sigma|^2 \Gamma_\delta^{\frac{2-q}{2}} dx + c(\beta) \int_{B(x_0, r')} |\nabla \eta|^2 |\nabla \mathbf{u}_\delta - Qx|^2 \Gamma_\delta^{\frac{q-2}{2}} dx.$$

Odtud dostaneme použitím (4.43) stejný odhad jako pro první člen v nerovnosti (4.42). Připomeňme, že $\Gamma_\delta^{\frac{q-2}{2}} \geq 1$, odhadujeme

$$\begin{aligned}
I_2 &\stackrel{(4.29)}{\leq} c \int_{B(x_0, r')} |\nabla \mathbf{u}_\delta|^2 dx + c(r' - r)^{-2} \int_{B(x_0, r')} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 dx \\
&\leq \left(\int_{B(x_0, r')} |\nabla \mathbf{u}_\delta|^{\frac{dp}{d-p}} dx \right)^{\frac{2(d-p)}{pd}} (r')^{\frac{pd-2(d-p)}{p}} + c(r' - r)^{-2} \int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{q-2}{2}} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 dx \\
&\stackrel{(4.28)}{\leq} c(r')^{\frac{pd-2(d-p)}{p}} + c(r' - r)^{-2} \int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{q-2}{2}} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 dx
\end{aligned}$$

a nakonec

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq c \int_{B(x_0, r')} dx + c(r' - r)^{-2} \int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{q-2}{2}} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 dx \\
&\leq c(r')^d + c(r' - r)^{-2} \int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{q-2}{2}} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 dx,
\end{aligned}$$

konečně máme

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{B(x_0, r')} \partial_k p_\delta \mathbf{1} : (\nabla \eta \odot \partial_k (\mathbf{u}_\delta - Qx)) \eta dx \right| \\
&\leq c(r')^d + c(r')^{\frac{dp-2(d-p)}{p}} + c(r' - r)^{-2} \int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{q-2}{2}} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 dx \quad (4.49)
\end{aligned}$$

$$+ c\beta \int_{B(x_0, r')} \eta^2 \partial_k \sigma_\delta : \varepsilon(\partial_k \mathbf{u}_\delta) dx. \quad (4.50)$$

Z nerovností (4.42), (4.44), (4.46), (4.48), (4.50) zřejmě plyne nerovnost (4.30). $\square$

Věta 4.8. *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 4.3 a platí (1.4). Potom $\mathbf{u}_\delta \in W_{loc}^{1, \tilde{q}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ stejnoměrně vzhledem k $\delta \in (0, 1)$, kde $\tilde{q} = 3p$ v případě $d = 3$, pokud $d = 2$ je $\tilde{q}$ libovolné konečné číslo větší než 1.*

Důkaz. V důkazu použijeme hlavní kroky důkazu [4, Lemma 4.4]. Nejdříve se budeme zabývat případem $d=3$. V tomto případě ukážeme $\Gamma_\delta \in L_{loc}^{\frac{3}{2}p}(\Omega)$. Buď $B(x_0, 2R) \subset\subset \Omega$ a $R < \frac{1}{2}$. Zvolme libovolně $0 < r < r' < 2R$. Uvažujme funkci $\eta \in C^\infty(B(x_0, \frac{r'-r}{2}))$ s kompaktním nosičem v $B(x_0, \frac{r'-r}{2})$ takovou, že $\eta \equiv 1$ na $B(x_0, r)$ a $|\nabla \eta| \leq \frac{c}{r'-r}$ na $B(x_0, 2R)$. Definujme funkci $h_\delta := \Gamma_\delta^{\frac{p}{4}}$ na Ω .

Odhadujeme

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, r)} \Gamma_\delta^{\frac{3p}{2}} dx &\leq \int_{B(x_0, 2R)} (\eta h_\delta)^6 dx \leq c \left(\int_{B(x_0, 2R)} |\nabla(\eta h_\delta)|^2 dx \right)^3 \\ &\leq c \left(\int_{B(x_0, 2R)} |\nabla(\eta)|^2 h_\delta^2 dx + \int_{B(x_0, 2R)} \eta^2 |\nabla h_\delta|^2 dx \right)^3 =: c(I_1 + I_2)^3 \end{aligned}$$

Potom zřejmě

$$I_1 \leq \|\nabla \eta\|_{L^\infty(B(x_0, 2R))}^2 \int_{B(x_0, 2R)} h_\delta^2 dx.$$

Ještě zbývá odhad

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{B(x_0, 2R)} \eta^2 \left| \frac{p}{2} (1 + |\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)|^2)^{\frac{p}{4}-1} |\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)| |\nabla |\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)|| \right|^2 dx \\ &\leq c \int_{B(x_0, \frac{r'+r}{2})} \Gamma_\delta^{\frac{p-2}{2}} |\nabla \varepsilon(\mathbf{u}_\delta)|^2 dx \\ &\stackrel{(4.30)}{\leq} c \left((r' - r)^{-2} \int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{q-2}{2}} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 dx + (r')^\gamma \right) \\ &\leq c \left((r' - r)^{-2} \left(\int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{q}{2}} dx \right)^{\frac{q-2}{q}} \left(\int_{B(x_0, r')} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^q dx \right)^{\frac{2}{q}} + (r')^\gamma \right). \end{aligned}$$

Podle Lemmatu 3.3 k $\mathbf{u}_\delta$ existuje antisymetrická matice B a $a \in \mathbb{R}^d$ tak, že

$$\|\mathbf{u}_\delta - Bx - a\|_{L^q(B(x_0, r'))} \leq c \|\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)\|_{L^q(B(x_0, r'))}. \quad (4.51)$$

Potom po použití Kornovy nerovnosti (3.2) získáme

$$\begin{aligned} \|\nabla(\mathbf{u}_\delta - Bx - a)\|_{L^q(B(x_0, r'))} &= \|\nabla \mathbf{u}_\delta - B\|_{L^q(B(x_0, r'))} \leq c(\|\mathbf{u}_\delta - Bx - a\|_{L^q(B(x_0, r'))} \\ &\quad + \|\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)\|_{L^q(B(x_0, r'))}) \leq c \|\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)\|_{L^q(B(x_0, r'))}. \end{aligned}$$

Volbou $Q = B$ dostaneme

$$I_2 \leq c((r' - r)^{-2} \int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{q}{2}} dx + (r')^\gamma). \quad (4.52)$$

Tedy celkem

$$\left(\int_{B(x_0, r)} \Gamma_\delta^{\frac{3p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{3}} \leq c(r' - r)^{-2} \left(\int_{B(x_0, 2R)} \Gamma_\delta^{\frac{p}{2}} dx + \int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{q}{2}} dx \right) + c'(r')^\gamma. \quad (4.53)$$

Nyní odhadneme druhý člen na pravé straně. Předpoklad $q > p$ a fakt, že z (4.2) plyne $q < 3p$, zaručuje existenci $\theta \in (0, 1)$ takového, že

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{3p}. \quad (4.54)$$

Toto θ použijeme v interpolační nerovnosti

$$\|\Gamma_\delta^{\frac{1}{2}}\|_{L^q(B(x_0, r'); \mathbb{R}^d)} \leq \|\Gamma_\delta^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(B(x_0, r'); \mathbb{R}^d)}^\theta \|\Gamma_\delta^{\frac{1}{2}}\|_{L^{3p}(B(x_0, r'); \mathbb{R}^d)}^{1-\theta},$$

ze které dostaneme

$$\int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{q}{2}} dx \leq \left(\int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\theta \frac{q}{p}} \left(\int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{3p}{2}} dx \right)^{(1-\theta) \frac{q}{3p}}. \quad (4.55)$$

Podmínka $q_0 < p^{\frac{d+2}{d}}$ v (1.4) respektive $q < p^{\frac{d+2}{d}}$ je volena tak, aby platilo

$$(1-\theta) \frac{q}{p} < 1. \quad (4.56)$$

Pravou stranu (4.55) potom můžeme odhadnout pro $\delta \in (0, 1)$ za pomoci Youngovy nerovnosti výrazem

$$\delta \left(\int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{3p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{3}} + c\delta^{-\beta} \left(\int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{p}{2}} dx \right)^\kappa$$

pro jisté $\beta > 0$ a $\kappa > 0$. Volbou $\delta = \delta'(r' - r)^2$, $\delta' \in (0, 1)$ dostaneme

$$\begin{aligned} \left(\int_{B(x_0, r)} \Gamma_\delta^{\frac{3p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{3}} &\leq c\delta' \left(\int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{3p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{3}} + c(\delta')(r' - r)^{-\tilde{\beta}} \left(\int_{B(x_0, 2R)} \Gamma_\delta^{\frac{p}{2}} dx \right)^\kappa + \\ &\quad c(r' - r)^{-2} \int_{B(x_0, 2R)} \Gamma_\delta^{\frac{p}{2}} dx + C, \end{aligned}$$

kde $\tilde{\beta} > 0$. Nakonec položíme $c\delta' = \frac{1}{2}$ a jelikož $|r' - r| < 1$, obdržíme

$$\begin{aligned} \left(\int_{B(x_0, r)} \Gamma_\delta^{\frac{3p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{3}} &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{3p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad + c(\delta')(r' - r)^{-\max\{\tilde{\beta}, 2\}} \max \left\{ \left(\int_{B(x_0, 2R)} \Gamma_\delta^{\frac{p}{2}} dx \right)^\kappa, \int_{B(x_0, 2R)} \Gamma_\delta^{\frac{p}{2}} dx \right\} + C. \end{aligned}$$

Funkce $f(t)$ definovaná předpisem

$$f(t) := \left(\int_{B(x_0, t)} \Gamma_{\delta}^{\frac{3p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{pro } t \in (0, 2R)$$

splňuje předpoklady Lemmatu 3.7, podle kterého dostáváme $\forall r \in (0, R)$

$$\left(\int_{B(x_0, r)} \Gamma_{\delta}^{\frac{3p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{3}} \leq c(R-r)^{-\max\{\tilde{\beta}, 2\}} \max \left\{ \left(\int_{B(x_0, 2R)} \Gamma_{\delta}^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\kappa}, \int_{B(x_0, 2R)} \Gamma_{\delta}^{\frac{p}{2}} dx \right\} + C.$$

Integrál vyskytující se na pravé straně předchozí nerovnosti můžeme odhadnout

$$c \int_{B(x_0, 2R)} (1 + |\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta})|^2)^{\frac{p}{2}} dx \leq \tilde{c} \left(1 + \int_{B(x_0, 2R)} |\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta})|^p dx \right).$$

Podle Lemmatu 4.10 je pravá strana odhadnuta stejnoměrně vzhledem k δ , tedy i pro $\|\mathbf{u}_{\delta}\|_{W^{1,3p}(B(x_0, R); \mathbb{R}^d)}$ máme stejnoměrný odhad vzhledem k δ .

Ještě zbývá případ kdy $d = 2$. Zvolíme $\chi > 1$, pak

$$\int_{B(x_0, r)} \Gamma_{\delta}^{\frac{p\chi}{2}} dx \leq \int_{B(x_0, 2R)} (\eta h_{\delta})^{2\chi} dx \leq c \left(\int_{B(x_0, 2R)} |\nabla(\eta h_{\delta})|^t dx \right)^{\frac{2\chi}{t}},$$

kde $t \in (1, 2)$ volíme tak, aby $2\chi = \frac{2t}{2-t}$. Použitím Hölderovy nerovnosti v posledním členu předchozí nerovnosti dostaneme

$$\int_{B(x_0, r)} \Gamma_{\delta}^{\frac{p\chi}{2}} dx \leq c \left(\int_{B(x_0, 2R)} |\nabla(\eta h_{\delta})|^2 dx \right)^{\chi},$$

dále pokračujeme jako v případě $d = 3$. Pro ověření (4.56) nejdříve poznamenejme, že $\theta = \frac{p\chi - q}{q(\chi - 1)}$. Požadujeme tedy $\frac{\chi}{\chi - 1} \frac{q - p}{p} = \left(\frac{q}{p}(1 - \theta)\right) < 1$. Z (4.2) víme $\frac{q - p}{p} < 1$, dále $\frac{\chi}{\chi - 1} \xrightarrow{\chi \rightarrow \infty} 1$ a tudíž (4.56) platí pro dostatečně velká χ . Stačí zvolit $\chi > \frac{p}{2p - q}$. $\square$

Nakonec tohoto oddílu uveďme triviální důsledek [2, Corollary 3.1] předchozí věty.

Lemma 4.9. *Nechť $\alpha \in [1, \frac{3p}{p+1})$ pro $d = 3$, $\alpha \in [1, 2)$ v případě $d = 2$. Potom pro každou $\Omega' \subset \subset \Omega$ existuje konstanta c nezávislá na δ tak, že*

$$\|\mathbf{u}_{\delta}\|_{W^{2,\alpha}(\Omega'; \mathbb{R}^d)} \leq c.$$

4.3 Limitní přechod

Nyní se budeme zabývat existencí řešení systému (1.1). Ukážeme, že s využitím odhadů z Věty 4.8 můžeme provést limitní přechod $\delta \rightarrow 0$ v rovnici (4.4).

Lemma 4.10. *Pro $f : \mathbb{S}^d \rightarrow [0, \infty)$ splňující podmínku anizotropního růstu (1.3) je $\mathcal{D}f$ homeomorfismus $\mathbb{S}^d$ na $\mathbb{S}^d$.*

Důkaz. Nejprve ukažme, že $\mathcal{D}f$ je prosté. Pokud jsou $\sigma, \rho \in \mathbb{S}^d$, potom

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}f(\sigma) - \mathcal{D}f(\rho)) : (\sigma - \rho) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \mathcal{D}(\rho + s(\sigma - \rho)) : (\sigma - \rho) ds \\ &= \int_0^1 \mathcal{D}^2 f(\rho + s(\sigma - \rho))(\sigma - \rho, \sigma - \rho) ds \geq \int_0^1 c(1 + |\rho + s(\sigma - \rho)|^2)^{\frac{p-2}{2}} ds |\sigma - \rho|^2. \end{aligned}$$

A aplikací Cauchy-Schwarzovy nerovnosti obdržíme odhad

$$|\mathcal{D}f(\sigma) - \mathcal{D}f(\rho)| \geq c \int_0^1 (1 + |\rho + s(\sigma - \rho)|^2)^{\frac{p-2}{2}} ds |\sigma - \rho|. \quad (4.57)$$

Tedy $\mathcal{D}f(\sigma) = \mathcal{D}f(\rho)$ implikuje $\sigma = \rho$ a $\mathcal{D}f$ je tudíž prosté.

Nyní ukažme, že $\mathcal{D}f$ je na. Nechť $\rho \in \mathbb{S}^d$, ukážeme, že existuje $\sigma_0 \in \mathbb{S}^d$ tak, že $\mathcal{D}f(\sigma_0) = \rho$. Pro důkaz tohoto tvrzení použijeme Větu 3.5. Definujme zobrazení $P : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ předpisem

$$P(\sigma) := \mathcal{D}f(\sigma) - \rho.$$

Ověřme splnění podmínky (3.15). Použijeme odhad (4.8) a Cauchy-Schwartzovu nerovnost, dostaneme

$$P(\sigma) : \sigma = (\mathcal{D}f(\sigma) - \rho) : \sigma \geq c(|\sigma|^p - 1) - \rho : \sigma \geq c|\sigma|^p - |\rho||\sigma| - c.$$

Jelikož je $p > 1$ a $|\sigma|^p$ jde k nekonečnu rychleji než σ , určitě existuje r tak, že pro $|\sigma| = r$ je výraz na pravé straně poslední nerovnosti nezáporný a podle Věty 3.5 tedy existuje σ_0 takové, že $\mathcal{D}f(\sigma_0) - \rho = 0$ a máme dokázáno, že $\mathcal{D}f$ je na. Nakonec ověřme, že $(\mathcal{D}f)^{-1}$ je spojitě zobrazení. Z předpokladu $f \in C^2(\mathbb{S}^d)$ zřejmě vyplývá $\mathcal{D}f \in C^1(\mathbb{S}^d; \mathbb{S}^d)$. Z podmínky (1.3) plyne, že

$$\forall \sigma, \rho \in \mathbb{S}^d, \rho \neq 0 : \mathcal{D}^2 f(\sigma)(\rho, \rho) > 0,$$

to znamená, že $\mathcal{D}^2 f$ je pozitivně definitní matice pro libovolné $\sigma \in \mathbb{S}^d$ a nutně musí být regulární. Podle Věty o inverzním zobrazení dostaneme $(\mathcal{D}f)^{-1} \in C^1(\mathbb{S}^d, \mathbb{S}^d)$. Ukázali jsme dokonce, že $\mathcal{D}f$ je difeomorfismus. $\square$

Věta 4.11. *Za předpokladů Věty 4.3 existuje posloupnost $\{\mathbf{u}_{\delta_n}\}_{n=1}^{\infty}$ řešení (4.4) s $\delta = \delta_n$ taková, že pro $\delta_n \rightarrow 0$, $\forall \Omega' \subset \subset \Omega$*

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\delta_n} &\rightharpoonup \bar{\mathbf{u}} \text{ ve } W^{1,\tilde{q}}(\Omega'; \mathbb{R}^d) \\ \mathbf{u}_{\delta_n} &\rightharpoonup \bar{\mathbf{u}} \text{ ve } W^{2,\alpha}(\Omega'; \mathbb{R}^d) \\ \mathcal{D}f_{\delta_n}(\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n})) &\rightharpoonup \mathcal{D}f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})) \text{ ve } W^{1,\frac{q}{q-1}}(\Omega'; \mathbb{S}^d),\end{aligned}$$

kde pro $d = 3$ máme $\tilde{q} = 3p$, $\alpha \in (1, \frac{3p}{p+1})$, pro $d = 2$ je $\tilde{q} \in (1, \infty)$ a $\alpha \in (1, 2)$. Navíc $\bar{\mathbf{u}}$ je slabé řešení úlohy (4.1).

Důkaz. V důkazu jsou použity hlavní kroky důkazu [2, Theorem 1.3]. Existence slabě konvergentní posloupnosti $\{\mathbf{u}_{\delta_n}\}_{n=1}^{\infty}$ plyne ze stejnoměrného odhadu ve Větě 4.8, Lemmatu 4.9, reflexivity $W^{1,\tilde{q}}(\Omega'; \mathbb{R}^d)$ a $W^{2,\alpha}(\Omega'; \mathbb{R}^d)$ pro každou $\Omega' \subset \subset \Omega$. Díky vnoření $W_{loc}^{1,\tilde{q}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ do $W_{loc}^{1,q}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, kompaktnímu vnoření $W_{loc}^{1,\tilde{q}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ do $L_{loc}^q(\Omega; \mathbb{R}^d)$ máme existenci vybrané posloupnosti $\{\mathbf{u}_{\delta_n}\}$, že pro $\delta_n \rightarrow 0$ a pro každou $\Omega' \subset \subset \Omega$

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{u}_{\delta_n} &\rightharpoonup \bar{\mathbf{u}} \text{ ve } W^{1,q}(\Omega'; \mathbb{R}^d) \\ \mathbf{u}_{\delta_n} &\rightarrow \bar{\mathbf{u}} \text{ v } L^q(\Omega'; \mathbb{R}^d).\end{aligned}\right\} \quad (4.58)$$

Ještě ukažme

$$\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n}) \xrightarrow{\delta_n \rightarrow 0} \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) \text{ v } L_{loc}^{\tilde{q}}(\Omega; \mathbb{S}^d). \quad (4.59)$$

Zvolme $B(x, R) \subset \Omega$ a $F \in L^{\tilde{q}'}(B(x, R); \mathbb{S}^d)$ potom

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)} F : \varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n}) \, dx &= \int_{B(x,r)} \sum_{i,j} F_{ij} \frac{1}{2} (\partial_i u_{\delta_n}^j + \partial_j u_{\delta_n}^i) \, dx \\ &\xrightarrow{\delta_n \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} \sum_{i,j} F_{ij} \frac{1}{2} (\partial_i \bar{u}^j + \partial_j \bar{u}^i) \, dx = \int_{B(x,r)} F : \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) \, dx\end{aligned}$$

a (4.59) platí.

Odvoďme nerovnost

$$|\nabla(\mathcal{D}f_{\delta}(\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta})))| \leq c |\mathcal{D}^2 f_{\delta}(\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta}))|^{\frac{1}{2}} (\mathcal{D}^2 f_{\delta}(\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta}))(\partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_{\delta}), \partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_{\delta})))^{\frac{1}{2}}. \quad (4.60)$$

Jelikož je $\mathcal{D}^2 f_{\delta}(\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta}))$ pozitivně definitní, to plyne z formule pro $\mathcal{D}^2 f_{\delta}$ v Lemmatu 4.1 a růstové podmínky (1.3), a symetrická bilineární forma na $\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d$, můžeme

v následujícím použít Cauchy-Schwarzovu nerovnost.

$$\begin{aligned}
\left| \partial_k \{ \mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)) \} \right|^2 &= \mathcal{D}^2 f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta))(\partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta), \partial_k \{ \mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)) \}) \\
&\leq \left(\mathcal{D}^2 f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta))((\partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta), \partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta))) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\mathcal{D}^2 f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta))(\partial_k \{ \mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)) \}, \partial_k \{ \mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)) \}) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\mathcal{D}^2 f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta))(\partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta), \partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta)) \right)^{\frac{1}{2}} |\mathcal{D}^2 f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta))|^{\frac{1}{2}} \left| \partial_k \{ \mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)) \} \right|
\end{aligned}$$

a odtud vychází (4.60).

Nyní ukážeme, že stejnoměrně vzhledem k δ platí

$$\mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)) \in W_{loc}^{1, \frac{q}{q-1}}(\Omega; \mathbb{S}^d). \quad (4.61)$$

Zvolme $B(x_0, R) \subset \Omega$ a necht r, r' jsou takové, že $0 < r < r' < R$. Potom integrováním (4.60) přes $B(x_0, r)$ a použitím Hölderovy nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0, r)} |\nabla(\mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)))|^{\frac{q}{q-1}} dx &\leq c \left(\int_{B(x_0, r)} |\mathcal{D}^2 f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta))|^{\frac{q}{q-2}} dx \right)^{\frac{q-2}{2(q-1)}} \\
&\quad \left(\int_{B(x_0, r)} \mathcal{D}^2 f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta))(\partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta), \partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta)) dx \right)^{\frac{q}{2(q-1)}} \\
&= c I_1^{\frac{q-2}{2(q-1)}} \cdot I_2^{\frac{q}{2(q-1)}}.
\end{aligned}$$

Pro I_2 máme odhad z Lemmatu 4.7

$$I_2 \leq c_1 (r' - r)^{-2} \int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{q-2}{2}} |\nabla \mathbf{u}_\delta - Q|^2 dx + c_2 (r')^\gamma.$$

Obdobně jako v důkazu nerovnosti (4.52) obdržíme

$$I_2 \leq c \left(\int_{B(x_0, r')} \Gamma_\delta^{\frac{q}{2}} dx + (r')^\gamma \right),$$

kde konstanta c nezávisí na δ a stejnoměrná omezenost integrálu na pravé straně vzhledem k δ vyplývá z Věty 4.8. Omezenost I_1 plyne z odhadu (4.7) a Věty 4.8. Tím je ukázáno (4.61).

Ted se zaměříme na limitní přechod $\delta_n \rightarrow 0$ v eliptickém členu rovnice (4.4). Položme

$$W_{\delta_n} := \mathcal{D}f_{\delta_n}(\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n})) = \delta_n q(1 + |\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n})|^2)^{\frac{q-2}{2}} \varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n}) + \mathcal{D}f(\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n}))$$

Odhad (4.61) implikuje existenci $W \in W_{loc}^{1, \frac{q}{q-1}}(\Omega; \mathbb{S}^d)$ a vybrané posloupnosti značené stejně $\{W_{\delta_n}\}_{n=1}^\infty$ tak, že pro $\delta_n \rightarrow 0$ a každou $\Omega' \subset\subset \Omega$

$$\left. \begin{aligned} W_{\delta_n} &\rightharpoonup W \text{ ve } W^{1, \frac{q}{q-1}}(\Omega'; \mathbb{S}^d) \\ W_{\delta_n} &\rightarrow W \text{ v } L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega'; \mathbb{S}^d) \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

Navíc podle Věty 4.8 je $\varepsilon(\mathbf{u}_\delta) \in L_{loc}^q(\Omega; \mathbb{S}^d)$ stejnoměrně vzhledem k δ , proto pro $\delta_n \rightarrow 0$ a pro každou $\Omega' \subset\subset \Omega$

$$\delta_n q(1 + |\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n})|^2)^{\frac{q-2}{2}} \varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n}) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \text{ v } L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega'; \mathbb{S}^d)$$

a to implikuje

$$\mathcal{D}f(\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n})) \rightarrow W \text{ v } L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega'; \mathbb{S}^d) \text{ a s.v. v } \Omega. \quad (4.63)$$

Z (4.63) a spojitosti $(\mathcal{D}f)^{-1}$ pak vyplývá pro $\delta_n \rightarrow 0$

$$\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n}) \rightarrow (\mathcal{D}f)^{-1}W \text{ s.v. v } \Omega. \quad (4.64)$$

Z (4.59) dostáváme omezenost $\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n})$ v $L_{loc}^{\tilde{q}}(\Omega; \mathbb{S}^d)$, což spolu s konvergencí $\mathbf{u}_{\delta_n} \xrightarrow{\delta_n \rightarrow 0} \bar{\mathbf{u}}$ ve $W^{1, \frac{d\alpha}{d-\alpha}}(\Omega'; \mathbb{R}^d)$ pro každou $\Omega' \subset\subset \Omega$, plynoucí z (4.58), dává

$$\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n}) \rightarrow (\mathcal{D}f)^{-1}W \text{ v } L_{loc}^t(\Omega'; \mathbb{S}^d) \quad \forall t < \tilde{q}.$$

Z (4.59) navíc plyne

$$\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) = (\mathcal{D}f)^{-1}W \text{ neboli } \mathcal{D}f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})) = W.$$

Potom můžeme (4.62) přepsat pro $\delta_n \rightarrow 0$ a každou $\Omega' \subset\subset \Omega$

$$\left. \begin{aligned} W_{\delta_n} &\rightharpoonup \mathcal{D}f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})) \text{ ve } W^{1, \frac{q}{q-1}}(\Omega'; \mathbb{S}^d) \\ W_{\delta_n} &\rightarrow \mathcal{D}f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})) \text{ v } L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega'; \mathbb{S}^d) \text{ a s.v. v } \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (4.65)$$

Nyní zvolme $\varphi \in C_{0, \text{div}}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Připomeňme rovnici (4.4) pro $\mathbf{u}_\delta$

$$\int_{\Omega} \mathcal{D}f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)) : \varepsilon(\varphi) \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{u}_\delta \otimes \mathbf{u}_\delta : \varepsilon(\varphi) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \varphi \, dx.$$

Proveďme limitní přechod v členech na levé straně.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\mathcal{D}f_{\delta_n}(\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n})) - \mathcal{D}f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))) : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}) \, dx \right| \\ \leq \left(\int_{\Omega} |\mathcal{D}f_{\delta_n}(\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n})) - \mathcal{D}f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))|^{\frac{q}{q-1}} \, dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{\Omega} |\varepsilon(\boldsymbol{\varphi})|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

a podle (4.65) jde první integrál na pravé straně poslední nerovnosti k nule. Nakonec provedeme limitní přechod v konvektivním členu. S využitím stejnoměrné omezenosti $\mathbf{u}_{\delta}$ pak

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\mathbf{u}_{\delta_n} \otimes \mathbf{u}_{\delta_n} - \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) : \varepsilon(\boldsymbol{\varphi}) \, dx \right| &\leq \int_{\Omega} (|\mathbf{u}_{\delta_n}| + |\bar{\mathbf{u}}|) |\mathbf{u}_{\delta_n} - \bar{\mathbf{u}}| |\varepsilon(\boldsymbol{\varphi})| \, dx \\ &\leq M \left(\int_{\text{spt } \boldsymbol{\varphi}} |\mathbf{u}_{\delta_n} - \bar{\mathbf{u}}|^{\frac{q}{q-1}} \, dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{\Omega} |\varepsilon(\boldsymbol{\varphi})|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

z (4.58) vyplývá, že první integrál na pravé straně poslední nerovnosti jde k nule, vzhledem k námi uvažovanému q totiž je $\frac{q}{q-1} \leq q$. Máme tedy ověřeno, že $\bar{\mathbf{u}}$ je řešení (4.1). $\square$

Poznámka 3. Ukázali jsme, že existuje řešení, které má jistou regularitu. Z informací, které máme k dispozici, neplyne jeho jednoznačnost.

Kapitola 5

Hölderovská spojitost gradientů řešení

5.1 Částečná regularita pro $d = 3$, $q_0 = 2$

V této sekci ukážeme, že slabé řešení systému (4.1) zkonstruované ve Větě 4.11 má hölderovsky spojitě první derivace na otevřené množině, jejíž doplněk do Ω má nulovou míru.

Poznámka 4. Prostorem $C^{0,\mu}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, kde $\mu \in (0, 1)$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, budeme rozumět prostor funkcí

$$\{\mathbf{v}; \forall K \subset \Omega \text{ kompaktní } \mathbf{v} \in C^{0,\mu}(K; \mathbb{R}^d)\}.$$

Pro účely této kapitoly zavedme funkci

$$E(x, r) := E(\bar{\mathbf{u}}, B(x, r)) := \int_{B(x, r)} |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) - (\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, r}|^2 dy,$$

kde $(\cdot)_{x, r}$ a $\int_{B(x, r)}$ značí integrální průměr přes $B(x, r)$. Několikrát se odvoláme na větu o charakterizaci hölderovsky spojitých funkcí [12, Theorem 1.3]:

Věta 5.1. *Nechť existuje $R_0 > 0$ a $c > 0$ takové, že pro všechna $x \in \Omega$ a všechna $\rho < \min\{R_0, \text{dist}(x, \partial\Omega)\}$ platí*

$$\int_{B(x, \rho)} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{x, \rho}|^p dx \leq c \rho^{d+p\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1]$$

potom $\mathbf{u} \in C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^d)$.

Pro specifikaci konstanty C^* , která se vyskytuje v Lemmatu 5.3, uveďme [2, Lemma 5.1].

Lemma 5.2. *Nechť $A \in \mathbb{S}^3$ je taková, že $|A| \leq L$. Nechť $\mathbf{w} \in W_{div}^{1,2}(B(0,1);\mathbb{R}^3)$ splňuje*

$$\int_{B(0,1)} \mathcal{D}^2 f(A)(\varepsilon(\mathbf{w}), \varepsilon(\boldsymbol{\varphi})) \, dy = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in W_{0,div}^{1,2}(B(0,1);\mathbb{R}^3).$$

Pak existuje konstanta $C^ = C^*(p, L)$ tak, že*

$$\int_{B(0,\tau)} |\varepsilon(\mathbf{w}) - (\varepsilon(\mathbf{w}))_\tau|^2 \, dy \leq C^* \tau^2 \int_{B(0,1)} |\varepsilon(\mathbf{w}) - (\varepsilon(\mathbf{w}))_1|^2 \, dy$$

platí pro každé $\tau \in (0,1)$.

Nyní uvedeme tvrzení [2, Lemma 5.2], na jehož použití je založen důkaz lemmatu o existenci otevřené podmnožiny Ω , na níž je symetrický gradient řešení $\bar{\mathbf{u}}$ hölderovsky spojitý.

Lemma 5.3. *Nechť $L > 0$ a $\mu \in (0, \mu_0)$, kde $\mu_0 := \frac{3}{2} - \frac{2}{p}$. Nechť $C_* := 2C^*$, kde $C^*(p, L)$ je zvolena jako v Lemmatu 5.2. Potom pro každé $\tau \in (0, \frac{1}{4})$ existuje $\lambda = \lambda(L, \tau)$ s vlastností: pokud existuje koule $B(x, r) \subset\subset \Omega$, pro kterou platí*

$$|\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})_{x,r}| \leq L \quad \text{a} \quad E(x, r) + r^{2\mu} < \lambda^2,$$

potom

$$E(x, \tau r) \leq C_* \tau^2 (E(x, r) + r^{2\mu}).$$

Lemma 5.4. *Existuje otevřená množina $\Omega_0 \subset \Omega$ tak, že $|\Omega \setminus \Omega_0| = 0$ a $\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) \in C^{0,\alpha}(\Omega_0, \mathbb{S}^d)$ pro jisté $\alpha \in (0,1)$. Navíc množinu Ω_0 můžeme popsat jako*

$$\Omega_0 = \left\{ x \in \Omega : \sup_{\frac{1}{2} \text{dist}(x, \partial\Omega) > r > 0} |(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x,r}| < \infty; \liminf_{r \rightarrow 0} E(x, r) = 0 \right\}. \quad (5.1)$$

Důkaz. V důkazu využijeme techniku použitou v důkazu [9, Theorem 1.1]. Ukážeme, že pro každé $x_0 \in \Omega_0$ existuje $B(x_0, s)$ taková, že $\bar{\mathbf{u}} \in C^{0,\alpha}(B(x_0, s))$ pro jisté $\alpha \in (0,1)$.

Ze Sobolev-Poincarého nerovnosti dostaneme

$$\int_{B(x,r)} |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) - (\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x,r}|^2 \, dy \leq \left(r^\beta \int_{B(x,r)} |\nabla \varepsilon(\bar{\mathbf{u}})|^\beta \right)^{\frac{2}{\beta}}, \quad (5.2)$$

kde $2 < \frac{3\beta}{3-\beta}$ t.j. $\beta > \frac{6}{5}$. Protože je $\bar{\mathbf{u}} \in W_{loc}^{2,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^3)$, kde $\alpha \in [1, \frac{3p}{p+1})$, podle Lemmatu 4.9 a protože $\frac{6}{5} < \frac{3p}{p+1}$ pro námi uvažované p , plyne z Lebesgueovy věty o hustotě a (5.2) plyne pro skoro všechna $x_0 \in \Omega$

$$E(x_0, r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0, \quad \sup_{\frac{1}{2}\{\text{dist}(x, \partial\Omega) > r > 0\}} |(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x_0, r}| < \infty. \quad (5.3)$$

Zvolme takové x_0 a zvolme $L > \frac{3}{2} \sup_{r>0} \{ |(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x_0, r}| \}$. Zvolme $\mu \in (0, \mu_0)$ a zvolme $\tau \in (0, \frac{1}{4})$, aby platilo

$$C_* \tau^2 \leq \frac{1}{2} \text{ a } \tau^{2\mu} < \frac{1}{2}, \quad (5.4)$$

$C_*(p, L)$ je jako v Lemmatu 5.3. Díky (5.3) existuje $B(x_0, r) \subset\subset \Omega$ taková, že

$$\left. \begin{aligned} |(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x_0, r}| &< \frac{2}{3}L \\ E(x_0, r) + r^{2\mu} &< \lambda_0^2, \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

kde číslo λ_0 je voleno tak, aby platilo

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 \tau^{-3} (1 - 2\tau^{2\mu})^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-\frac{i}{2}} &< \frac{L}{3} \\ \lambda_0^2 &\leq \frac{1}{2} \min\left\{\frac{1}{2}, 1 - 2\tau^{2\mu}\right\} \lambda^2, \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

$\lambda(L, \tau)$ je z Lemmatu 5.3. Díky spojitosti funkcí $x \mapsto E(x, r) + r^{2\mu}$ a $x \mapsto (\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, r}$ existuje koule $B(x_0, s)$ taková, že pro každé $x \in B(x_0, s)$

$$\left. \begin{aligned} E(x, r) + r^{2\mu} &< \lambda_0^2 \\ |(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, r}| &< \frac{2}{3}L < L. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Ukažme $\forall x \in B(x_0, s)$ odhady

$$|(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, \tau^n r}| \leq L \quad (5.8)$$

$$E(x, \tau^n r) + (\tau^n r)^{2\mu} \leq \lambda^2. \quad (5.9)$$

Nejdříve indukci dokažme, že $\forall x \in B(x_0, s)$ platí

$$E(x, \tau^k r) \leq 2^{-k} E(x, r) + \sum_{j=1}^k 2^{-j} \tau^{2\mu(k-j)} r^{2\mu}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

Nechť je tedy $x \in B(x_0, s)$. Z (5.7) vyplývá podle Lemmatu 5.3 platnost (5.10) pro $k = 1$. Nechť (5.10) platí pro $k = 1, \dots, n$. Potom

$$\begin{aligned} E(x, \tau^n r) &\leq 2^{-n} E(x, r) + \tau^{2\mu n} \sum_{j=1}^n 2^{-j} \tau^{-2\mu j} r^{2\mu} = 2^{-n} E(x, r) + \frac{2^{-n} - \tau^{2\mu n}}{1 - 2\tau^{2\mu}} r^{2\mu} \\ &\leq 2^{-n} \left(E(x, r) + \frac{1}{1 - 2\tau^{2\mu}} r^{2\mu} \right) \leq 2^{-n} \frac{1}{1 - 2\tau^{2\mu}} (E(x, r) + r^{2\mu}). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Odtud dostaneme díky (5.9), (5.7) a protože je $\tau^{2\mu} < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} E(x, \tau^n r) + (\tau^n r)^{2\mu} &\leq \frac{2^{-n}}{1 - 2\tau^{2\mu}} \lambda_0^2 + \tau^{2\mu n} r^{2\mu} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{-n}}{1 - 2\tau^{2\mu}} \lambda_0^2 + \tau^{2\mu n} r^{2\mu} \right) \\ &\leq \frac{2}{1 - 2\tau^{2\mu}} \lambda_0^2 < \lambda^2, \end{aligned}$$

a tudíž (5.9) platí. Ukažme odhad (5.8).

$$\begin{aligned} |(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, \tau^n r}| &= |(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, r} + \sum_{k=0}^{n-1} ((\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, \tau^{k+1} r} - (\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, \tau^k r})| \\ &\leq |(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, r}| + \sum_{k=0}^{n-1} |(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, \tau^{k+1} r} - (\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, \tau^k r}| \\ &\leq |(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, r}| + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{B(x, \tau^{k+1} r)} |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})(y) - (\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, \tau^k r}| dy \\ &\leq |(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, r}| + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|B(x, \tau^k r)|^{\frac{1}{2}}}{|B(x, \tau^{k+1} r)|} \left(\int_{B(x, \tau^k r)} |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})(y) - (\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, \tau^k r}|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, r}| + \tau^{-3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{B(x, \tau^k r)} |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})(y) - (\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, \tau^k r}|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, r}| + \tau^{-3} \sum_{k=0}^{n-1} (E(x, \tau^k r))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Z platnosti (5.10) pro $k = 1, \dots, n$ vychází

$$|(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, \tau^n r}| \leq |(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, r}| + \tau^{-3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(2^{-k} \left(E(x, r) + \frac{1}{1 - 2\tau^{2\mu}} r^{2\mu} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

jako důsledek (5.11). Odhadujme dále

$$\begin{aligned} |(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x,\tau^n r}| &\leq |(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x,r}| + \tau^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} (1 - 2\tau^{2\mu})^{-\frac{1}{2}} (E(x, r) + r^{2\mu})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x,r}| + \tau^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} (1 - 2\tau^{2\mu})^{-\frac{1}{2}} \lambda_0 < \frac{1}{3}L + \frac{2}{3}L = L, \end{aligned}$$

a máme dokázán odhad (5.8). Použijeme Lemma 5.3 s odhady (5.8) a (5.9), dostaneme

$$\begin{aligned} E(x, \tau^{n+1}r) &\leq \frac{1}{2} (E(x, \tau^n r) + (\tau^n r)^{2\mu}) \leq \frac{1}{2} (2^{-n} E(x, r) + \sum_{j=1}^n 2^{-j} \tau^{2\mu(n-j)} r^{2\mu}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \tau^{2\mu n} r^{2\mu} = 2^{-n-1} E(x, r) + \left(\sum_{j=1}^n 2^{-j-1} \tau^{2\mu((n+1)-(j+1))} + \frac{1}{2} \tau^{2\mu n} \right) r^{2\mu} \\ &= 2^{-(n+1)} E(x, r) + \left(\sum_{j=1}^{n+1} 2^{-j} \tau^{2\mu(n+1-j)} \right) r^{2\mu}, \end{aligned}$$

čímž je dokázáno (5.10).

Pro libovolně zvolené $\rho \in (0, r)$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\tau^{k+1}r < \rho \leq \tau^k r. \quad (5.12)$$

Využijeme-li nerovnosti

$$\int_{B(x, r)} |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) - \varepsilon(\bar{\mathbf{u}})_{x, r}|^p dy \leq c \inf_{\lambda \in \mathbb{R}^{d \times d}} \int_{B(x, r)} |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) - \lambda|^p dy,$$

platné pro $p \geq 1$, máme pro ρ odhad

$$\begin{aligned} E(x, \rho) &\leq \left(\frac{\rho}{\tau^{k+1}r} \right)^d E(x, \rho) \leq c \left(\frac{\rho}{\tau^{k+1}r} \right)^d \int_{B(x, \rho)} |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) - (\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})_{x, \tau^k r})|^2 dy \\ &\leq c \tau^{-3} E(x, \tau^k r). \end{aligned}$$

Odtud s využitím (5.11) dostaneme

$$E(x, \rho) \leq c \tau^{-3} 2^{-k} (1 - 2\tau^{2\mu})^{-1} (E(x, r) + r^{2\mu}) \leq c 2^{-k}. \quad (5.13)$$

Dále máme

$$\frac{\rho}{r} \geq \tau^{k+1} > \tau^{2k} = (2^{-M})^k$$

pro M zvolené tak, aby $\tau^2 = 2^{-M}$. Z (5.13) proto dostaneme

$$E(x, \rho) \leq c \left(\frac{\rho}{r} \right)^{\frac{1}{M}}. \quad (5.14)$$

Pro všechna $x \in B(x_0, s)$ potom z (5.14) vyplývá pro $\alpha = M^{-1}$

$$\int_{B(x, \rho)} |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})(y) - (\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))_{x, \rho}|^2 dy \leq c \rho^\alpha \quad \forall \rho \leq r$$

a podle Věty 5.1 je $\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) \in C^{0, \alpha}(B(x_0, s); \mathbb{S}^3)$.

Ukázali jsme, že pro každý bod $x_0 \in \Omega_0$ existuje okolí $B(x_0, s)$ tak, že $\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) \in C^{0, \alpha}(B(x_0, s); \mathbb{S}^3)$. Potom zřejmě $B(x_0, s) \subset \Omega_0$, tudíž je Ω_0 otevřená. Navíc $\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) \in C^{0, \alpha}(\Omega; \mathbb{S}^3)$ a $|\Omega \setminus \Omega_0| = 0$. $\square$

Věta 5.5. *Za předpokladů Věty 4.11 existuje množina Ω_0 tak, že $|\Omega \setminus \Omega_0| = 0$ a $\bar{\mathbf{u}} \in C^{1, \nu}(\Omega_0; \mathbb{R}^3)$ pro každé $\nu \in (0, 1)$.*

Důkaz. V důkazu věty jsou použity hlavní kroky z důkazu [2, Theorem 1.4]. Z minulého lemmatu máme existenci množiny Ω_0 takové, že $\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) \in C^{0, \alpha}(\Omega_0; \mathbb{R}^3)$ pro jisté $\alpha \in (0, 1)$. Ukážeme, že $\bar{\mathbf{u}} \in C^{1, \nu}(\Omega_0; \mathbb{R}^3)$ pro každé $\nu \in (0, 1)$. Zvolme funkci $\boldsymbol{\psi} \in C_{0, \text{div}}^\infty(\Omega_0; \mathbb{R}^3)$. V (4.1) použijeme testovací funkci $\boldsymbol{\varphi} = \partial_k \boldsymbol{\psi}$ pro pevné $k \in \{1, \dots, d\}$. Potom integrací per partes, tu můžeme provést, neboť podle Věty 4.11 máme $\mathcal{D}f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})) \in W_{loc}^{1, \frac{q}{q-1}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, dostaneme

$$\int_{\Omega_0} \mathcal{D}^2 f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))(\varepsilon(\mathbf{v}), \varepsilon(\boldsymbol{\psi})) dx = \int_{\Omega_0} \partial_k(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) : \varepsilon(\boldsymbol{\psi}) dx - \int_{\Omega_0} \mathbf{g} \cdot \partial_k \boldsymbol{\psi} dx \quad (5.15)$$

$\forall \boldsymbol{\psi} \in C_{0, \text{div}}^\infty(\Omega_0; \mathbb{R}^3)$

kde $\mathbf{v} := \partial_k \bar{\mathbf{u}}$. Pro $x_0 \in \Omega_0$ označme $\varepsilon_0 := \varepsilon(\bar{\mathbf{u}})(x_0)$. Nechť $B(x_0, R) \subset\subset \Omega_0$ a $\mathbf{v}_0 \in W^{1, 2}(B(x_0, R), \mathbb{R}^3)$ je řešení rovnice

$$\left. \begin{aligned} \int_{B(x_0, R)} \mathcal{D}^2 f(\varepsilon_0)(\varepsilon(\mathbf{v}_0), \varepsilon(\boldsymbol{\varphi})) dx &= 0 \\ \mathbf{v}_0 &= \mathbf{v} \text{ na } \partial B(x_0, R), \quad \text{div } \mathbf{v}_0 = 0 \text{ v } B(x_0, R) \\ \forall \boldsymbol{\varphi} &\in C_{0, \text{div}}^\infty(B(x_0, R), \mathbb{R}^3). \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Potom pro $r \in (0, R]$ dostaneme podle [12, Theorem 2.1] využitím Kornovy nerovnosti (3.1) a vlastností systému v (5.16)

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla \mathbf{v}_0|^2 dx \leq c \left(\frac{r}{R} \right)^3 \int_{B(x_0, R)} |\nabla \mathbf{v}_0|^2 dx \leq c \left(\frac{r}{R} \right)^3 \int_{B(x_0, R)} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx. \quad (5.17)$$

Odtud okamžitě vyplývá

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, r)} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx &\leq c \left[\int_{B(x_0, r)} |\nabla \mathbf{v}_0|^2 dx + \int_{B(x_0, R)} |\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}_0|^2 dx \right] \\ &\leq c \left[\left(\frac{r}{R} \right)^3 \int_{B(x_0, R)} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx + \int_{B(x_0, R)} |\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}_0|^2 dx \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Nyní odhadneme poslední integrál na pravé straně. Po použití růstové podmínky (1.3) a Kornovy nerovnosti (3.1) dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, R)} \mathcal{D}^2 f(\varepsilon_0)(\varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{v}_0), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{v}_0)) dx \\ \geq \lambda(1 + |\varepsilon_0|^2)^{\frac{p-2}{2}} \int_{B(x_0, R)} |\varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{v}_0)|^2 dx \\ \geq c(p, d, \lambda, \varepsilon_0) \int_{B(x_0, R)} |\nabla(\mathbf{v}) - \nabla(\mathbf{v}_0)|^2 dx. \end{aligned}$$

Odtud díky rovnici v (5.16) vyplývá

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, R)} |\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}_0|^2 dx &\leq c \int_{B(x_0, R)} \mathcal{D}^2 f(\varepsilon_0)(\varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{v}_0), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{v}_0)) dx \\ &= c \int_{B(x_0, R)} \mathcal{D}^2 f(\varepsilon_0)(\varepsilon(\mathbf{v}), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{v}_0)) dx \\ &= c \left(\int_{B(x_0, R)} \mathcal{D}^2 f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))(\varepsilon(\mathbf{v}), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{v}_0)) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{B(x_0, R)} [\mathcal{D}^2 f(\varepsilon_0) - \mathcal{D}^2 f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))] (\varepsilon(\mathbf{v}), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{v}_0)) dx \right) \\ &= c(I_1 + I_2) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Použijeme-li nyní rovnici (5.15) a Youngovu nerovnost s $\gamma > 0$ dostaneme

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c \int_{B(x_0, R)} |\partial_k(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) : \varepsilon(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)| dx + c \int_{B(x_0, R)} |\mathbf{g} \cdot \partial_k(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)| dx \\ &\leq 2\gamma \int_{B(x_0, R)} |\nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)|^2 dx + c(\gamma) \|\bar{\mathbf{u}}\|_\infty^2 \int_{B(x_0, R)} |\nabla \bar{\mathbf{u}}|^2 dx + c(\gamma) \|g\|_\infty^2 R^3. \end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned} I_2 &\leq c \operatorname{osc}_{B(x_0, R)} \mathcal{D}^2 f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})) \int_{B(x_0, R)} |\nabla \mathbf{v}| |\nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)| \, dx \\ &\leq \gamma \int_{B(x_0, R)} |\nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)|^2 \, dx + c(\gamma) [\operatorname{osc}_{B(x_0, R)} \mathcal{D}^2 f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))]^2 \int_{B(x_0, R)} |\nabla \mathbf{v}|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Pokud zvolíme γ dost malé, můžeme členy s γ zahrnout do výrazu na levé straně (5.19). Díky spojitosti $\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$ a $\mathcal{D}^2 f$ můžeme při pevném γ ke zvolenému $\alpha > 0$ najít takové R_0 , že platí

$$\left(c(\gamma) \operatorname{osc}_{B(x_0, R)} \mathcal{D}^2 f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})) \right)^2 < \alpha$$

pro každé $R \leq R_0$. Jelikož víme, že $\nabla \bar{\mathbf{u}} \in L_{loc}^{3p}(\Omega)$, je

$$\int_{B(x_0, R)} |\nabla \bar{\mathbf{u}}|^2 \, dx \leq c R^{\frac{3p-2}{p}} = c R^{1+2\mu} \quad (5.20)$$

pro $\mu := 1 - \frac{1}{p}$. Z (5.18) a (5.19) vyplývá

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla \mathbf{v}|^2 \, dx < c_1 \left[\left(\frac{r}{R} \right)^3 + \alpha \right] \int_{B(x_0, R)} |\nabla \mathbf{v}|^2 \, dx + c_2 R^{1+2\mu}$$

pro všechna $r \leq R \leq R_0$. Podobně dostaneme existenci $B(x_0, s)$, $s < R_0$, takové, že pro každé $x \in B(x_0, s)$ a pro všechna $r \leq R \leq R_0$ platí

$$\int_{B(x, r)} |\nabla \mathbf{v}|^2 \, dx < c_1 \left[\left(\frac{r}{R} \right)^3 + \alpha \right] \int_{B(x, R)} |\nabla \mathbf{v}|^2 \, dx + c_2 R^{1+2\mu} \quad (5.21)$$

Nyní volbou α dostatečně malého obdržíme podle Lemmatu 3.6 pro každé $x \in B(x_0, s)$ odhad růstu

$$\int_{B(x, r)} |\nabla \mathbf{v}|^2 \, dx \leq c r^{1+2\mu}.$$

Poincarého nerovnost dává

$$\int_{B(x, r)} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_{x, r}|^2 \, dx \leq r^2 \int_{B(x, r)} |\nabla \mathbf{v}|^2 \, dx \leq c r^{3+2\mu},$$

odtud je podle Věty 5.1 $\mathbf{v} \in C^{0,\mu}(B(x_0, s))$ a proto $\bar{\mathbf{u}} \in C^{1,\mu}(\Omega_0; \mathbb{R}^3)$. Tudíž je zřejmě $\nabla \bar{\mathbf{u}} \in L_{loc}^\infty(\Omega_0)$, což implikuje

$$\int_{B(x,R)} |\nabla \bar{\mathbf{u}}|^2 dx \leq cR^3.$$

Díky předchozímu odhadu můžeme (5.21) nahradit

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx &< c_1 \left[\left(\frac{r}{R} \right)^3 + \alpha \right] \int_{B(x,R)} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx + c_2 R^3 \\ &< c_1 \left[\left(\frac{r}{R} \right)^3 + \alpha \right] \int_{B(x,R)} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx + c_2 R^{1+2\nu} R_0^{2(1-\nu)}, \end{aligned}$$

kde $\nu \in (0, 1)$ je libovolné. Opět použijeme Lemma 3.6, Poincarého nerovnost a dostáváme

$$\forall \nu \in (0, 1) \quad \int_{B(x,r)} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_{x,r}|^2 dx \leq r^2 \int_{B(x,r)} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx \leq cr^{3+2\nu}.$$

Podle Věty 5.1 potom máme $\forall \nu \in (0, 1) \quad \mathbf{v} \in C^{0,\nu}(B(x_0, s))$ a proto $\bar{\mathbf{u}} \in C^{1,\nu}(\Omega_0; \mathbb{R}^3)$. □

5.2 Úplná regularita ve 2D, $q_0 = 2$

Ve dvou dimenzích ukážeme, že řešení $\bar{\mathbf{u}}$ z Věty 4.11 má lokálně hölderovsky spojitě první derivace na Ω .

Uvedme [8, Lemma 4.1], na jehož použití je založen důkaz hlavní věty této sekce.

Lemma 5.6. *Nechť $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$. Nechť existují $\beta > \alpha > 0$, $c_1, c_2 > 0$, $R_0 > 0$ tak, že funkce $H \in L^2(\Omega_0)$, $h \in W^{1,2}(\Omega_0)$ splňují pro každé $x_0 \in \Omega_0$ a $R \in (0, R_0)$ takové, že $B(x_0, 2R_0) \subset \Omega_0$, $T(x_0, R) = B(x_0, 2R) - B(x_0, R)$*

$$\int_{B(x_0, R)} H^2 dx \leq \frac{c_1}{R} \left(\int_{T(x_0, R)} H^2 + R^\alpha dx \right)^{\frac{1}{2}} \int_{T(x_0, R)} |hH| dx + c_2 R^\beta. \quad (5.22)$$

Potom pro každé $t \geq 1$ existuje $c = c(c_1, c_2, t, \|h\|_{1,2;\Omega_0}, \|H\|_{2,\Omega_0}, \alpha, R_0)$ takové, že pro každou kouli $B(x_0, R)$ platí

$$\int_{B(x_0, R)} H^2 dx \leq c |\ln R|^{-t}.$$

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení získáme modifikací důkazu [8, Lemma 4.1]. Provedeme pouze náznak důkazu. Je třeba odvodit nerovnost

$$\left(\int_{T(x_0, R)} \left(h - \int_{T(x_0, R_0)} h dx \right)^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_1 \sqrt{\log_2 \left(\frac{2R_0}{R} \right)} \left(\int_{B(x_0, 2R_0)} |\nabla h|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.23)$$

která je následně použita pro odhad

$$\begin{aligned} \int_T |hH| dx &\leq \int_T \left(\left| h - \int_{T_0} h dy \right| + \int_{T_0} |h| dy \right) |H| dx \\ &\leq \left[\left(\int_T \left| h - \int_{T_0} h dy \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{T_0} |h|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left(\int_T |H|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_2(R_0, \|h\|_{W^{1,2}(\Omega_0)}) \sqrt{\log_2 \frac{2R_0}{R}} \left(\int_T H^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Po použití odhadu (5.24) v (5.22) dostaneme pro $R \in (0, R_0]$ a $B(x_0, 2R_0) \subset \Omega_0$

$$\int_{B(x_0, R)} H^2 dx \leq c_3(c_1, R_0, \|h\|_{W^{1,2}(\Omega_0)}) \sqrt{\log_2 \frac{2R_0}{R}} \left(\int_{T(x_0, R)} H^2 dx + R^\alpha \right) + c_4 R^\beta. \quad (5.25)$$

Nyní využijeme $\beta > \alpha$ a získáme

$$\int_{B(x_0, R)} H^2 dx \leq c_3(c_1, R_0, \|h\|_{W^{1,2}(\Omega_0)}) \sqrt{\left(\frac{2R_0}{R}\right)} \left(\int_{T(x_0, R)} H^2 dx + R^\alpha \right). \quad (5.26)$$

A dále je odtud třeba odvodit

$$\int_{B(x_0, R)} H^2 dx \leq e^{-\frac{2\sqrt{N+1}}{c_3+1}} \left(e^{\frac{2\sqrt{3}}{c_3+1}} \int_{B(x_0, 2R_0)} H^2 dx + R_0^\alpha \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i\alpha} e^{\frac{2\sqrt{i+2}}{c_3+1}} \right), \quad (5.27)$$

kde $N = \lceil \log_2 \frac{R_0}{R} \rceil$. Jelikož pro každé $t > 1$ existuje $c(t)$ tak, že

$$\forall s > 0 \quad e^{-s} \leq \frac{c(t)}{s^t}$$

a řada v (5.27) konverguje, dostaneme z (5.27)

$$\int_{B(x_0, R)} H^2 dx \leq c(c_1, R_0, \|h\|_{W^{1,2}(B(x_0, 2R_0))}, t) \left(\log_2 \frac{2R_0}{R} \right)^{-t}. \quad (5.28)$$

Nakonec poznamenejme, že ke každému t existuje konstanta $K = K(t)$ taková, že

$$\left(\log_2 \frac{2R_0}{R} \right)^{-t} \leq K(-\log_2 R)^{-t}.$$

□

Dále uveďme [7, Lemma p. 287].

Lemma 5.7. *Nechť $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ je oblast. Nechť pro $\mathbf{u} \in W^{1,2}(\Omega_0; \mathbb{R}^2)$ existuje $t > 2$ tak, že pro každou podoblast $\Omega'_0 \subset \subset \Omega_0$ a každou $B(x_0, R) \subset \Omega'_0$ $\mathbf{u}$ splňuje*

$$\int_{B(x_0, R)} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx \leq K |\ln R|^{-t},$$

kde K závisí na Ω'_0 . Pak $\mathbf{u}$ je spojitá na Ω_0 , existuje $K' > 0$ a pro každou $B(x_0, R) \subset \Omega'_0$ platí

$$\text{osc}_{B(x_0, R)} \mathbf{u} \leq K' |\ln R|^{1-\frac{t}{2}}$$

Věta 5.8. *Nechť $d = 2$, $q_0 = 2$ a jsou splněny předpoklady Věty 4.11. Pak s použitím značení téže věty je pro každé $\nu \in (0, 1)$ $\bar{\mathbf{u}} \in C^{1,\nu}(\Omega; \mathbb{R}^2)$.*

Důkaz. Důkaz této věty je proveden kombinací technik obsažených v důkazech [2, Theorem 1.5.], [4, Theorem 2.1. b)]. Zvolme pevně $B(\bar{x}, 2r) \subset\subset B(x_0, 2R) \subset\subset \Omega$. Uvažujme funkci $\eta \in C^\infty(B(\bar{x}, 2r))$ s kompaktním nosičem v $B(\bar{x}, 2r)$, $\eta \equiv 1$ na $B(\bar{x}, r)$ a $|\nabla \eta| \leq cr^{-1}$. Označme $\bar{\sigma} = \mathcal{D}f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))$.

KROK 1 Provedme limitní přechod $\delta \rightarrow 0$ v odhadu (4.42). Z (iii) Lemmatu 4.5 plyne, že rovnice (4.31) je splněna bodově s.v. na Ω . Odtud máme

$$|\nabla p_\delta| \leq c(1 + |\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)|^2)^{\frac{q-2}{2}} |\varepsilon(\partial_k \mathbf{u}_\delta)| + |\nabla \mathbf{u}_\delta| |\mathbf{u}_\delta| + \mathbf{g}.$$

S využitím Hölderovy nerovnosti obdržíme pro každé $s < 2$ a každou $\Omega' \subset\subset \Omega$ kompaktní

$$(1 + |\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)|^2)^{\frac{q-2}{2}} |\varepsilon(\partial_k \mathbf{u}_\delta)| \in L^s(\Omega'; \mathbb{R}^2).$$

Navíc z Věty 4.8 plyne $|\nabla \mathbf{u}_\delta| |\mathbf{u}_\delta| \in L^s_{loc}(\Omega)$ pro každé $r \in (1, \infty)$ stejnoměrně vzhledem k δ a podle předpokladu je $\mathbf{g} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Můžeme proto vybrat $\delta_k \rightarrow 0$ tak, že $\forall t < 2, \forall \Omega' \subset\subset \Omega$

$$p_{\delta_k} \rightharpoonup \bar{p} \text{ ve } W^{1,t}(\Omega'). \quad (5.29)$$

Pro limitní přechod v členu na levé straně (4.42) definujme funkci F předpisem

$$F(x, \rho, \sigma) := \eta^2(x) \mathcal{D}^2 f(\rho)(\sigma, \sigma).$$

Zřejmě je F spojitá v x, ρ , nezáporná a konvexní v σ . Z konvergence posloupnosti $\{\mathbf{u}_{\delta_n}\}_{n=1}^\infty$ popsané ve Větě 4.11 potom plyne podle [13, Theorem 1, p. 132]

$$\begin{aligned} \int_{B(\bar{x}, 2r)} F(x, \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}), \partial_k \varepsilon(\bar{\mathbf{u}})) \, dx &\leq \liminf_{\delta_n \rightarrow 0} \int_{B(\bar{x}, 2r)} F(x, \varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n}), \partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n})) \, dx \\ &\leq \liminf_{\delta_n \rightarrow 0} \int_{B(\bar{x}, 2r)} \mathcal{D}^2 f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n}))(\partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n}), \partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_{\delta_n})) \, dx, \end{aligned}$$

jelikož

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 f_\delta(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta))(\partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta), \partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta)) &\leq \mathcal{D}^2 f(\varepsilon(\mathbf{u}_\delta))(\partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta), \partial_k \varepsilon(\mathbf{u}_\delta)) \\ &\quad + \delta c(1 + |\varepsilon(\mathbf{u}_\delta)|^2)^{\frac{q-2}{2}} |\nabla \varepsilon(\mathbf{u}_\delta)|^2 \end{aligned}$$

Proveďme limitní přechod v prvním členu pravé strany (4.42). Odhadněme

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta \partial_k \sigma_{\delta_n} : (\nabla \eta \odot \partial_k (\mathbf{u}_{\delta_n} - Qx)) - \eta \partial_k \bar{\sigma} : (\nabla \eta \odot \partial_k (\bar{\mathbf{u}} - Qx)) \, dx \right| \\
& \leq \left| \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta (\partial_k \sigma_{\delta_n} - \partial_k \bar{\sigma}) : (\nabla \eta \odot \partial_k (\bar{\mathbf{u}} - Qx)) \, dx \right| \\
& + cr^{-1} \left(\int_{B(\bar{x}, 2r)} |\partial_k \sigma_{\delta_n}|^{\frac{q}{q-1}} \, dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{B(\bar{x}, 2r)} |\partial_k (\mathbf{u}_{\delta_n} - \bar{\mathbf{u}})|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = |I_1| + cr^{-1} I_2^{\frac{q-1}{q}} I_3^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ze slabé konvergence $\{\sigma_{\delta_n}\}$ ve $W^{1, \frac{q}{q-1}}(B(\bar{x}, 2r))$ a faktu $(\nabla \eta \odot \partial_k (\mathbf{u}_{\delta_n} - \bar{\mathbf{u}})) \in L^q(B(\bar{x}, 2r))$ máme $I_1 \xrightarrow{\delta_n \rightarrow 0} 0$. Slabá konvergence σ_{δ_n} ve $W^{1, \frac{q}{q-1}}(B(\bar{x}, 2r))$ navíc implikuje omezenost I_2 vzhledem k δ_n . Ze silné konvergence $\mathbf{u}_{\delta_n} \xrightarrow{\delta_n \rightarrow 0} \bar{\mathbf{u}}$ v $L^q(B(\bar{x}, 2r))$ plyne $I_3 \xrightarrow{\delta_n \rightarrow 0} 0$.

Proveďme limitní přechod ve druhém členu pravé strany (4.42). Nejdříve odhadujeme

$$\begin{aligned}
& \int_{B(\bar{x}, 2r)} \left| \partial_k (\mathbf{u}_{\delta_n} \otimes \mathbf{u}_{\delta_n}) : \varepsilon (\eta^2 \partial_k (\mathbf{u}_{\delta_n} - Qx)) - \partial_k (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) : \varepsilon (\eta^2 \partial_k (\bar{\mathbf{u}} - Qx)) \right| \, dx = \\
& \int_{B(\bar{x}, 2r)} \left| \partial_k (\mathbf{u}_{\delta_n} \otimes \mathbf{u}_{\delta_n}) - \partial_k (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) \right| \left| \varepsilon (\eta^2 \partial_k (\mathbf{u}_{\delta_n} - Qx)) \right| + \left| \partial_k (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) \right| \\
& \left| \varepsilon (\eta^2 \partial_k (\mathbf{u}_{\delta_n} - Qx)) - \varepsilon (\eta^2 \partial_k (\bar{\mathbf{u}} - Qx)) \right| \, dx \\
& \leq \left(\int_{B(\bar{x}, 2r)} |\partial_k (\mathbf{u}_{\delta_n} \otimes \mathbf{u}_{\delta_n}) - \partial_k (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}})|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \, dx \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \\
& \left(\int_{B(\bar{x}, 2r)} |\varepsilon (\eta^2 \partial_k (\mathbf{u}_{\delta_n} - Qx))|^\alpha \, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\int_{B(\bar{x}, 2r)} |\partial_k (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}})|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \, dx \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \\
& \left(\int_{B(\bar{x}, 2r)} |\varepsilon (\eta^2 \partial_k (\mathbf{u}_{\delta_n} - Qx)) - \varepsilon (\eta^2 \partial_k (\bar{\mathbf{u}} - Qx))|^\alpha \, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} =: I_1^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} I_2^{\frac{1}{\alpha}} + I_3^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} I_4^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Konvergence posloupnosti $\{\mathbf{u}_{\delta_n}\}_{n=1}^\infty$ popsané ve Větě 4.11 implikují stejnoměrnou omezenost I_2 vzhledem k δ_n , $I_1 \xrightarrow{\delta_n \rightarrow 0} 0$ a $I_4 \xrightarrow{\delta_n \rightarrow 0} 0$.

Ve třetím členu pravé strany (4.42) provedeme limitní přechod snadno. Slabá

konvergence $\mathbf{u}_{\delta_n}$ ve $W^{2,\alpha}(B(\bar{x}, 2r); \mathbb{R}^2)$, pro libovolné $\alpha \in (1, 2)$ totiž implikuje

$$\begin{aligned} \int_{B(\bar{x}, 2r)} \mathbf{g} \cdot \partial_k (\eta^2 \partial_k (\mathbf{u}_{\delta_n} - Qx)) \, dx &= \int_{B(\bar{x}, 2r)} \mathbf{g} \cdot \partial_k (\eta^2) \partial_k (\mathbf{u}_{\delta_n} - Qx) \, dx \\ &+ \int_{B(\bar{x}, 2r)} \mathbf{g} \cdot \eta^2 \partial_k \partial_k \mathbf{u}_{\delta_n} \, dx \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{B(\bar{x}, 2r)} \mathbf{g} \cdot \partial_k (\eta^2) \partial_k (\bar{\mathbf{u}} - Qx) \, dx \\ &+ \int_{B(\bar{x}, 2r)} \mathbf{g} \cdot \eta^2 \partial_k \partial_k \bar{\mathbf{u}} \, dx = \int_{B(\bar{x}, 2r)} \mathbf{g} \cdot \partial_k (\eta^2 \partial_k (\bar{\mathbf{u}} - Qx)) \, dx. \end{aligned}$$

Použijeme-li (5.29), limitní přechod ve čtvrtém členu (4.42) se provede analogicky k limitnímu přechodu v prvním členu. Dostáváme tedy nerovnost

$$\begin{aligned} \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta^2 \partial_k \bar{\sigma} : \varepsilon(\partial_k \bar{\mathbf{u}}) \, dx &\leq -2 \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta \partial_k \bar{\sigma} : (\nabla \eta \odot \partial_k (\bar{\mathbf{u}} - Qx)) \, dx \\ &+ \int_{B(\bar{x}, 2r)} \partial_k (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) : \varepsilon(\eta^2 \partial_k (\bar{\mathbf{u}} - Qx)) \, dx \\ &- \int_{B(\bar{x}, 2r)} \mathbf{g} \cdot \partial_k (\eta^2 \partial_k (\bar{\mathbf{u}} - Qx)) \, dx \\ &- 2 \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta \partial_k \bar{p} \mathbf{1} : (\nabla \eta \odot \partial_k (\bar{\mathbf{u}} - Qx)) \, dx, \quad (5.30) \end{aligned}$$

kde $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ je libovolná matice.

KROK 2 Označme

$$\begin{aligned} H &:= (\mathcal{D}^2 f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))(\partial_k \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}), \partial_k \varepsilon(\bar{\mathbf{u}})))^{\frac{1}{2}} \\ h &:= (1 + |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})|^2)^{\frac{p}{4}}. \end{aligned}$$

Ukážeme, že funkce h a H splňují předpoklady Lemmatu 5.6. Zřejmě je $\partial_k \bar{\sigma} : \varepsilon(\partial_k \bar{\mathbf{u}}) = H^2$. Odvoďme

$$|\nabla \bar{\sigma}|^2 \leq cH^2. \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} |\nabla \bar{\sigma}|^2 &= \partial_k \bar{\sigma} : \partial_k \bar{\sigma} = \mathcal{D}^2 f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))(\partial_k \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}), \partial_k \varepsilon(\bar{\mathbf{u}})) \\ &\leq (\mathcal{D}^2 f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))(\partial_k \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}), \partial_k \varepsilon(\bar{\mathbf{u}})))^{\frac{1}{2}} (\mathcal{D}^2 f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))(\partial_k \bar{\sigma}, \partial_k \bar{\sigma}))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c(\Gamma^{\frac{q_0-2}{2}} |\nabla \bar{\sigma}|^2)^{\frac{1}{2}} (\mathcal{D}^2 f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))(\partial_k \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}), \partial_k \varepsilon(\bar{\mathbf{u}})))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Odtud plyne $\Gamma^{\frac{2-q_0}{4}} |\nabla \bar{\sigma}| \leq cH$ a protože uvažujeme $q_0 = 2$ je

$$H^2 \geq c|\nabla \bar{\sigma}|^2. \quad (5.32)$$

Odhadněme první člen na pravé straně (5.30) ($T(\bar{x}, 2r) = B(\bar{x}, 2r) \setminus B(\bar{x}, r)$):

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta \partial_k \bar{\sigma} : (\nabla \eta \odot \partial_k (\bar{\mathbf{u}} - Qx)) \, dx \right| &\leq cr^{-1} \int_{T(\bar{x}, 2r)} |\nabla \bar{\sigma}| |\nabla \bar{\mathbf{u}} - Q| \, dx \\ &\leq cr^{-1} \left(\int_{T(\bar{x}, 2r)} H^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{T(\bar{x}, 2r)} |\nabla \bar{\mathbf{u}} - Q|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Určeme matici Q . Položme $B := \int_{T(\bar{x}, 2r)} \varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$, $\tilde{\mathbf{u}} := \bar{\mathbf{u}} - Bx$. Dále zvolíme vektorovou funkci $\gamma := Sx + a$ podle Lemmatu 3.3, kde $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ je antisymetrická matice a $a \in \mathbb{R}^2$ tak, aby $\|\tilde{\mathbf{u}} - \gamma\|_{L^2(T(\bar{x}, 2r))} \leq c\|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^2(T(\bar{x}, 2r))}$. Z Kornovy nerovnosti (3.2) dostaneme

$$\|\nabla(\tilde{\mathbf{u}} - \gamma)\|_{L^2(T(\bar{x}, 2r))} \leq c\|\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^2(T(\bar{x}, 2r))}.$$

Odtud vyplývá

$$\|\nabla \bar{\mathbf{u}} - B - \nabla \gamma\|_{L^2(T(\bar{x}, 2r))} \leq c\|\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) - B\|_{L^2(T(\bar{x}, 2r))}.$$

Volbou $Q = B + \nabla \gamma$ dostáváme $\|\nabla \bar{\mathbf{u}} - Q\|_{L^2(T(\bar{x}, 2r))} \leq c\|\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) - B\|_{L^2(T(\bar{x}, 2r))}$. Jelikož je $\bar{\mathbf{u}} \in W_{loc}^{2, \alpha}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ pro každé $\alpha \in [1, 2)$, použijeme Sobolev-Poincarého nerovnost a obdržíme $\|\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) - B\|_{L^2(T(\bar{x}, 2r))} \leq c\|\nabla \varepsilon(\bar{\mathbf{u}})\|_{L^1(T(\bar{x}, 2r))}$. Díky odhadu (4.10) je zřejmě $h := (1 + |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})|^2)^{\frac{p}{4}} \in W^{1, 2}(B\bar{x}, 2r)$ a z elipticity $\mathcal{D}^2 f_\delta$ dostáváme

$$H \geq c(1 + |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})|^2)^{\frac{p-2}{4}} |\nabla \varepsilon(\bar{\mathbf{u}})|$$

a odtud

$$|\nabla \varepsilon(\bar{\mathbf{u}})| \leq c(1 + |\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})|^2)^{\frac{2-p}{4}} H \leq chH,$$

jelikož pro $p \in (1, 2]$ je $\frac{2-p}{4} \leq \frac{p}{4}$. Odvodili jsme tedy odhad

$$\int_{T(\bar{x}, 2r)} |\nabla \bar{\mathbf{u}} - Q|^2 \, dx \leq c \int_{T(\bar{x}, 2r)} hH \, dx. \quad (5.33)$$

Pro první člen na pravé straně (5.30) proto máme odhad

$$\int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta \partial_k \bar{\sigma} : (\nabla \eta \odot \partial_k (\bar{\mathbf{u}} - Qx)) \, dx \leq cr^{-1} \left(\int_{T(\bar{x}, 2r)} H^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \int_{T(\bar{x}, 2r)} hH \, dx.$$

Z (5.30) a předcházejícího odhadu máme

$$\begin{aligned}
\int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta^2 H^2 \, dx &\leq cr^{-1} \left(\int_{T(\bar{x}, 2r)} H^2 \, dx \right) \int_{T(\bar{x}, 2r)} h H \, dx \\
&\quad + \int_{B(\bar{x}, 2r)} \partial_k(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) : \varepsilon(\eta^2 \partial_k(\bar{\mathbf{u}} - Qx)) \, dx \\
&\quad - \int_{B(\bar{x}, 2r)} \mathbf{g} \cdot \eta^2 \partial_k(\bar{\mathbf{u}} - Qx) \, dx \\
&\quad - 2 \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta \partial_k \bar{p} \mathbf{1} : (\nabla \eta \odot \partial_k(\bar{\mathbf{u}} - Qx)) \, dx. \tag{5.34}
\end{aligned}$$

Postupně odhadneme zbývající členy na pravé straně (5.34). Začneme s druhým.

$$\begin{aligned}
\int_{B(\bar{x}, 2r)} \partial_k(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) \eta^2 : \varepsilon(\partial_k(\bar{\mathbf{u}} - Qx)) \, dx &= \int_{B(\bar{x}, 2r)} \partial_k(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) : \varepsilon(\eta^2 \partial_k \bar{\mathbf{u}}) \, dx \\
&\quad + 2 \int_{B(\bar{x}, 2r)} \partial_k(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}) : (\nabla \eta \odot \partial_k(\bar{\mathbf{u}} - Qx)) \, dx =: I_1 + I_2, \tag{5.35}
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq c \|\bar{\mathbf{u}}\|_\infty \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta^2 |\partial_k \bar{\mathbf{u}}| \Gamma^{\frac{p-2}{4}} \Gamma^{\frac{2-p}{4}} |\varepsilon(\partial_k \bar{\mathbf{u}})| \, dx \\
&\leq \alpha \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta^2 \Gamma^{\frac{p-2}{2}} |\varepsilon(\partial_k \bar{\mathbf{u}})|^2 \, dx + c(\alpha) \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta^2 |\nabla \bar{\mathbf{u}}|^2 \Gamma^{\frac{2-p}{2}} \, dx \\
&\leq c\alpha \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta^2 H^2 \, dx + c(\alpha) \int_{B(\bar{x}, 2r)} (1 + |\nabla \bar{\mathbf{u}}|^2)^{\frac{4-p}{2}} \, dx.
\end{aligned}$$

Na odhad posledního integrálu použijeme Hölderovu nerovnost s $s > 1$

$$\int_{B(\bar{x}, 2r)} (1 + |\nabla \bar{\mathbf{u}}|^2)^{\frac{4-p}{2}} \, dx \leq c \left(\int_{B(\bar{x}, 2r)} (1 + |\nabla \bar{\mathbf{u}}|^2)^{\frac{4-p}{2}s} \, dx \right)^{\frac{1}{s}} r^{2(1-\frac{1}{s})}.$$

Díky stejnoměrnému odhadu z Věty 4.8 dostáváme pro jisté $\alpha_1 \in (0, 2)$

$$\int_{B(\bar{x}, 2r)} (1 + |\nabla \bar{\mathbf{u}}|^2)^{\frac{4-p}{2}} \, dx \leq cr^{\alpha_1}.$$

Dále odhadneme

$$\begin{aligned} I_2 &\leq c \|\bar{\mathbf{u}}\|_\infty \int_{T(\bar{x}, 2r)} |\nabla \bar{\mathbf{u}}| |\eta| |\nabla \eta| |\nabla \bar{\mathbf{u}} - Q| \, dx \\ &\leq cr^{-1} \left(\int_{T(\bar{x}, 2r)} |\nabla \bar{\mathbf{u}}|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{T(\bar{x}, 2r)} |\nabla \bar{\mathbf{u}} - Q|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Na odhad prvního integrálu na pravé straně předchozí nerovnosti použijeme Hölderovu nerovnost s $s > 1$ a stejnoměrný odhad z Věty 4.8, a už jsme odvodili odhad druhého integrálu v (5.34), proto vychází

$$I_2 \leq cr^{-1} \left(\int_{T(\bar{x}, 2r)} |\nabla \bar{\mathbf{u}}|^{2s} \, dx \right)^{\frac{1}{2s}} r^{\frac{2(1-\frac{1}{s})}{2}} \int_{B(\bar{x}, 2r)} hH \, dx \leq cr^{\alpha_2-1} \int_{B(\bar{x}, 2r)} hH \, dx,$$

kde $\alpha_2 \in (0, 1)$. Odhadněme ještě člen s vnější silou.

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(\bar{x}, 2r)} \mathbf{g} \cdot \partial_k (\eta^2 \partial_k [\bar{\mathbf{u}} - Qx]) \, dx \right| &\leq c \left(\int_{B(\bar{x}, 2r)} |\nabla \eta| |\nabla \bar{\mathbf{u}} - Q| \, dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta^2 |\nabla \varepsilon(\bar{\mathbf{u}})| \, dx \right) =: c(I_1 + I_2), \quad (5.36) \end{aligned}$$

neboť $|\nabla^2 \bar{\mathbf{u}}| \leq c |\nabla \varepsilon(\bar{\mathbf{u}})|$. Pro I_1 máme podle (5.33)

$$I_1 \leq cr^{-1} \left(\int_{T(\bar{x}, 2r)} |\nabla \bar{\mathbf{u}} - Q|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} |B(\bar{x}, 2r)|^{\frac{1}{2}} \leq c \int_{T(\bar{x}, 2r)} hH \, dx$$

a pro I_2 dostaneme použitím Youngovy nerovnosti odhad

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta^2 |\nabla \varepsilon(\bar{\mathbf{u}})| \Gamma^{\frac{p-2}{4}} \Gamma^{\frac{2-p}{4}} \, dx \leq \gamma \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta^2 \Gamma^{\frac{p-2}{2}} |\nabla \varepsilon(\bar{\mathbf{u}})|^2 \, dx \\ &\quad + c(\gamma) \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta^2 \Gamma^{\frac{2-p}{2}} \, dx \end{aligned}$$

Nakonec odhadneme ještě člen s tlakem v (5.30). Použijeme rovnici $\nabla \bar{p} = \mathbf{g} +$

$\operatorname{div}(\bar{\sigma} - \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}).$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta \partial_k \bar{p} \mathbf{1} : [\nabla \eta \otimes \partial_k (\bar{\mathbf{u}} - Qx)] \, dx \right| \\
& \leq c \left(\int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta |\nabla \bar{\sigma}| |\nabla \eta| |\nabla \bar{\mathbf{u}} - Q| \, dx \right. \\
& \quad + \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta |\nabla (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}})| |\nabla \eta| |\nabla \bar{\mathbf{u}} - Q| \, dx \\
& \quad \left. + \int_{B(\bar{x}, 2r)} \eta |g| |\nabla \eta| |\nabla \bar{\mathbf{u}} - Q| \, dx \right) =: I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

Odhadněme I_1

$$\begin{aligned}
I_1 & \leq cr^{-1} \left[\int_{T(\bar{x}, 2r)} H^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{T(\bar{x}, 2r)} |\nabla \bar{\mathbf{u}} - Q|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \leq cr^{-1} \left[\int_{T(\bar{x}, 2r)} H^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \int_{T(\bar{x}, 2r)} hH \, dx
\end{aligned}$$

Díky omezenosti $\bar{\mathbf{u}}$ můžeme I_2 odhadnout stejně jako v (5.35) a I_3 stejně jako v (5.36).

Celkem dostaneme

$$\int_{B(\bar{x}, r)} H^2 \, dx \leq c_1 r^{-1} \left[\int_{T(\bar{x}, 2r)} H^2 \, dx + r^\alpha \right]^{\frac{1}{2}} \int_{T(\bar{x}, 2r)} hH \, dx + c_2 r^\beta, \quad (5.37)$$

kde $\alpha, \beta \in (0, 2)$. Můžeme zvolit $\beta > \alpha$ a se znalostí (5.22) použijeme Lemma 5.6, podle kterého dostaneme

$$\begin{aligned}
& \forall t > 1 \quad \exists K \quad \forall \bar{x} \in B(x_0, 2R) \text{ takové, že } B(\bar{x}, 2r) \subset\subset B(x_0, 2R) : \\
& \int_{B(\bar{x}, r)} H^2 \, dx \leq K |\log r|^{-t}.
\end{aligned}$$

Odtud máme díky (5.32)

$$\forall t > 1 \quad \int_{B(\bar{x}, r)} |\nabla \bar{\sigma}|^2 \, dx \leq K |\log r|^{-t}.$$

Zvolíme $t > 2$ a minulý odhad použijeme v Lemmatu 5.7. Odtud dostaneme spojitost $\bar{\sigma}$ v Ω . Ze spojitosti $\mathcal{D}f(\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}))$ vyplývá spojitost $\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$, jelikož $\mathcal{D}f$ je

homeomorfismus $\mathbb{S}^d$ na $\mathbb{S}^d$.

KROK 3 Nyní zbývá modifikovat důkaz Věty 5.5, ve kterém se využívá spojitost $\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$ na množině Ω_0 , pro případ $d = 2$. Odhad (5.17) nahradíme následujícím

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla \mathbf{v}_0|^2 dx \leq c \left(\frac{r}{R} \right)^2 \int_{B(x_0, R)} |\nabla \mathbf{v}_0|^2 dx \leq c \left(\frac{r}{R} \right)^2 \int_{B(x_0, R)} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx.$$

a (5.20) nahradíme

$$\int_{B(x_0, R)} |\nabla \bar{\mathbf{u}}|^2 dx \leq c R^{2(1-\frac{1}{s})},$$

kde $s > 1$ zvolíme tak, aby $2(1 - \frac{1}{s}) = 2\mu$. To je možné udělat, neboť pro $d = 2$ je $\nabla \bar{\mathbf{u}} \in L^r$, $r \in (1, \infty)$. Nakonec obdržíme nerovnost

$$\int_{B(x_0, R)} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx \leq c_1 \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 + \alpha \right] \int_{B(x_0, R)} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx + c_2 R^{2\mu},$$

z které po stejných krocích jako v důkazu Věty 5.5 dostaneme, že $\bar{\mathbf{u}} \in C^{1,\nu}(\Omega; \mathbb{R}^2)$. □

Literatura

- [1] Alt H.W.: *Lineare Funktionalanalysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2006)
- [2] Apushkinskaya D., Bildhauer F., Fuchs M.: *Steady states of anisotropic generalized Newtonian fluids*, J. of Math. Fluid Mech. 2 (2005), 261-297
- [3] Bildhauer F., Fuchs M.: *A regularity result for stationary electrorheological fluids in two dimensions*, Math. Meth. Appl. Sci. 27 (2004), 1607–1617
- [4] Bildhauer F., Fuchs M.: *Variants of the Stokes Problem: the Case of Anisotropic Potentials*, J. Math. Fluid Mech. 5 (2003), 364-402
- [5] Bildhauer F., Fuchs M.: *Twodimensional anisotropic variational problems*, Calc. Var. 16 (2003), 177–186
- [6] Evans L.: *Partial differential equations*, American mathematical society, Providence, (1998)
- [7] Frehse J.: *Two-dimensional variational problems with thin obstacles*, Math. Z. 143 (1975), 279–288.
- [8] Frehse J., Seregin G.A.: *Regularity for solutions of variational problems in the deformation theory of plasticity with logarithmic hardening*, Transl. Amer. Math. Soc. II 193 (1999), 127-152
- [9] Fuchs M., Gongbao L.: *Variational inequalities for energy functionals with nonstandard growth conditions*, Abstract Appl. Anal. 3 (1998), 41–64
- [10] Fuchs M., Repin S.: *Estimates of the deviations from the exact solutions for variational inequalities describing the stationary flow of certain viscous incompressible fluids*, Math. Meth. Appl. Sci. 33 (2010), 1136-1147

- [11] Galdi G.P.: *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations, Volume I Linearized steady problems*, Springer-Verlag, New York, (1994).
- [12] Giaquinta M.: *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*, Princeton University Press, Princeton (1983)
- [13] Giaquinta M., Modica G., Souček J.: *Cartesian currents in the calculus of variations II*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1998)
- [14] Hlaváček I., Nečas J.: *Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies: an introduction*, Elsevier scientific publishing company, Amsterdam (1998)
- [15] Málek J.: *Poznámky: Navier-Stokesovy rovnice, stacionární případ*
- [16] Málek J., Nečas J., Rokyta M., Růžička M.: *Weak and measure valued solutions to evolution partial differential equations*, Appl. Math. and Math. Compl., 13, Chapman and Hall, London (1996)
- [17] Morrey Ch.B.: *Multiple integrals in the calculus of variation*, Springer-Verlag, Berlin (2008), reprint of the 1966 edition
- [18] Renardy M., Rogers R.C.: *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York (2004)